

DIE LANGLANDS-PARAMETER FÜR DIE FLENSTED-JENSENSCHE FUNDAMENTALE REIHE

GESTUR OLAFSSON

1. Einleitung.

In [1] hat Flensted-Jensen eine Reihe von irreduziblen zulässigen Darstellungen, die »fundamentale Reihe«, zu einem affinen symmetrischen Raum G/T , konstruiert. Gehören diese Darstellungen zu der diskreten Reihe von G/T , so hat H. Schlichtkrull [7] (siehe auch [6]), mit einer leichteren Einschränkung für die Parameter, hierzu die Langlands-Parameter und die minimalen K -Faktoren im Sinne von Vogan [9] und [10] bestimmt. In dieser Arbeit definieren wir die fundamentale Reihe auch für nicht zusammenhängende reduktive Liegruppen und bestimmen die Langlands-Parameter und minimalen K -Faktoren für alle diese Darstellungen (mit einer ähnlichen Einschränkung wie H. Schlichtkrull).

Es sei G eine reduktive Liegruppe in Sinne von [9] und τ ein involutiver Automorphismus von G . T bezeichne die Zusammenhangskomponente der Eins der Fixpunktgruppe von τ und K eine τ -invariante, maximal kompakte Untergruppe von G . Paragraph 2 gibt eine Übersicht über verschiedene von uns benötigte Wurzelsysteme. Im Paragraphen 3 wird an Resultate von Flensted-Jensen [1] erinnert, die uns eine Reihe von irreduziblen, zulässigen Darstellungen von zusammenhängenden halbeinfachen linearen Liegruppen liefern. Es wird gezeigt, dass seine Konstruktion sich auf reduktive Gruppen verallgemeinern lässt. Der Einfachheit halber wird dabei teilweise vorausgesetzt, dass G zusammenhängend ist. Im Paragraphen 4 definieren wir eine reduktive Untergruppe L von G . Wenden wir die Ergebnisse aus dem Paragraphen 3 auf L , $\tau|L$ und $K \cap L$ an und induzieren dann holomorph nach G , so bekommen wir gerade die Darstellungen von G . Dies gibt uns Auskunft über die minimalen K -Faktoren. Das wenden wir dann gleich an, um die Einschränkung im Paragraphen 3, dass G zusammenhängend ist, zu beheben. Im Paragraphen 5 werden die Langlands-Parameter für die »meisten« dieser Darstellungen bestimmt.

Ist G halbeinfach, zusammenhängend und $\text{Rang } G/T = \text{Rang } K/K \cap T$, so

hat H. Schlichtkrull diese Klassifizierung mit einer ähnlichen Methode durchgeführt. In einer zweiten Arbeit (siehe auch [5]) werde ich beweisen, dass die »meisten« von uns betrachteten Darstellungen unitär sind, und dazu brauchen wir diese Resultate auch für nicht zusammenhängende reductive Liegruppen. Mehr darüber findet der Leser in Bemerkung 5.7.

In dieser Arbeit bezeichnen wir Liegruppen mit lateinischen Grossbuchstaben G, H etc., und die zugehörigen Liealgebren mit $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0$ usw. Ferner sei stets $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $U(\mathfrak{g})$ die einhüllende Algebra von \mathfrak{g} und G_0 bzw. $G' := [G, G]$ die Zusammenhangskomponente der Eins, bzw. die abgeleitete Gruppe von G . Ist \mathfrak{h}_0 eine Unteralgebra von \mathfrak{g}_0 , dann ist $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus i\mathfrak{h}_0$ eine Unteralgebra von \mathfrak{g} . Was die Darstellungstheorie von G betrifft, weisen wir auf [8], [9] und [10] hin. Wenn wir eine davon abweichende Bezeichnung benutzen, werden wir darauf extra hinweisen.

2. Einige Wurzelsysteme.

Es sei wie in der Einführung G eine reductive Liegruppe, τ ein involutiver Automorphismus von G und $T := (G^\tau)_0$. Mit τ bezeichnen wir auch das Differential von τ und dessen komplex-lineare Erweiterung auf \mathfrak{g} .

2.1 LEMMA. *Es gibt eine Cartaninvolution $\theta: G \rightarrow G$, die mit τ kommutiert.*

BEWEIS. Nach [9], S. 171 ist G' eine zusammenhängende, halbeinfache Liegruppe mit der Liealgebra $\mathfrak{g}'_0 := [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$. Es sei $\theta': G' \rightarrow G'$ eine Cartaninvolution, die mit $\tau|_{G'}$ kommutiert ([3] oder [4]). Ferner sei $\bar{\theta}: G \rightarrow G$ eine Cartaninvolution mit $\bar{\theta}|_{G'} = \theta'$ und K die zugehörige maximal kompakte Untergruppe von G . Dann ist $\tau(K) = K$. Sei \mathfrak{z}_0 das Zentrum von \mathfrak{g}_0 , \mathfrak{k}_0 die Liealgebra von K und \mathfrak{z}_0^- ein τ -invariantes Komplement von $\mathfrak{z}_0^+ := \mathfrak{z}_0 \cap \mathfrak{k}_0$ in \mathfrak{z}_0 . Setze

$$\mathfrak{p}_0 := \{x \in \mathfrak{g}'_0 \mid \theta'(x) = -x\} \oplus \mathfrak{z}_0^- .$$

Dann ist

$$G = K \cdot \exp(\mathfrak{p}_0) ,$$

und $\theta: G \rightarrow G$, $k \cdot \exp(x) \mapsto k \cdot \exp(-x)$, ($k \in K$, $x \in \mathfrak{p}_0$), ist die gesuchte Cartaninvolution.

