MATH. SCAND. 55 (1984), 216–228

SUR L'HOMOTOPIE DES ESPACES DE CATEGORIE 2

YVES FELIX[1], STEPHEN HALPERIN[2] et JEAN-CLAUDE THOMAS[3]

1. Introduction.

Par espace topologique S, nous entendrons toujours un espace topologique 1-connexe ayant le type d'homotopie d'un c.w. complexe dont l'homologie rationnelle est de dimension finie en chaque degré. Il en résulte que $\pi_*(S)\otimes\mathbf{Q}$ est aussi de dimension finie en chaque degré. Le produit de Whitehead dans $\pi_*(S)\otimes\mathbf{Q}$, transféré à $\pi_*(\Omega S)\otimes\mathbf{Q}$ par l'isomorphisme canonique, induit sur ce dernier une structure d'algèbre de Lie graduée que l'on appelle *l'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle* de S.

Rappelons que la *catégorie* de S (au sens de Lusternik-Schnirelmann), notée cat (S), est le plus petit entier m tel que S soit recouvert par $m+1$ ouverts contractiles dans S. La catégorie du localisé $S_{\mathbf{Q}}$ est notée $\mathrm{cat}_0(S)$ et appelée *catégorie rationelle* de S; elle est toujours majorée par cat (S).

L'utilité de cat_0 apparaît dans le théorème suivant:

THÉORÈME. [6]. *Si* $\mathrm{cat}_0(S)<\infty$, *alors ou* $\dim\pi_*(S)\otimes\mathbf{Q}<\infty$ *ou les entiers* $\sum_{q\leqq p}\dim\pi_q(S)\otimes\mathbf{Q}$ *croissent de façon exponentielle.*

Ce qui précède donne un renseignement quantitatif sur $\pi_*(\Omega S)\otimes\mathbf{Q}$. Quant à la structure d'algèbre de Lie, elle est contenue dans la conjecture suivante:

CONJECTURE. (Avramov–Félix). Si $\mathrm{cat}_0(S)<\infty$ et $\dim\pi_*(S)\otimes\mathbf{Q}=\infty$, alors l'algèbre de Lie $\pi_*(\Omega S)\otimes\mathbf{Q}$ contient une algèbre de Lie graduée libre à deux générateurs.

Cette conjecture a été démontrée par Avramov pour les espaces formels dont l'algèbre de cohomologie est concentrée en degrés pairs et engendrée par au plus trois générateurs ([2]).

---

[1] Chercheur qualifié au F.N.R.S.

[2] Pendant le cours de cette recherche, le second auteur a bénéficié de l'hospitalité du Sonderforschungbereich 40 Mathematik et de l'Université de Lille 1.

[3] E.R.A. au C.N.R.S. - 07590.

Reçu le 18 juillet, 1982; revisé le 3 mai, 1983.

Il résulte de [17] que $\mathrm{cat}_0(S)=1$ si et seulement si S a le type d'homotopie rationnel d'un bouquet de sphères; dans ce cas ([12]) $\pi_*(\Omega S)\otimes \mathbf{Q}$ est elle-même libre.

Dans cet article, nous considérons des espaces de catégorie rationnelle 2. Cette catégorie d'espaces contient en outre les cofibres d'applications entre deux bouquets de sphères. Une conjecture (non résolue) de Lemaire [13] veut que tout espace de catégorie rationnelle 2 ait le type d'homotopie rationnelle d'un tel espace. Un exemple typique est l'espace:

$$S = (S_a^3 \vee S_b^3) \bigcup_{[a,[a,b]]} e^8 \bigcup_{[b,[a,b]]} e^8 .$$

Pour énoncer notre résultat principal, rappelons qu'un espace est dit *coformel* si son modèle minimal dans le sens de Sullivan est isomorphe à l'algèbre différentielle graduée commutative (a.d.g.c.) des cochaines sur l'algèbre de Lie $\pi_*(\Omega S)\otimes \mathbf{Q}$ — voir paragraphe 2 pour plus de détails; ainsi, l'exemple ci-dessus n'est pas coformel. Nous pouvons énoncer:

THÉORÈME 1. *Si S n'est pas coformel et si*

$$\mathrm{cat}_0(S) \leqq 2 \quad \text{et} \quad \dim \pi_*(S)\otimes \mathbf{Q} = \infty$$

alors l'algèbre de Lie $\pi_*(\Omega S)\otimes \mathbf{Q}$ contient une sous-algèbre libre à deux générateurs.

THÉORÈME 2. *Si $\mathrm{cat}_0(S)\leqq 2$ et si $\dim \pi_*(S)\otimes \mathbf{Q}=\infty$, alors la dimension du centre Z de l'algèbre de Lie $\pi_*(\Omega S)\otimes \mathbf{Q}$ est au plus 1.*

Si, de plus, $0\neq \alpha \in Z$ alors α est de degré pair et il existe un p tel que la sous-algèbre $\sum_{q\geqq p}\pi_q(\Omega S)\otimes \mathbf{Q}$ est libre.

THÉORÈME 3. *Si $\mathrm{cat}_0(S)\leqq 2$, $\dim \pi_*(S)\otimes \mathbf{Q}=\infty$ et si $H^*(S;\mathbf{Q})$ est une algèbre à dualité de Poincaré alors $\pi_*(\Omega S)\otimes \mathbf{Q}$ contient une sous-algèbre libre à deux générateurs.*

2. Modèles minimaux.

A tout espace S, on peut associer son *modèle minimal de Sullivan* $(\Lambda X, d)$; c'est une a.d.g.c. (sur $\mathbf{Q}$) satisfaisant aux conditions (2.1) à (2.3) suivantes:

(2.1) $X = =\sum_{p\geqq 2} X^p$ et dim $X^p<\infty$.

(2.2) $\Lambda X =$ algèbre extérieure sur $X^{\text{impair}}\otimes$ algèbre symétrique sur X^{pair}.

(2.3) d est homogène de degré $+1$ et $\mathrm{Im}\, d\subset (\Lambda X)^+ . (\Lambda X)^+$.

Une base homogène $(x_i)_{i \in N_0}$ de X s'appelle une K.S. (Koszul–Sullivan) *base* si $dx_i \in \Lambda(x_1, \ldots, x_{i-1})$. Si (2.1) à (2.3) sont satisfaites, alors toute base homogène vérifiant $|x_i| \geqq |x_{i-1}|$ est une K.S. base [si a est un élément homogène d'un espace vectoriel gradué E on notera son degré par $|a|$].

Le modèle minimal est déterminé (à isomorphisme d'a.d.g.c. près) par S ([16], [10]). Dans un tel modèle, nous noterons $(\Lambda X)^p$ le sous-espace des éléments de degré p. Une seconde graduation, notée $\Lambda X = \sum_{p \geqq 0} \Lambda^p X$, est aussi définie: $\Lambda^p X$ est le sous-espace engendré par les éléments $x_1 \Lambda \ldots x_p$, $x_i \in X$. Les éléments dans $\Lambda^{\geqq 2} X$ sont appelés *décomposables*.

Ecrivons $\Lambda X = \oplus_{p \geqq 0} \Lambda^p X$, la différentielle d s'écrit de façon unique sous la forme $d = d_2 + d_3 + \ldots$ avec d_i une dérivation vérifiant $\operatorname{Im} d_i \subset \Lambda^i X$. De la relation $d^2 = 0$, on tire $d_2^2 = 0$. Posons alors $L_p = \operatorname{Hom}(X^{p+1}, \mathbf{Q})$. L est une algèbre de Lie graduée par la formule

$$\langle [\alpha, \beta]; x \rangle = \pm \langle d_2 x; \alpha, \beta \rangle \qquad \alpha, \beta \in L \qquad x \in X .$$

Cette algèbre de Lie sera notée $\pi_*(\Lambda X, d)$ et appelée *l'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle de* $(\Lambda X, d)$. ([1], [4].)

L'association $(\Lambda X, d) \to \pi_*(\Lambda X, d)$ est fonctorielle. En effet, si f: $(\Lambda X, d) \to (\Lambda Y, d)$ est un morphisme d'a.d.g.c., notons f_1: $X \to Y$ l'application linéaire définie par la condition $fx - f_1 x \in \Lambda^{\geqq 2} Y$. Sa transposée, notée $f_\#$: $\pi_*(\Lambda Y, d) \to \pi_*(\Lambda X, d)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

Sous les mêmes notations, une a.d.g.c. $(\Lambda X, d)$ est dite *coformelle* si $(\Lambda X, d) \cong (\Lambda X, d_2)$.

La *catégorie rationnelle* se définit facilement dans ce contexte. En effet, les idéaux $\Lambda^{>m} X$ étant stables par d, on tire de la théorie de Sullivan ([16], [10]) l'existence d'un espace vectoriel gradué Y, d'une différentielle D sur $\Lambda X \otimes \Lambda Y$ prolongeant d, et d'un quasi-isomorphisme η rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda X, d) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "p"'] & (\Lambda X \otimes \Lambda Y, D) \arrow[d, "\eta", "\cong"'] \\
 & (\Lambda X / \Lambda^{>m} X, T)
\end{tikzcd}$$

La catégorie rationnelle de $(\Lambda X, d)$ est alors ([5]) le plus petit entier m tel que i admette une rétraction.

Si, maintenant, $(\Lambda X, d)$ est le modèle minimal d'un espace S, alors on a les isomorphismes standards ([16], [3])

$$H^*(\Lambda X, d) = H^*(S; \mathbf{Q}) \qquad \text{et} \qquad X^* = \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi_*(S); \mathbf{Q}) .$$

Le premier est multiplicatif; le deuxième, interprété comme isomorphisme $\pi_*(\Lambda X, d) \cong \pi_*(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$, est un isomorphisme d'algèbres de Lie [1]. Il résulte enfin de [5, Théorème 4.7] que $\mathrm{cat}_0(S) = \mathrm{cat}_0(\Lambda X, d)$.

3. Démonstration du Théorème 1.

D'après le paragraphe 2, le Théorème 1 se déduit du Théorème 3.1 suivant.

3.1. Théorème. *Soit* $(\Lambda X, d)$ *une* a.d.g.c. *satisfaisant à* (2.1)–(2.3), *telle que* $\dim X = \infty$ *et* $\mathrm{cat}_0(\Lambda X, d) \leqq 2$. *Si* $(\Lambda X, d)$ *n'est pas coformel, il existe alors, dans* $\pi_*(\Lambda X, d)$, *une sous-algèbre libre à deux générateurs.*

Démonstration. Soit $(\Lambda X, d)$ un modèle minimal satisfaisant aux hypothèses du théorème. On notera $(\Lambda X \otimes \Lambda Y, d)$ le modèle de $(\Lambda X/\Lambda^{\geqq 3}X, \bar{d})$; Il y a donc une rétraction de $\Lambda X \otimes \Lambda Y \to \Lambda X$.

Nous appellerons *modèle quotient* de $(\Lambda X, d)$ une a.d.g.c. $(\Lambda X', d')$ avec une surjection $(\Lambda X, d) \to (\Lambda X', d')$; un tel modèle est d'après [5, Théorème 5.1] de catégorie $\leqq 2$. De plus, $\pi_*(\Lambda X', d')$ étant une sous-algèbre de $\pi_*(\Lambda X, d)$, il suffira de démontrer que $\pi_*(\Lambda X', d')$ contient la sous-algèbre libre désirée.

La première étape de la démonstration consiste, par des passages successifs à des modèles quotients, à réduire le probléme à un problème quotient vérifiant les hypothèses (plus fortes que celles du Théorème 3.1) de l'une des trois Propositions 3.6, 3.7, 3.8 ci-dessous. Compte tenu de ces propositions, le théorème sera donc démontré.