Ab nun bezeichne stets θ eine Cartaninvolution von G wie in 2.1 oder deren Differential bzw. deren komplex-lineare Erweiterung auf \mathfrak{g} . K, \mathfrak{k}_0 , bzw. \mathfrak{p}_0 seien wie in dem Beweis von 2.1. Ist $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}_0$ bzw. $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ ein θ -invarianter Unterraum, so sei \mathfrak{b}^+ bzw. \mathfrak{b}^- der Eigenraum von $\theta|_{\mathfrak{b}}$ zum Eigenwert $+1$ bzw. -1 .

Entsprechende Notation verwenden wir für θ -invariante Untergruppen von G . \mathfrak{s}_0 sei der -1 Eigenraum von τ . Es gilt dann:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_0 &= \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{t}_0 \oplus \mathfrak{s}_0 \\ &= \mathfrak{t}_0^+ \oplus \mathfrak{s}_0^+ \oplus \mathfrak{t}_0^- \oplus \mathfrak{s}_0^- . \end{aligned}$$

Da G reduktiv ist, existiert eine nicht ausgeartete Bilinearform $(\cdot | \cdot)$ auf \mathfrak{g}_0 . Wir wollen diese θ - und τ -invariant wählen und so, dass die Einschränkung auf \mathfrak{k}_0 bzw. \mathfrak{p}_0 negativ bzw. positiv definit ist. Dann sind die obigen Zerlegungen von \mathfrak{g}_0 orthogonal. Setzen wir $(\cdot | \cdot)$ auf \mathfrak{g} fort (Bezeichnung weiterhin $(\cdot | \cdot)$), dann bleibt die Bilinearform nicht ausgeartet. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g}^* := \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) \\ x &\mapsto \lambda_x \end{aligned}$$

mit $\lambda_x(y) = (y | x)$ ist somit ein Isomorphismus, und das Bild von \mathfrak{g}_0 ist $\mathfrak{g}_0^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_0, \mathbb{R})$. Für die zu θ und τ dualen Abbildungen, die wir wieder mit den gleichen Buchstaben bezeichnen, gilt dann

$$\theta(\lambda_x) = \lambda_{\theta(x)}, \quad \tau(\lambda_x) = \lambda_{\tau(x)} .$$

Die Bilinearform $(\lambda_x | \lambda_y) := (x | y)$ auf \mathfrak{g}^* (bzw. \mathfrak{g}_0^*) ist nicht ausgeartet und invariant bei θ und τ .

2.2. DEFINITION. Ein *Cartanraum* von $(\mathfrak{g}_0, \tau, \theta)$ ist eine θ -invariante, maximale abelsche Unteralgebra \mathfrak{a}_0 von \mathfrak{s}_0 . \mathfrak{a}_0 heisst *fundamental*, wenn zusätzlich noch $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_0^+$ maximal ist.

Ab jetzt sei stets $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0^+ \oplus \mathfrak{a}_0^-$ ein fundamentaler Cartanraum von $(\mathfrak{g}_0, \tau, \theta)$, $\mathfrak{l}_0 := \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{a}_0^+)$ der Zentralisator von \mathfrak{a}_0^+ in \mathfrak{g}_0 und \mathfrak{h}_0^+ eine τ -invariante Cartan-Unteralgebra von \mathfrak{k}_0 , die \mathfrak{a}_0^+ enthält. Dann ist \mathfrak{l}_0 eine θ - und τ -invariante reduktive Liealgebra ([11, S. 42]) und $\mathfrak{h}_0^+ = \mathfrak{a}_0^+ \oplus \mathfrak{h}_0^+ \cap \mathfrak{t}_0$ eine Cartan-Unteralgebra von \mathfrak{l}_0^+ . Sei $\mathfrak{h}_0 := \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_0^+)$. Dann ist $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0^+ \oplus \mathfrak{h}_0^-$ eine θ - und τ -invariante (fundamentale) Cartan-Unteralgebra von \mathfrak{g}_0 und \mathfrak{l}_0 ([11, S. 99]). Die obigen Zerlegungen sind alle orthogonal bzgl. $(\cdot | \cdot)$. Dies überträgt sich entsprechend auf die Dualräume

$$\mathfrak{a}^{+*} \subset \mathfrak{a}^{+*} \oplus (\mathfrak{h}^+ \cap \mathfrak{t})^* = \mathfrak{h}^{+*} \subset \mathfrak{h}^{+*} \oplus \mathfrak{h}^{-*} = \mathfrak{h}^* .$$

Funktionale aus \mathfrak{a}^{+*} bzw. \mathfrak{h}^{+*} denken wir uns stets bzgl. dieser Zerlegung auf \mathfrak{h}^{+*} bzw. \mathfrak{h}^* fortgesetzt. Mit $i\mathfrak{a}_0^{+*}$ bzw. $i\mathfrak{h}_0^{+*}$ bezeichnen wir den \mathbb{R} -Vektorraum der Elemente von \mathfrak{a}^{+*} bzw. \mathfrak{h}^{+*} , die auf \mathfrak{a}_0^+ bzw. \mathfrak{h}_0^+ rein imaginäre Werte annehmen.