Dans un premier temps, nous montrons l'existence d'une KS base (x_i) (quitte à remplacer X par un autre espace de générateurs) telle que

$$(3.2)\qquad \begin{cases} |x_i| \geqq |x_{i-1}|,\ i \geqq 1, \text{ et pour un certain } k: \\ dx_i \in \Lambda^2(x_1, \dots, x_{i-1})\ i < k \\ dx_k \in \Lambda^3(x_1, \dots, x_{k-1}) \text{ représente une classe de coho-} \\ \text{mologie non nulle dans } H^*(\Lambda(x_1, \dots, x_{k-1})). \end{cases}$$

En effet, soit (y_i) une K.S. base de ΛX telle que $|y_i| \geqq |y_{i-1}|$. Supposons avoir choisi $x_1, \dots, x_p \in \Lambda X$ tels que $(x_1, \dots, x_p, y_{p+1}, y_{p+2}, \dots)$ soit aussi une K.S. base vérifiant $dx_i \in \Lambda^2(x_1, \dots, x_{i-1})$, $i \leqq p$.

Ecrivons

$$dy_{p+1} = \sum_{i \geqq 2} \Phi_i, \qquad \Phi_i \in \Lambda^i(x_1, \dots, x_p)\,.$$

Il résulte de notre hypothèse sur les dx_i que $d\Phi_i = 0$, $i \geqq 2$. Puisque $\mathrm{cat}_0(\Lambda X, d) \leqq 2$, on a $\sum_{i \geqq 3} \Phi_i = d\omega$; écrivons $\omega = \lambda y_{p+1} + \Psi$ où $\Psi \in \Lambda(x_1, \dots, x_p, y_{p+2}, \dots)$. Si $\lambda = 0$ posons $x_{p+1} = y_{p+1} - \omega$, et notons que $dx_{p+1} \in \Lambda^2(x_1, \dots, x_p)$.

Si, par contre, $\lambda \neq 0$, posons $z_{p+1} = y_{p+1} + (1/\lambda)\Psi$; alors $(x_1, \ldots, x_p, z_{p+1}, y_{p+2}, \ldots)$ est une K.S. base et $dz_{p+1} \in \Lambda^{\geqq 3}(x_1, \ldots, x_p)$. Si $dz_{p+1} = da$, a dans $\Lambda(x_1, \ldots, x_p)$, nous posons $x_{p+1} = z_{p+1} - a$ et alors $dx_{p+1} = 0 \in \Lambda^2(x_1, \ldots, x_p)$.

Supposons enfin que dz_{p+1} n'est pas un cobord dans $\Lambda(x_1, \ldots, x_p)$. Ecrivons

$$dz_{p+1} = \sum_{i \geqq 3} \Omega_i, \qquad \Omega_i \in \Lambda^i(x_1, \ldots, x_p) .$$

Puisque $\mathrm{cat}_0\,(\Lambda X, d) \leqq 2$, $\Omega_i = d\omega_i$, avec ω_i décomposable si $i \geqq 4$. (Ceci découle du résultat principal de [9], comme nous l'avons remarqué dans [7].)

Pour raisons de degré $\omega_i \in \Lambda(x_1, \ldots, x_p)$ si $i \geqq 4$. Posons donc $x_{p+1} = z_{p+1} - \sum_{i \geqq 4} \omega_i$; $dx_{p+1} \in \Lambda^3(x_1, \ldots, x_p)$ et représente une classe de cohomologie non nulle dans $H(\Lambda(x_1, \ldots, x_p))$.

Si le dernier cas ne se produit pas, par le processus précédent, nous construisons une K.S. base (x_i) avec $dx_i \in \Lambda^2(x_1, \ldots, x_{i-1})$ pour tout i. Ceci contredirait la non conformalité de $(\Lambda X, d)$. Le dernier cas doit donc arriver pour un i, ce qui établit (3.2).

Soit maintenant (x_i) une K.S. base satisfaisant à (3.2). Quitte à passer à un modèle quotient en écrasant les premiers l générateurs (pour un certain $l < k$), nous pouvons supposer que $dx_k = x_1\omega + da$, $a \in \Lambda^{\geqq 2}X$. Remplaçant x_k par $x_k - a$, nous pouvons ainsi supposer que (3.2) et

$$(3.3) \qquad dx_k = x_1\omega, \qquad \omega \in \Lambda^2 X ,$$

sont satisfaites simultanément. Quitte à passer à un deuxième modèle quotient en écrasant certains cocycles générateurs de degré $|x_k|$. nous pouvons aussi supposer que tout cocycle de degré $|x_k|$ est décomposable.

Si maintenant $|x_1|$ est impair, les hypothèses de la Proposition (3.6) sont satisfaites. Si $|x_1| = p$ est pair et s'il existe $0 \neq du \in \Lambda^2 X^p$, les hypothèses de (3.7) sont satisfaites.

Supposons, alors, que $|x_1| = p$ est pair et que aucun élément de $\Lambda^2 X^p$ n'est un cobord. Puisque $\mathrm{cat}_0\,(\Lambda X, d) \leqq 2$, quitte à écraser encore des générateurs, on peut se ramener au case où

$$(3.4) \qquad X^p = (x_1), \qquad X^{3p-1} = (x_2), \qquad dx_2 = x_1^3 ,$$

et

$$(3.5) \qquad |x_2| < |x_3| \leqq \ldots \leqq |x_i| \leqq \ldots .$$

Comme $H(\Lambda(x_1, x_2)) = \Lambda x_1 / x_1^3$, nous pouvons supposer (quitte à remplacer $X^{\geqq 3p}$ par un autre espace de générateurs) que l'idéal engendré par $X^{\geqq 3p}$ est stable par d. Le premier des x_i $(i > 2)$ est donc un cocycle que l'on peut écraser; le suivant devient alors un cocycle et ainsi de suite. En utilisant cet argument, nous pouvons supposer que l'hypothèse (ii) de (3.8) est satisfaite. En écrasant certains cocycles générateurs dans ce dernier modèle quotient, nous pouvons aussi supposer satisfaites les hypothèses (iii) et (iv) de (3.8) et alors appliquer cette proposition.