2.3. BEZEICHNUNGEN. Sei \mathfrak{c} eine abelsche Liealgebra und V ein endlichdimensionaler, vollreduzierbarer \mathfrak{c} Modul. Dann bezeichne $\Delta(V, \mathfrak{c})$ die Menge der nicht verschwindenden Wurzeln von \mathfrak{c} in V und $\varrho(V, \mathfrak{c})(b) := \frac{1}{2} \text{Spur } b_V$ ($b \in \mathfrak{c}$, $b_V \in \text{End}(V)$ die Abbildung $v \mapsto b \cdot v$). Für $\Gamma \subset \Delta(V, \mathfrak{c})$ sei

$$V(\Gamma) := \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} V_{\alpha}, \quad \varrho(\Gamma) := \varrho(V(\Gamma), \mathfrak{c}).$$

Wir wählen nun eine lineare Ordnung \succ in $i\mathfrak{a}_0^{+*}$ und erweitern sie verträglich auf $i\mathfrak{h}_0^{+*}$ bzw. $i\mathfrak{a}_0^{+*} \oplus \mathfrak{a}_0^{-*}$, d.h. für alle $\alpha \in i\mathfrak{h}_0^{+*}$ bzw. $\alpha \in i\mathfrak{a}_0^{+*} \oplus \mathfrak{a}_0^{-*}$ mit $\alpha | \mathfrak{a}^+ \succ 0$ gilt $\alpha \succ 0$. Die positiven Systeme

$$\Delta_c^+ \subset \Delta_c := \Delta(\mathfrak{f}, \mathfrak{h}^+), \quad \Delta_c^+(\mathfrak{l}) \subset \Delta_c(\mathfrak{l}) := \Delta(\mathfrak{l}^+, \mathfrak{h}^+),$$

$$\Delta^+(\mathfrak{f}, \mathfrak{a}^+) \subset \Delta(\mathfrak{f}, \mathfrak{a}^+), \quad \Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}^+) \subset \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}^+) \quad \text{und} \quad \Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \subset \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$$

seien bzgl. der so definierten Ordnung gebildet. Ferner setzen wir $\Delta := \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $\mathfrak{n} := \mathfrak{g}(\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}^+))$, $\mathfrak{b} := \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$. Dann sind \mathfrak{n} und \mathfrak{b} θ - und \mathfrak{h} -invariante Unteralgebren von \mathfrak{g} , \mathfrak{n} ist nilpotent und \mathfrak{b} ist parabolisch mit der Levi-Zerlegung $\mathfrak{b} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$.

Der Übersicht halber fassen wir die Beziehungen zwischen den verschiedenen Wurzelsystemen und den zugehörigen ϱ -Funktionalen in zwei Lemmata zusammen. Der Beweis sei dem Leser überlassen.

2.4 LEMMA.

a) $\Delta(\mathfrak{l}) := \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}) = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha | \mathfrak{a}^+ = 0\}$, und Δ ist die disjunkte Vereinigung

$$\Delta = \Delta(\mathfrak{l}) \cup \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) \cup (-\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{h})).$$

b) $\Delta_c(\mathfrak{l}) = \{\alpha \in \Delta_c \mid \alpha | \mathfrak{a}^+ = 0\}$, und Δ_c ist die disjunkte Vereinigung

$$\Delta_c = \Delta_c(\mathfrak{l}) \cup \Delta(\mathfrak{n}^+, \mathfrak{h}^+) \cup (-\Delta(\mathfrak{n}^+, \mathfrak{h}^+)).$$

c) $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}^+) = \{\alpha | \mathfrak{a}^+ \mid \alpha \in \pm \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{h})\}$

$$= \{\alpha | \mathfrak{a}^+ \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \text{ und } \alpha | \mathfrak{a}^+ \neq 0\}.$$

d) $\Delta(\mathfrak{f}, \mathfrak{a}^+) = \{\alpha | \mathfrak{a}^+ \mid \alpha \in \pm \Delta(\mathfrak{n}^+, \mathfrak{h}^+)\}$.

Wir wählen nun $\Delta^+(\mathfrak{l})$ θ -invariant und so, dass $\varrho_c(\mathfrak{l}) := \varrho(\Delta_c^+(\mathfrak{l}))$ dominant ist. Dann ist $\Delta^+ := \Delta^+(\mathfrak{l}) \cup \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{h})$ ein θ -invariantes positives System in Δ . Ist α aus einem der obigen positiven Systeme, $\alpha | \mathfrak{n}^+ \neq 0$, dann ist auch $-\tau(\alpha)$ aus diesem positiven System. Es sei $\varrho := \varrho(\Delta^+)$ und $\varrho(\mathfrak{l}) := \varrho(\Delta^+(\mathfrak{l}))$.

2.5 LEMMA.

- a) $\varrho(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) | \mathfrak{h}^- = \varrho | \mathfrak{h}^- = \varrho(\mathfrak{l}) | \mathfrak{h}^- = 0$.
- b) $\varrho(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) = \varrho(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}^+) = \varrho(\mathfrak{n}, \mathfrak{a}^+) = : \varrho(\mathfrak{n}) \in \mathfrak{ia}_0^{+*}$,
 $\varrho(\mathfrak{n}^+, \mathfrak{h}^+) = \varrho(\mathfrak{n}^+, \mathfrak{a}^+) = : \varrho(\mathfrak{n}^+) \in \mathfrak{ia}_0^{+*}$.
- c) $\varrho(\mathfrak{n})$ bzw. $\varrho(\mathfrak{l})$ ist die orthogonale Projektion von ϱ auf \mathfrak{ia}_0^{+*} bzw. $i(\mathfrak{h}_0^+ \cap \mathfrak{t}_0)^*$, und es gilt

$$\varrho = \varrho(\mathfrak{n}) + \varrho(\mathfrak{l}) .$$

- d) $\varrho(\mathfrak{n}^+)$ bzw. $\varrho_c(\mathfrak{l})$ ist die orthogonale Projektion von ϱ_c auf \mathfrak{ia}_0^{+*} bzw. $i(\mathfrak{h}_0^+ \cap \mathfrak{t}_0)^*$, und es gilt

$$\varrho_c = \varrho(\mathfrak{n}^+) + \varrho_c(\mathfrak{l}) .$$

- e) $\varrho(\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})) | \mathfrak{a}^+ = \varrho(\mathfrak{n})$.

3. Die fundamentale Reihe von G/T .

Es sei $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{t}}$ der Zentralisator von \mathfrak{t} in $U(\mathfrak{g})$. Wir definieren dann einen Homomorphismus $\tilde{\xi}: U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{t}} \rightarrow U(\mathfrak{l})^{\mathfrak{t}}$ mit $u - \tilde{\xi}(u) \in \mathfrak{n}U(\mathfrak{g})$ für alle $u \in U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{t}}$ wie in [10, S. 10]. Ist $\tilde{\mathfrak{l}}_0$ das orthogonale Komplement von \mathfrak{a}_0^+ in \mathfrak{l}_0 , dann ist $\tilde{\mathfrak{l}}$ reduktiv und $\mathfrak{l} = \mathfrak{a}^+ \oplus \tilde{\mathfrak{l}}$. Da \mathfrak{a}^+ in dem Zentrum von \mathfrak{l} liegt, ist $U(\mathfrak{l})^{\mathfrak{t}} \cong U(\mathfrak{a}^+) \otimes U(\tilde{\mathfrak{l}})^{\mathfrak{t}}$. Wählen wir eine τ -invariante maximale abelsche Unterálgebra $\mathfrak{d}_0 \subset \tilde{\mathfrak{l}}_0^- = \mathfrak{l}_0^-$, die \mathfrak{a}_0^- enthält, dann ist $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}^- \oplus \mathfrak{d} \cap \mathfrak{t}$ und $U(\mathfrak{d}) = U(\mathfrak{a}^-) \oplus (\mathfrak{d} \cap \mathfrak{t})U(\mathfrak{d})$. Da \mathfrak{d} abelsch ist, ist die dadurch definierte Projektion

$$\text{pr} : U(\mathfrak{d}) \rightarrow U(\mathfrak{a}^-)$$

ein Homomorphismus. Erweitern wir die auf \mathfrak{a}_0^-* gegebene Ordnung verträglich auf \mathfrak{d}_0^* und setzen $\tilde{\mathfrak{n}}_0 := \tilde{\mathfrak{l}}_0(\Delta^+(\tilde{\mathfrak{l}}_0, \mathfrak{d}_0))$, wobei $\Delta^+(\tilde{\mathfrak{l}}_0, \mathfrak{d}_0)$ das zugehörige positive System in $\Delta(\tilde{\mathfrak{l}}_0, \mathfrak{d}_0)$ ist, dann haben wir eine Iwasawa-Zerlegung $\tilde{\mathfrak{l}} = \tilde{\mathfrak{l}}^+ \oplus \mathfrak{d} \oplus \tilde{\mathfrak{n}}$ und dementsprechend $U(\tilde{\mathfrak{l}}) = U(\mathfrak{d}) \oplus [U(\tilde{\mathfrak{l}})^{\mathfrak{t}} + \tilde{\mathfrak{n}}U(\tilde{\mathfrak{l}})]$.

$$\tilde{\varphi} : U(\tilde{\mathfrak{l}})^{\mathfrak{t}} \rightarrow U(\mathfrak{d})$$

sei der nach der obigen Zerlegung von $U(\tilde{\mathfrak{l}})$ definierte kanonische Homomorphismus. Identifizieren wir $U(\mathfrak{a})$ bzw. $U(\mathfrak{l})^{\mathfrak{t}}$ mit $U(\mathfrak{a}^+) \otimes U(\mathfrak{a}^-)$ bzw. $U(\mathfrak{a}^+) \otimes U(\tilde{\mathfrak{l}})^{\mathfrak{t}}$, dann ist die Abbildung

$$\varphi_{\mathfrak{g}} := (1 \otimes \text{pr}) \circ (1 \otimes \varphi) \circ \tilde{\xi} : U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{t}} \rightarrow U(\mathfrak{a})$$

ein Homomorphismus.

3.1 LEMMA. Sei $\mathfrak{m} := \{x \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}) \mid (x | y) = 0 \text{ für alle } y \in \mathfrak{a}\}$. Für jedes $u \in U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{t}}$ gibt es genau ein $u_0 \in U(\mathfrak{a})$ mit

$$u - u_0 \in U(\mathfrak{g})\mathfrak{t}^+ + (\mathfrak{m} + \mathfrak{g}(\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})))U(\mathfrak{g}).$$

Die Abbildung $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{t}} \rightarrow U(\mathfrak{a})$, $u \mapsto u_0$ ist ein Homomorphismus und es gilt

$$u_0 = \varphi_{\mathfrak{g}}(u).$$

BEWEIS. Ist $u \in U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{t}}$, so folgt es leicht aus [1, S. 291], dass es genau ein $u_0 \in U(\mathfrak{a})$ gibt mit

$$u - u_0 \in U(\mathfrak{g})\mathfrak{t}^+ + (\mathfrak{m} + \mathfrak{g}(\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})))U(\mathfrak{g}).$$