3.6. PROPOSITION. *Supposons que* $(\Lambda X, d)$ *satisfaisant aux hypothèses du Théorème* (3.1), *admet une* K.S. *base* $(x_1, x_2, \ldots)$ *avec* $|x_1|$ *impair, et tel que pour un certain* k

(i) $dx_j \in \Lambda^2 X$, $j<k$.
(ii) $dx_k = x_1\omega_0$, $\omega_0 \in \Lambda^2(x_1, \ldots, x_{k-1})$.
(iii) *Tout cocycle de degré* $|x_k|$ *est décomposable.*
(iv) $|x_j| \geqq |x_k|$ *si* $j \geqq k$.

Alors, l'algèbre de Lie $\pi_*(\Lambda X, d)$ *contient une sous-algèbre de Lie libre à deux générateurs.*

DÉMONSTRATION. De (ii) on déduit $x_1 d\omega_0 = 0$, d'où $d\omega_0 = x_1\omega_1$. De cette manière, on obtient une suite $\omega_0, \omega_1, \ldots$, avec $d\omega_i = x_1\omega_{i+1}$. Evidemment $|\omega_{i+1}| < |\omega_i| < \ldots < |\omega_0| < |x_k|$ et d'après (i) et (iv), on peut supposer $\omega_i \in \Lambda^2(x_1, \ldots, x_{k-1})$. De plus, pour un certain n, $d\omega_n = 0$.

Parmi tous les $x_k' = x_k + \Phi$, avec Φ décomposable de degré $|x_k|$, considérons ceux qui satisfont à $dx_k' = x_1\omega_0'$, $\omega_0' \in \Lambda^2 X$. Un tel x_k' définit une suite $\omega_0', \ldots, \omega_m'$ avec $d\omega_i' = x_1\omega_{i+1}'$, $d\omega_m' = 0$ et $\omega_i' \in \Lambda^2$X. Choisissons x_k' et les ω_i' afin de minimiser m. D'après (iii), nécessairement m est positif ou nul.

Soit A l'algèbre graduée engendrée par u, v avec, comme relations, $u^2 = uv = v^2 = 0$, $[|u| = |x_1|$, $|v| = |\omega_m'|]$. Soit $(\Lambda Z, d)$ le modèle minimal de $(A, 0)$; on identifie u et v à des générateurs dans Z. En posant $u \to x_1$, $v \to \omega_m'$, nous définissons un morphisme $(A, 0) \to (\Lambda X/\Lambda^{\geqq 3}X, \bar{d})$ qui se relève en un morphisme $(\Lambda Z, d) \to (\Lambda X \otimes \Lambda Y, d)$ tel que $u \to x_1$, $v \to \omega_m'$. En composant par la rétraction sur ΛX, nous obtenons un morphisme φ: $(\Lambda Z, d) \to (\Lambda X, d)$ tel que $\varphi u = x_1$ et $\varphi v = \omega_m'$.

Dans Z, il existe des éléments $v_m = v, v_{m-1}, \ldots, v_{-1}$ tels que $dv_i = uv_{i+1}$. Posons $\tilde{\varphi}v_i$ la composante de φv_i dans $\Lambda^2 X$ et $\bar{\omega}_i = \omega_i' - \tilde{\varphi}v_i$, $i \geqq 0$. Evidemment $\bar{\omega}_m = 0$, et $d\bar{\omega}_i = x_1\bar{\omega}_{i+1}$, $i \geqq 0$. Si, de plus, φv_{-1} était décomposable, nous aurions $d(x_k - \varphi v_{-1}) = 0$, ce qui contredirait l'hypothèse de minimalité sur m.

Par suite, $\varphi_\#$: $\pi_*(\Lambda X, d) \to \pi_*(\Lambda Z, d)$ est non nulle en degré $|x_k| - 1$; elle est aussi non nulle en degré $|x_1| - 1$. Comme $\pi_*(\Lambda Z, d)$ est une algèbre de Lie graduée libre, la sous-algèbre Im $\varphi_\#$ est libre, et nous venons de voir qu'elle a au moins deux générateurs. Finalement, puisque Im $\varphi_\#$ est libre, la surjection $\pi_*(\Lambda X, d) \to$ Im $\varphi_\#$ est scindée.

3.7. PROPOSITION. *Supposons que* $(\Lambda X, d)$, *satisfaisant aux hypothèses du Théorème* (3.1), *admet une* K.S. *base* $(x_1, x_2, \ldots)$ *avec* $p = |x_1|$ *pair, et tel que pour un certain k*

(i) $dx_j \in \Lambda^2 X,\ j < k$.
(ii) $dx_k = x_1\omega,\ \omega \in \Lambda^2(x_1, \ldots, x_{k-1})$.
(iii) *Tout cocycle de degré* $|x_k|$ *est décomposable.*
(iv) $|x_1| \leqq |x_2| \leqq \ldots$.

Supposons en outre qu'il existe u dans X^{2p-1} *avec* $0 \neq du \in \Lambda^2 X^p$. *Alors, l'algèbre de Lie* $\pi_*(\Lambda X, d)$ *contient une sous-algèbre de Lie libre à deux générateurs.*

DÉMONSTRATION.

CAS (1): $|\omega| = 2p$: Posons $H = \Lambda X^p / (\Lambda^{\geqq 3} X^p \oplus du)$, et soit $(\Lambda Z, d')$ le modèle bigradué de H ([11]). Identifions $Z_0 = X^p$ et notons que $Z^{2p-1} = Z_1^{2p-1} = (z)$ avec $d'z = du$. De plus $Z_+^i = 0,\ i < 2^p - 1$. Un petit calcul montre que l'homomorphisme α: $\Lambda Z \to \Lambda X / \Lambda^{\geqq 3} X$ défini par

$$\alpha(x) = x,\ x \in Z_0; \quad \alpha(z) = u; \quad \alpha(w) = 0 \text{ si } |w| \geqq 2p$$

commute aux différentielles.

Soit alors φ: $(\Lambda Z, d') \to (\Lambda X, d)$ le composé d'un relèvement de α, $\bar{\alpha}$: $\Lambda Z \to \Lambda X \otimes \Lambda Y$, et de la rétraction $\Lambda X \otimes \Lambda Y \to \Lambda X$. On peut supposer que $\varphi x = x,\ x \in Z_0$ et que $\varphi z = u$. Il résulte de (iv) que $\omega \in \Lambda^2 X^p$, et de (iii) que $x_1 \omega$ n'est pas dans l'idéal engendré par du. Il existe donc v dans Z_1^{3p-1} avec $d'v = x_1 \omega$.

Evidemment, $x_k - \varphi v$ est un cocycle; d'où, d'après (iii), φv n'est pas décomposable. Il en résulte que $\operatorname{Im} \varphi_\#$ est non nul en degrés $2p-1$ et $3p-1$ et nous pourrons conclure en utilisant l'argument qui termine la démonstration de la Proposition 3.6, dans la mesure où nous montrons que $\pi_{\geqq 2p-2}(\Lambda Z, d')$ est libre.

Pour ceci, il suffit de voir que le modèle $(\Lambda Z_{\geqq 1}, d')$, quotient de $(\Lambda Z, d')$, est le modèle d'une algèbre dont la multiplication et la différentielle sont triviales. Or $(\Lambda Z_{\geqq 1}, d')$ est le modèle de $(H \otimes \Lambda s X^p, D)$ où $D = 0$ dans H et $Dsx = x$. ($(sX^p) \cong X^{p-1}$.)

Etendons la projection $\Lambda X^p / du \to H$ en un morphisme

$$\eta : (\Lambda X / du \otimes \Lambda s X^p, D) \to (H \otimes \Lambda s X^p, D)\,.$$

Ces deux a.d.g.c.'s sont munies d'une deuxième graduation notée Deg et définie par $\operatorname{Deg} x = 1$, $\operatorname{Deg} sx = 0$ $(x \in X^p)$; pour ces graduations η et D sont homogènes de Degrés 0 et 1.

De plus η est un isomorphisme en Degrés 0, 1, 2, et donc η^* en cohomologie est un isomorphisme en Degrés 0 et 1. D'autre part, un petit calcul montre que si on pose $Du = du$ et $\operatorname{Deg} u = 1$, les a.d.g.c. suivantes sont quasi-isomorphes

$$(\Lambda X^p/du \otimes \Lambda s X^p, D) \cong (\Lambda X^p \otimes \Lambda s X^p \otimes \Lambda u, D) \cong (\Lambda u, 0) .$$

Il en résulte que la cohomologie de $(H \otimes \Lambda s X^p, D)$ est réduite aux scalaires en Degré 0, et de dimension 1 en Degré 1; de plus, cette dernière classe est de degré $2p-1$. Soit Φ un cocycle représentant cette classe de Degré 1 et degré $2p-1$.

L'algèbre $H \otimes \Lambda s X^p$ étant nulle en Degré $\geqq 3$, il existe des cocycles Ψ_ν de Degré 2 tels que $1, \Phi, \Psi_\nu$ représentent une base de $H(H \otimes \Lambda s X^p)$ comme espace vectoriel. Comme $\deg \Phi$ est impair, $\Phi^2 = 0$ et pour raisons de Degré $\Phi.\ \Psi_\nu = \Psi_\nu \Psi_{\nu'} = 0$. Par suite, les éléments $1, \Phi, \Psi_\nu$ constituent une base comme espace vectoriel, d'une sous-algèbre A de $H \otimes \Lambda s X^p$ à multiplication triviale. L'inclusion $(A, 0) \to (H \otimes \Lambda s X^p, D)$ étant par construction un quasi-isomorphisme, $(\Lambda Z_{\geqq 1}, d')$ est un modèle de $(A, 0)$.

Cas (2): $|\omega| > 2p$. Soit encore $H = \Lambda X/(\Lambda^{\geqq 3} X \oplus du)$ et posons $H' = H \oplus (w)$ où $|w| = |\omega|$ et $w^2 = w.H = 0$. Le modèle bigradué [11] de H' est, alors, de la forme $(\Lambda T, d')$ où

$$T_0 = X^p \oplus (w), \quad T_1^{2p-1} = (z), \quad d'z = du .$$

Les autres générateurs sont de degré $\geqq 2p$. Envoyons $(\Lambda T, d') \to (\Lambda X/\Lambda^{\geqq 3} X, \bar{d})$ en envoyant $x \mapsto x$ $(x \in X^p)$, $w \mapsto \omega$, $z \mapsto u$ et les autres générateurs sur zéro.

Comme dans le Cas (1), nous en déduisons un morphisme φ: $(\Lambda T, d') \to (\Lambda X, d)$, et cette fois on peut supposer $\varphi x = x$ $(x \in X^p)$, $\varphi w = \omega$, $\varphi z = u$ et φv indécomposable pour un certain $v \in T_1^{|\omega| + p - 1}$. De la même façon que dans (1), il suffit maintenant de montrer que le modèle quotient $(\Lambda w \otimes \Lambda T_{\geqq 1}, d')$ est le modèle d'une algèbre dont la multiplication et la différentielle sont triviales.

Avec les notations du Cas (1), on vérifie facilement:

$$\begin{aligned}(\Lambda w \otimes \Lambda T_{\geqq 1}, d') &\cong (H' \otimes \Lambda s X^p, D)\\ &= (H \otimes \Lambda s X^p, D) \oplus (w \otimes \Lambda s X^p, 0)\\ &\cong (A \oplus (w \otimes \Lambda s X^p), 0)\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration de (3.7).

3.8. Proposition. *Supposons que* $(\Lambda X, d)$, *satisfaisant aux hypothèses du Théorème* (3.1), *admet une* K.S. *base* $x_1, x_2, \ldots$ *telle que* $p = |x_1|$ *est pair et*

(i) $dx_2 = x_1^3$.
(ii) $dx_3 = 0$, $q = |x_3|$ *est impair et* $q > |x_2|$.
(iii) *Tout cocycle de degré* $r \in [q+1, 3p+q]$ *est décomposable.*
(iv) $|x_3| < |x_4| \leqq |x_i|$, $i \geqq 5$.

Alors, l'algèbre de Lie, $\pi_*(\Lambda X, d)$, contient une sous-algèbre de Lie libre à deux générateurs.