Sei $\alpha \in \Delta^+(\tilde{\mathfrak{l}}, \mathfrak{d})$, $\alpha|_{\mathfrak{a}^-} \neq 0$. Definiere $\beta \in \mathfrak{a}^*$ durch $\beta|_{\mathfrak{a}^+} := 0$, $\beta|_{\mathfrak{a}^-} := \alpha|_{\mathfrak{a}^-}$. Für $x \in \tilde{\mathfrak{l}}_{\alpha}$, $h \in \mathfrak{a}$ gilt dann $[h, x] = \beta(h)x$ und somit $\beta \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Aus der Definition der Ordnung auf $ia_0^{+*} \oplus a_0^{-*}$ und \mathfrak{d}_0^* folgt sogar $\beta > 0$ und daher $x \in \mathfrak{g}(\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}))$. Daraus ergibt sich $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}(\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}))$. Da $\mathfrak{d} \cap \mathfrak{t} \subset \mathfrak{m}$, $\tilde{\mathfrak{l}}^+ \subset \mathfrak{t}^+$ und $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}(\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}))$, folgt

$$u - \varphi_{\mathfrak{g}}(u) \in U(\mathfrak{g})\mathfrak{t}^+ + (\mathfrak{m} + \mathfrak{g}(\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})))U(\mathfrak{g})$$

und somit, wegen der Eindeutigkeit, $u_0 = \varphi_{\mathfrak{g}}(u)$. Da $\varphi_{\mathfrak{g}}$ ein Homomorphismus ist, folgt nun das Lemma.

Mit \hat{K} bezeichnen wir die Menge aller Äquivalenzklassen irreduzibler unitärer Darstellungen von K und mit $\hat{K}(T^+) \subset \hat{K}$ die Menge der Klassen, die in der Zerlegung von $L^2(K/T^+) = \text{Ind}_{T^+}^K(1_{T^+})$ vorkommen. Nach dem Reziprozitätssatz von Frobenius sind dies genau die Darstellungen von K , die einen unter T^+ invarianten Vektor ungleich Null enthalten. Ist K zusammenhängend, dann können wir die Äquivalenzklassen aus \hat{K} mit den zugehörigen höchsten Gewichten aus $i\mathfrak{h}_0^{+*}$ identifizieren. Aus dem Satz von E. Cartan und S. Helgason ([11, S. 209] oder [2, S. 75], siehe auch [5, S. 38]) folgt leicht:

3.2. LEMMA. Sei K zusammenhängend und $Z^+ := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$. Dann ist

$$\hat{K}(T^+) = \left\{ \mu \in \hat{K} \mid \mu \in ia_0^{+*} \quad \text{und} \quad \forall \alpha \in \Delta^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{a}^+) : \frac{(\mu|\alpha)}{(\alpha|\alpha)} \in Z^+ \right\} \subset i\mathfrak{h}_0^{+*}.$$

Für $\nu \in ia_0^{+*}$ definieren wir nun $\mu(\nu) \in ia_0^{+*}$ durch

$$\mu(\nu) := \nu|_{\mathfrak{a}^+} + \varrho(\mathfrak{n}) - 2\varrho(\mathfrak{n}^+).$$

Ferner sei Λ die Menge aller $\nu \in ia_0^{+*}$, die folgende zwei Bedingungen erfüllen:

- Es gibt ein $\pi \in \hat{K}(T^+)$ mit dem höchsten Gewicht $\mu(\nu)$.
- Für alle $\alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a}^+)$ ist $(\nu|_{\mathfrak{a}^+} + \varrho(\mathfrak{n})|\alpha) \geq 0$.

In dem folgenden Satz fassen wir die Elemente von $U(\mathfrak{g})$ als Differentialoperatoren auf G/T auf, indem wir $xf(s) := (d/dt)f(\exp(-tx)s)_{t=0}$, $x \in \mathfrak{g}_0$, $s \in G/T$, $f \in \mathcal{C}^\infty(G/T)$, auf $U(\mathfrak{g})$ fortsetzen.

3.3 SATZ. *Es sei G zusammenhängend. Zu jedem $\nu \in \Lambda$ gibt es dann eine Funktion $\psi_\nu \in \mathcal{C}^\infty(G/T)$ mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Der von allen Funktionen*

$$G/T \rightarrow \mathbb{C}, \quad s \mapsto \psi_\nu(k^{-1}s), \quad k \in K,$$

aufgespannte K -Modul ist irreduzibel und hat das höchste Gewicht $\mu(\nu)$.

b) *Der $(U(\mathfrak{g}), K)$ -Modul $U(\mathfrak{g})\psi_\nu$ ist zulässig, unzerlegbar, und es gilt $m(\mu(\nu), U(\mathfrak{g})\psi_\nu) = 1$.*

c) *Für alle $u \in U(\mathfrak{g})^!$ gilt*

$$u \cdot \psi_\nu = \varphi_{\mathfrak{g}}(u)(\nu + \varrho(\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})))\psi_\nu.$$