DÉMONSTRATION. Une base de $H(\Lambda(x_1, x_2, x_3), d)$ est représentée par les cocycles $1, x_1, x_1^2, x_3, x_1x_3, x_1^2x_3$. Notons que $x_1^2x_3$ est un cobord dans ΛX puisque $\mathrm{cat}_0\,(\Lambda X, d) \leqq 2$. Par suite, les hypothèses (iii) et (iv) permettent de supposer que ou $dx_4 = x_1x_3$ ou $dx_4 = x_1^2x_3$.

CAS (1): $dx_4 = x_1x_3$. Considérons le cocycle $x_1^2x_4 - x_2x_3$. Dans le modèle quotient $\Lambda X/(x_3)$, il se projette en un cocycle cubique et donc un cobord. Il en résulte l'existence de a, b dans ΛX, avec

$$x_1^2x_4 - x_2x_3 - da = bx_3 .$$

Pour des raisons de degré $b = \lambda x_2$ et $x_1^2x_4 - (1+\lambda)x_2x_3$ est alors un cocycle, d'où $\lambda = 0$. En changeant, si besoin, les x_i $(i \geqq 5)$, nous pouvons supposer que

$$dx_5 = x_1^2x_4 - x_2x_3 .$$

De plus, $1, x_1, x_1^2, x_3, x_1^2x_4 - x_2x_3$ représentent une base de la cohomologie de $\Lambda(x_1, x_2, x_3, x_4)$ en degrés $\leqq 3p+q-1$ et il résulte de (iii) que $|x_i| > |x_5|$, $i \geqq 6$.

Soit maintenant $(\Lambda U, \delta)$ le modèle quotient de $(\Lambda X, d)$ obtenu en écrasant x_3. Puisque $\delta x_4 = 0$, $x_1^2x_4$ n'est pas un cobord dans $(\Lambda(x_1, x_2, x_4), \delta)$, et puisque $|x_i| > |x_5|$ si $i \geqq 6$ il en résulte que pour tout Φ décomposable dans ΛU, $\delta(x_5 + \Phi) \neq 0$. Par suite, tout cocycle de $(\Lambda U)^{|x_5|}$ est décomposable.

De plus, l'algèbre de Lie de $(\Lambda U, \delta)$ étant une sous-algèbre de $\pi_*(\Lambda X, d)$, il suffit de démontrer que $\pi_*(\Lambda U, \delta)$ contient une algèbre de Lie libre à deux générateurs.

Considérons l'algèbre $H = \Lambda(r, s)/\Lambda^{\geqq 3}(r, s)$ où $|r| = |x_1|$ et $|s| = |x_4|$, et $(\Lambda Z, d')$ son modèle bigradué. Nous identifions r, s à une base de Z_0. Z_1 contient des éléments w_2, w_5 tels que $d'w_2 = x^3$ et $d'w_5 = r^2s$.

Finalement, la correspondance $r \mapsto x_1$, $s \mapsto x_4$ définit un homomorphisme $(H, 0) \to (\Lambda U/\Lambda^{\geqq 3}U, \bar{\delta})$ qui se relève en un homomorphisme $(\Lambda Z, d') \to (\Lambda U/\Lambda^{\geqq 3}U, \delta)$. En composant ce dernier avec la rétraction sur $(\Lambda U, \delta)$, nous aboutissons à un morphisme φ: $(\Lambda Z, d') \to (\Lambda U, \delta)$ qui peut être supposé satisfaisant à: $\varphi r = x_1$ et $\varphi s = x_4$. Il en résulte que $\varphi w_2 - x_2$ et $\varphi w_5 - x_5$ sont des cocycles.

Compte tenu du fait que $(\Lambda U)^{|x_2|} = (x_2)$, et que tout cocycle dans $(\Lambda U)^{|x_5|}$ est décomposable, nous concluons que $\varphi w_2 = x_2$ et $\varphi w_5 = x_5 + \Phi$ avec Φ décomposable.

Un argument analogue à celui de la Proposition (3.7) (voir aussi [14] pour une autre démonstration) montre que $\pi_*(\Lambda Z_{\geqq 1}, d')$ est libre, et on conclut comme dans (3.6).

Cas (2): $dx_4 = x_1^2 x_3$: Soit A l'algèbre de base $1, u, v$ avec $u^2 = uv = v^2 = 0$ et $|u| = |x_1^2|$, $|v| = |x_3|$, et soit $(\Lambda Z, d')$ le modèle minimal de $(A, 0)$. Dans Z, il y a les éléments u, v, w avec $dw = uv$. La correspondance $u \mapsto x_1^2$, $v \mapsto x_3$ définit un morphisme $(A, 0) \to (\Lambda X / \Lambda^{\geqq 3} X, \bar{d})$. Ce dernier permet de définir, comme dans le cas précédent, un morphisme φ: $(\Lambda Z, d') \to (\Lambda X, d)$ tel que $\varphi u = x_1^2$ et $\varphi v = x_3$.

Evidemment $\varphi(w) - x_4$ est un cocycle, donc décomposable d'après (iii). Comme $\pi_*(\Lambda Z, d')$ est libre, on conclut de la même façon que dans la Proposition (3.6).

4. Démonstration du Théorème 2.

D'après le paragraphe 2, le Théorème 2 est une conséquence de:

4.1. Théorème. *Soit* $(\Lambda X, d)$ *satisfaisant à* (2.1)–(2.3) *et telle que* $\dim X = \infty$ *et* $\mathrm{cat}_0\,(\Lambda X, d) \leqq 2$, *alors le centre, Z, de l'algèbre de Lie $\pi_*(\Lambda X, d)$ est de dimension $\leqq 1$. En outre, si $0 \neq \alpha \in Z$, alors* $\deg \alpha$ *est pair et il existe un p tel que la sous-algèbre $\pi_{\geqq p}(\Lambda X, d)$ est libre.*

Démonstration. Si $Z = 0$, il n'y a rien à démontrer. Sinon fixons q et α tels que $Z_i = 0$, $i < q - 1$, et $0 \neq \alpha \in Z_{q-1}$. Quitte à passer à un modèle quotient satisfaisant aussi les hypothèses du Théorème (4.1), on peut supposer que $X^i = 0$, $i < q$ et que $\dim X^q = 1$; choisissons $x \in X^q$ tel que $\langle x, \alpha \rangle = 1$.

Supposons d'abord q pair [nous en tirerons une absurdité]. En effet, quitte à passer à un modèle quotient, nous pouvons supposer $X^i = 0$, $q < i < 2q - 1$ et X^{2q-1} ne contenant pas de cocycles. Si $X^{2q-1} \neq 0$, il est de dimension 1 et de base y avec $dy = x^2$. Notons β l'élément dual; alors $\beta = [\alpha, \alpha]$ ce qui contredit l'hypothèse $\alpha \in Z$.

Nécessairement, $X^{2q-1} = 0$. Quitte à passer à un modèle quotient on peut alors supposer $X^i = 0$, $q < i < 3q - 1$, et X^{3q-1} ne contenant pas de cocycles. Puisque $\mathrm{cat}_0\,(\Lambda X, d) \leqq 2$, x^3 est un cobord. Par suite, $\dim X^{3q-1} = 1$ et $X^{3q-1} = (y)$ avec $dy = x^3$.

Le générateur de plus bas degré $\geqq 3q$ peut alors être choisi fermé. En l'écrasant ainsi que son successeur, ainsi de suite, on aboutit à un générateur fermé z de degré impair $r > 3q$ tel que tout générateur autre que x, y, z soit de degré $> r$. Le raisonnement de la Proposition 3.8 montre alors, que, quitte à passer une fois de plus à un modèle quotient, on peut supposer

$$\Lambda X = \Lambda(x, y, z, w) \otimes \Lambda(X^{>|w|}),$$

où $dw = xz$ ou $x^2 z$. Puisque $\alpha \in Z$, la seule possibilité est $dw = x^2 z$.

Remarquons alors que le cocycle $wx - yz$ n'est pas un cobord, puisque $\alpha \in Z$.

Désignons la projection $\Lambda X \to \Lambda X/\Lambda^{\geqq 3}X$ par p; alors la classe $p^*[wx-yz] = [pw][px]-[py][pz]$ est décomposable car pw et py sont des cocycles dans $\Lambda X/\Lambda^{\geqq 3}X$. Par contre, $[wx-yz]$ n'étant pas décomposable dans $H(\Lambda X)$, il ne peut exister de rétraction du modèle de $(\Lambda X/\Lambda^{\geqq 3}X, \bar{d})$ sur $(\Lambda X, d)$. Ceci contredit l'hypothèse $\mathrm{cat}_0\,(\Lambda X, d) \leqq 2$: c'est l'absurdité cherchée qui démontre que q est impair.

Supposons désormais $|x| = 2p+1$. De la même façon que ci-dessus, nous pouvons supposer $X^i = 0$, $i < 2p+1$, $X^{2p+1} = (x)$, et $\langle x, \alpha \rangle = 1$. Notons $(\Lambda T, \bar{d})$, le modèle quotient de $(\Lambda X, d)$, obtenu en écrasant x. Nous pouvons écrire $\Lambda X = \Lambda x \otimes \Lambda T$ et $d\Phi = \bar{d}\Phi + x \otimes \theta\Phi$, $\Phi \in \Lambda T$, où θ est une dérivation de ΛT commutant à $\bar{d}$. Dire que $\alpha \in Z$ revient à dire que:

$$\theta(T) \subset \Lambda^{\geqq 2}T. \tag{4.2}$$

Montrons maintenant que tout $\bar{d}$-cocycle décomposable est un $\bar{d}$-cobord (dans ΛT); il en résultera immédiatement que $\pi_*(\Lambda T, \bar{d})$ est une algèbre de Lie libre et le théorème sera démontré.

Raisonnons par l'absurde. Supposons l'existence d'un $\bar{d}$-cocycle Φ qui ne soit pas un $\bar{d}$-cobord.

Puisque $\bar{d}\Phi = 0$, $d(x\Phi) = -xx\theta\Phi = 0$. Le cocycle $x\Phi$ appartenant à $\Lambda^{\geqq 3}X$ est un cobord; par suite, il existe $a, b \in \Lambda T$ tels que

$$x\Phi = x(\bar{d}b + \theta a) + \bar{d}a .$$

Nécessairement, $\bar{d}a = 0$ et $\Phi = \bar{d}b + \theta a$.

Comme $\mathrm{cat}_0\,(\Lambda T, \bar{d}) \leqq 2$ et comme Φ n'est pas un $\bar{d}$-cobord, nécessairement $\theta a \notin \Lambda^{\geqq 3}T$. Compte tenu de (4.2), a n'est pas décomposable; nous pouvons donc supposer $a \in T$. De plus, pour tout $\Psi \in \Lambda^{\geqq 2}T$

$$d(a+\Psi) \neq 0 . \tag{4.3}$$

On déduit maintenant, facilement, que le d-cocycle xa réprésente une classe de cohomologie dans $H(\Lambda X, d)$ qui n'est pas dans l'idéal $(H^+(\Lambda X))^2$. Par contre, l'hypothèse $\theta a \in \Lambda^{\geqq 2}T$ montre que $da = x\ \theta a \in \Lambda^{\geqq 3}X$.

Si $p\colon \Lambda X \to \Lambda X/\Lambda^{\geqq 3}X$ désigne la projection canonique, nous concluons que pa est un cocycle et donc que $p^*[xa] = [px][pa] \in (H^+(\Lambda X/\Lambda^{\geqq 3}X))^2$. Ceci contredit l'existence d'une rétraction $H(\Lambda X/\Lambda^{\geqq 3}X) \to H(\Lambda X)$; c'est l'absurdité voulue.