BEWEIS. Es sei Z das Zentrum von G und \mathfrak{z}_0 das Zentrum von \mathfrak{g}_0 . Dann ist $G = Z \cdot G'$ und $Z = Z^+ \exp(\mathfrak{z}_0^-)$. Sei S aus $\mu(\nu)$. Für $z \in Z^+$ ist dann $S(z) = \chi(z)\text{id}$, wobei $\chi: Z^+ \rightarrow \mathbb{C}^*$ ein Homomorphismus ist, den wir auf ganz Z durch

$$\chi_\nu(z \cdot \exp(x+y)) := \chi(z) \exp(\nu(x)),$$

$z \in Z^+$, $x \in \mathfrak{z}_0^- \cap \mathfrak{s}_0$, $y \in \mathfrak{z}_0^- \cap \mathfrak{t}_0$, fortsetzen können. Nun existiert eine Funktion $\psi'_\nu \in \mathcal{C}^\infty(G'/(G' \cap T)_0)$ mit den im Satz aufgeführten Eigenschaften in Bezug auf G' , $\tau|_{G'}$, $\mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{g}'_0$ und $\nu|_{\mathfrak{a}_0 \cap \mathfrak{g}'_0}$, siehe [1]. Definiere $\tilde{\psi}_\nu: G \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\tilde{\psi}_\nu(za) := \chi_\nu(z^{-1})\psi'_\nu(a(G' \cap T)_0), \quad z \in Z, \quad a \in G'.$$

Dann sieht man leicht, dass $\tilde{\psi}_\nu(at) = \tilde{\psi}_\nu(a)$ für alle $a \in G$ und $t \in T$ gilt. Damit ist die Funktion

$$G/T \rightarrow \mathbb{C}, \quad aT \mapsto \psi_\nu(aT) := \tilde{\psi}_\nu(a)$$

wohldefiniert, und diese erfüllt die Bedingungen des Satzes.

3.4 BEZEICHNUNGEN. Es sei weiterhin G zusammenhängend. Nach 3.3 Teil b) folgt, dass es bis auf Isomorphie genau einen irreduziblen $(U(\mathfrak{g}), K)$ -Teilmodul von $U(\mathfrak{g})\psi_\nu$ gibt, der $\mu(\nu)$ (genau einmal) enthält. Diesen bezeichnen wir mit $E_\nu = E_\nu^G$.

4. E_ν als holomorph induzierte Darstellung.

Die Notation sei wie früher. Ferner sei

$$L := \{a \in G \mid \text{Ad}(a)|_{\mathfrak{l}}, \text{Ad}(a)|_{\mathfrak{n}} \subset \mathfrak{l}\}.$$

Dann ist L eine θ -invariante reductive Liegruppe mit der Liealgebra \mathfrak{l}_0 und der Cartaninvolution $\theta_L := \theta|_L$ ([9, S. 132]).

4.1. LEMMA. L ist der Zentralisator von \mathfrak{a}_0^+ in G . Insbesondere ist L τ -invariant. Ist G zusammenhängend, dann ist L zusammenhängend.

BEWEIS. Es ist klar, dass $Z_G(\mathfrak{a}_0^+) \subset L$. Sei L_c die komplexe zusammenhängende Liegruppe in $G_c = \text{Int}(\mathfrak{g})$ zu der Liealgebra $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{l})$. Dann ist $L = \{a \in G \mid \text{Ad}(a) \in L_c\}$ ([9, S. 132]). L_c ist der Stabilisator von \mathfrak{a}^+ in G_c , und das ergibt die erste Behauptung. Da θ_L eine Cartaninvolution von L ist, ist

$$L = L^+ \exp(\mathfrak{l}_0^-) = Z_K(\mathfrak{a}_0^+) \exp(\mathfrak{l}_0^-).$$

Die Theorie der kompakten Lieschen Gruppen liefert, dass mit K auch $Z_K(\mathfrak{a}_0^+)$ zusammenhängend ist. Daraus folgt die letzte Behauptung.

Es sei $\nu \in \Lambda$ und π eine Darstellung von K mit einem höchsten Gewicht $\mu(\nu)$. π enthält das Gewicht $\mu(\nu)$ genau einmal ([9, S. 224]), es gibt also genau eine irreduzible Darstellung π^0 von L^+ mit einem höchsten Gewicht $\mu(\nu)$, die in $\pi|_{L^+}$ enthalten ist.

4.2 LEMMA. Die Notation sei wie eben. Dann ist π^0 ein Charakter.

BEWEIS. Es sei $H^+ := Z_{L^+}(\mathfrak{h}_0^+)$ die Cartan-Untergruppe von L^+ zu \mathfrak{h}_0^+ , $W(L^+, H^+) = N_{L^+}(\mathfrak{h}_0^+)/H^+$ die Weylgruppe von H^+ in L^+ und

$$R = R^L := \{w \in W(L^+, H^+) \mid w(\Delta_c^+(\mathfrak{l})) = \Delta_c^+(\mathfrak{l})\}$$

die R -Gruppen zu L . Dann ist $R \cdot \mu(\nu)$ die Menge der höchsten Gewichte von π^0 ([9, S. 224]). Wir zeigen, dass $R \cdot \mu(\nu) = \{\mu(\nu)\}$. Dann ist nämlich $\pi^0|_{L_0^+}$ irreduzibel und, da \mathfrak{a}_0^+ in dem Zentrum von \mathfrak{l}_0^+ liegt, folgt hieraus, dass $\pi^0|_{L_0^+}$ eindimensional ist und somit die Behauptung des Lemmas. Sei also $w \in R$ und $k \in N_{L^+}(\mathfrak{h}_0^+)$ mit $\text{Ad}(k)|_{\mathfrak{h}_0^+} = w$. Aus 4.1 folgt $\text{Ad}(k)|_{\mathfrak{a}_0^+} = 1$. Sei $x \in \mathfrak{h}_0^+ \cap \mathfrak{t}_0$, $y \in \mathfrak{a}_0^+$. Dann ist

$$(y | \text{Ad}(k)x) = (\text{Ad}(k^{-1})y | x) = (y | x) = 0.$$

Daraus ergibt sich $\text{Ad}(k)x \in \mathfrak{h}_0^+ \cap \mathfrak{t}_0$, und da $\mu(\nu) \in i\alpha_0^+ *$ gilt, erhalten wir $w \cdot \mu(\nu) = \mu(\nu)$.

Es sei $\omega_1: L^+ \rightarrow \mathbb{C}^\times$ der unitäre Charakter

$$\omega_1(a) := [\det(\text{Ad}(a)|_{\mathfrak{n}^-})]^{-1}, \quad a \in L^+,$$

und $\pi^L := \pi^0 \omega_1$. Dann ist π^L ein unitärer Charakter von L^+ zu dem höchsten Gewicht $\mu(v) - 2\varrho(\mathfrak{n}^-, \mathfrak{h}^+) \in \mathfrak{ia}_0^{+*}$. Sei G zusammenhängend. Ersetzen wir überall im Paragraphen 3 G durch L , v durch $v^L \in \mathfrak{ia}_0^*$ mit

$$v^L|_{\mathfrak{a}^+} := \mu(v) - 2\varrho(\mathfrak{n}^-, \mathfrak{h}^+), \quad v^L|_{\mathfrak{a}^-} := v|_{\mathfrak{a}^-},$$

so sehen wir, dass E_{v^L} wohldefiniert ist. Ferner gilt:

4.3. LEMMA. Sei $\Delta^+(\mathfrak{l}, \mathfrak{a})$ bzgl. unserer früherer Ordnung auf $\mathfrak{ia}_0^{+*} \oplus \mathfrak{a}_0^{-*}$ definiert. Dann ist

$$\varrho(\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})|_{\mathfrak{a}^-}) = \varrho(\Delta^+(\mathfrak{l}, \mathfrak{a})|_{\mathfrak{a}^-}).$$

BEWEIS. Aus der Definition von $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ folgt, dass ein $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ mit $\alpha|_{\mathfrak{a}^+} \neq 0$ genau dann in $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ liegt, wenn $\theta\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Da $\mathfrak{g}_{\theta\alpha} = \theta(\mathfrak{g}_\alpha)$, und somit $\dim(\mathfrak{g}_\alpha) = \dim(\mathfrak{g}_{\theta\alpha})$, gilt, folgt

$$\begin{aligned} \varrho(\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})|_{\mathfrak{a}^-}) &= \frac{1}{2}(\varrho(\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})) - \theta\varrho(\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}))) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha|_{\mathfrak{a}^+} \neq 0} (\dim(\mathfrak{g}_\alpha)\alpha)|_{\mathfrak{a}^-} = \varrho(\Delta^+(\mathfrak{l}, \mathfrak{a})|_{\mathfrak{a}^-}). \end{aligned}$$

4.4 SATZ. Es sei G zusammenhängend und $X_v := X^G(\mathfrak{b}, E_{v^L}^L, \pi)$ die von L nach G (über \mathfrak{b}) holomorph induzierte Darstellung von $E_{v^L}^L$. ([8, S. 247]). Dann ist E_v^G infinitesimal äquivalent zu X_v .

BEWEIS. Es genügt zu zeigen, dass die Operation von $U(\mathfrak{g})^\dagger$ auf den eindimensionalen Modul $\text{Hom}_K(\pi, X_v)$ und $\text{Hom}_K(\pi, E_v^G)$ die gleiche ist. Es sei $\tilde{\xi}: U(\mathfrak{g})^\dagger \rightarrow U(\mathfrak{l})^\dagger$ wie vor 3.1, $\eta: U(\mathfrak{l}) \rightarrow U(\mathfrak{l})$ der Homomorphismus, der

$$\mathfrak{l} \rightarrow U(\mathfrak{l}), \quad x \mapsto x + \text{Spur}(\text{ad}(x)|_{\mathfrak{n}})$$

fortsetzt und

$$\xi := \eta \circ \tilde{\xi}: U(\mathfrak{g})^\dagger \rightarrow U(\mathfrak{l})^\dagger.$$

Nach Definition operiert $U(\mathfrak{g})^\dagger$ auf $\text{Hom}_K(\pi, X_v)$ durch den Homomorphismus

$$u \mapsto \varphi_1(\xi(u))(v^L + \varrho(\Delta^+(\mathfrak{l}, \mathfrak{a}))).$$

Für alle $h \in \mathfrak{h}^+$ gilt $\text{Spur}(\text{ad}(h)|_{\mathfrak{n}}) = 2\varrho(\mathfrak{n})(h)$, ausserdem ist

$$\mu(v) - 2\varrho(\mathfrak{n}^-, \mathfrak{h}^+) + 2\varrho(\mathfrak{n}) = (v + \varrho(\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}))|_{\mathfrak{a}^+}),$$

aus 4.3 und der Definition von φ_g folgt also

$$\varphi_1(\xi(u))(v^L + \varrho(\Delta^+(\mathfrak{l}, \mathfrak{a}))) = \varphi_g(u)(v + \varrho(\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}))),$$

und somit die Behauptung.