5. Démonstration du Théorème 3.

D'après le paragraphe 2, le Théorème 3 est une conséquence de

5.1. THÉORÈME. *Soit* $(\Lambda X, d)$ *satisfaisant à* (2.1)–(2.3) *et telle que* $\dim X = \infty$ *et* $\mathrm{cat}_0(\Lambda X, d) = 2$. *Supposons en outre que* $H(\Lambda X, d)$ *satisfait à la dualité de Poincaré, alors* $\pi_*(\Lambda X, d)$ *contient une algèbre de Lie libre à deux générateurs.*

DÉMONSTRATION. D'après le Théorème 1, nous pouvons supposer que $(\Lambda X, d)$ est coformelle. D'après [13] $(\Lambda X, d)$ admet un modèle minimal au sens de Quillen $(\boldsymbol{L}(V_0 \oplus V_1), \partial)$ avec $\partial V_0 = 0$ et $\partial V_1 \subset \boldsymbol{L}(V_0)$.

Puisque $H^*(\Lambda X, d)$ $(\cong \mathrm{Hom}(V_0 \oplus V_1, \mathbf{Q}))$ satisfait à la dualité de Poincaré, nécessairement $\dim V_1 = 1$. Alors d'après [13] si $V_1 = (v)$ et $\partial v \in \boldsymbol{L}^2(V_0)$, alors $(\Lambda X, d)$ est formelle ([11]).

Remarquons que, $(\Lambda X, d)$ étant coformelle, $H(\Lambda X, d)$ admet une seconde graduation:

$$H(\Lambda X, d) = H_0(\Lambda X, d) \oplus H_1(\Lambda X, d) \oplus H_2(\Lambda X, d).$$

Comme $\dim X = +\infty$, nécessairement $\dim V_0 \geqq 3$.

CAS (1): H_1 contient un élément x de degré pair. Par dualité, H_1 contient alors deux éléments linéairement indépendants α et β avec $x\alpha = x\beta = 0$. Notons $(\Lambda Z, d) \xrightarrow{\mu} (H, 0)$ le modèle minimal de $(H, 0)$. Z contient un générateur fermé z_0 avec $\mu(z_0) = x$.

Ecraser z_0 dans $(\Lambda Z, d)$ conduit à une a.d.g.c. $(\Lambda Z/(z_0), \bar{d})$, quasi-isomorphe à

$$(\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{z}_0, D) \xrightarrow{\simeq} (H \otimes \Lambda \bar{x}, D)$$

où $D\bar{z}_0 = z_0$ et $D\bar{x} = x$. Cependant, dans $(H \otimes \Lambda \bar{x}, D)$ $\bar{x}\alpha$ et $\bar{x}\beta$ sont 2 cocycles indécomposables en cohomologie et tels que $(\bar{x}\alpha)^2 = (\bar{x}\beta)^2 = (\bar{x}\alpha)(\bar{x}\beta) = 0$.

Notons $(\Lambda U, D)$ le modèle minimal de l'a.d.g.c. $(\Lambda(u, v)/(u^2, v^2, uv), 0)$. Le morphisme f: $(\Lambda(u, v), 0) \to (H \otimes \Lambda \bar{x}, D)$ défini par $f(u) = \bar{x}\alpha$ et $f(v) = \bar{x}\beta$ passe au quotient et fournit un morphisme au niveau modèles minimaux $(\Lambda Y, D) \to (\Lambda Z/(z_0), \bar{d})$. La thèse en résulte immédiatement.

CAS (2): H_1 ne contient aucun élément de degré pair.

Soit alors x un élément de H_1. Il existe nécessairement y avec $xy = 0$. Comme d'office, $x^2 = y^2 = 0$, le théorème est démontré.

REFERENCES

1. P. Andrews et M. Arkowitz, *Sullivan's minimal models and higher order Whitehead products*, Canad. J. Math. 30 (1978), 961–982.
2. L. Avramov, *Free Lie subalgebras of the cohomology of local rings*, Trans. Amer. Math. Soc., à paraître.
3. A. K. Bousfield et V. K. A. Gugenheim, *On the* PL *de Rham theory and rational homotopy type*, Mem. Amer. Math. Soc. 179 (1976).

4. Y. Felix, *Modèles bifiltrés: une plaque tournante en homotopie rationelle*, Canad. J. Math. 23 (1981), 1448–1458.
5. Y. Felix et S. Halperin, *Rational* L.S. *category and its applications*, Trans. Amer. Math. Soc. 273 (1982), 1–38.
6. Y. Felix, S. Halperin et J. C. Thomas, *The homotopy Lie algebra for finite complexes*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 56 (1983), 179–202.
7. Y. Felix, S. Halperin et J. C. Thomas, L.S. *catégorie et suite spectrale et Milnor-Moore*, Bull. Soc. Math. France 111 (1983), 89–96.
8. Y. Felix et J. C. Thomas, *The radius of convergence of Poincaré series of loop spaces*, Invent. Math. 68 (1982), 257–274.
9. M. Ginsburg, *On the* L.S. *category*, Ann. of Math. 77 (1963), 538–551.
10. S. Halperin, *Lectures on minimal models*, Preprint n° 111, Lille, 1977.
11. S. Halperin et J. Stasheff, *Obstructions to homotopy equivalences*, Adv. in Math. 32 (1979), 233–279.
12. P. Hilton, *On the homotopy groups of the union of spheres*, J. London, Math. Soc. 30 (1955), 172–254.
13. J. M. Lemaire et F. Sigrist, *Sur les invariants d'homotopie rationnelle liés à la* L.S. *catégorie*, Comment. Math. Helv. 56 (1981), 103–122.
14. J. Shamash, *The Poincaré series of a local ring*, J. Algebra 12 (1969), 453–470.
15. J. Stasheff, *Rational Poincaré duality spaces*, Preprint, Univ. of North Carolina.
16. D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 47 (1978), 269–331.
17. G. H. Toomer, *Lusternik-Schnirelmann category and the Moore spectral sequence*, Math. Z. 138 (1974), 123–143.

Y. Félix
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
LOUVAIN LA NEUVE, BELGIQUE

S. Halperin
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF TORONTO
TORONTO, ONTARIO, CANADA

J. C. Thomas
U.E.R DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
UNIVERSITÉ DE LILLE I
59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX, FRANCE