4.5 SATZ. Sei G zusammenhängend und $v \in \Lambda$. Dann ist $\mu(v)$ der einzige minimale K -Faktor von E_v .

BEWEIS. Es sei $\delta \in \hat{K}$ so, dass $E_v(\delta) \neq 0$. Nach [8, S. 250] gibt es eine Summe σ von Wurzeln von \mathfrak{h}^+ in \mathfrak{b} mit $\delta = \mu(v) + \sigma$. Es sei $\sigma_1 := \frac{1}{2}(\sigma + \tau\sigma) \in i(\mathfrak{h}_0^+ \cap \mathfrak{t}_0)^*$ und $\sigma_2 := \frac{1}{2}(\sigma - \tau\sigma) \in i\mathfrak{a}_0^*$. Da δ dominant bzgl. Δ_c^+ ist, folgt für alle $\alpha \in \Delta_c^+(\mathfrak{l}) \subset \Delta_c^+$, dass $0 \leq (\mu(v) + \sigma | \alpha) = (\sigma_1 | \alpha)$ gilt, also $(\sigma_1 | \varrho_c(\mathfrak{l})) \geq 0$. σ_2 liegt in $i\mathfrak{a}_0^*$ und ist eine halbe Summe von Wurzeln aus $\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a}^+)$. Aus der Definition von Λ folgt

$$(\mu(v) + 2\varrho_c | \sigma_2) = (v | \mathfrak{a}^+ + \varrho(\mathfrak{n}) | \sigma_2) \geq 0.$$

Man bekommt:

$$\begin{aligned} \|\delta\| - \|\mu(v)\| &= 2(\mu(v) + 2\varrho_c | \sigma) + (\sigma | \sigma) \\ &= 2(\mu(v) + 2\varrho_c | \sigma_2) + 4(\varrho_c(\mathfrak{l}) | \sigma_1) + (\sigma | \sigma) \geq 0 \end{aligned}$$

und das ist $=0$ genau dann, wenn $\sigma = 0$.

Bis jetzt ist E_v^G nur für zusammenhängendes G definiert. Mit 4.5 lässt sich diese Einschränkung leicht beheben.

4.6 LEMMA. Es sei $v \in \Lambda$, $\pi \in \hat{K}$ mit einem höchsten Gewicht $\mu(v)$ und $E_v^G := \text{Ind}_{\mathfrak{g}, \hat{K}_0}^{\mathfrak{g}, K} (E_v^{G_0})$ wie in [9, S. 25] definiert. Dann ist π ein minimaler K -Faktor von E_v^G und es gilt $m(\pi, E_v^G) = 1$.

BEWEIS. Für $\delta \in \hat{K}$ gilt nach [9, S. 25]:

$$m(\delta, E_v^G) = \sum_{\sigma \in \hat{K}_0} m(\sigma, \delta) m(\sigma, E_v^{G_0}).$$

Sei also $\delta \in \hat{K}$ so, dass die linke Seite ungleich Null ist. Dann gibt es $\sigma \in \hat{K}_0$ mit $m(\sigma, \delta) \neq 0$, $m(\sigma, E_v^{G_0}) \neq 0$. Es folgt

$$\|\delta\| = \|\sigma\| \geq \|\mu(v)\| = \|\pi\|$$

und nach 4.5 gilt $=$ genau dann, wenn $\sigma = \mu(v)$. Da $m(\mu(v), \pi) = 1$ ist, folgt die Behauptung.

4.7 DEFINITION. Für $v \in \Lambda$ und $\pi \in \hat{K}$ sei $E_{\pi, v} = E_{\pi, v}^G$ der eindeutig bestimmte irreduzible Teilmodul von E_v^G , der π enthält. Die Gesamtheit dieser Moduln $E_{\pi, v}$ nennen wir die (infinitesimale) fundamentale Reihe von G/T .

4.8 BEISPIEL. Es sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^+$ und $v \in \Lambda$ mit $(v | \alpha) > 0$ für alle $\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Dann ist $E_v^{G_0}$ infinitesimal äquivalent zu einem irreduziblen Summanden in $L^2(G_0/T)$ und somit auch unitär. Dies folgt leicht aus der Definition von ψ_v und der entsprechende Tatsache für halbeinfache Gruppen (siehe [6, S. 507] und [1, S.

290]). Daraus ergibt sich, dass $E_{\pi, \nu}$ unitär und infinitesimal äquivalent zu einem irreduziblen Summanden in $L^2(G/T)$ ist. Insbesondere ist die diskrete Reihe von G/T nicht leer.

5. Die Langlands-Parameter für $E_{\pi, \nu}$.

Für alle $C \in \mathbb{R}$ setzen wir $\Lambda_C := \{v \in \Lambda \mid \forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{h}) : (v|\alpha^+|\alpha) > C\}$.

5.1 LEMMA. Sei $C_1 := \max \{(\varrho(\mathfrak{l}) - 2\varrho_c(\mathfrak{l})|\alpha) \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{h})\}$. Dann ist $C_1 \geq 0$ und für alle $v \in \Lambda_{C_1}$ gilt:

- $(\mu(v) + 2\varrho_c - \varrho|\alpha) > 0$ für alle $\alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{h})$,
- $\mu(v) + 2\varrho_c$ ist dominant bzgl. Δ^+ .

BEWEIS. Die erste Behauptung folgt daraus, dass mit α auch $-\tau\alpha$ in $\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{h})$ liegt und

$$(\varrho(\mathfrak{l}) - 2\varrho_c(\mathfrak{l})|\alpha) = -(\varrho(\mathfrak{l}) - 2\varrho_c(\mathfrak{l})|-\tau\alpha).$$

- Es ist $\mu(v) + 2\varrho_c - \varrho = v|\alpha^+ + 2\varrho_c(\mathfrak{l}) - \varrho(\mathfrak{l})$. Für $\alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{h})$ gilt somit

$$(\mu(v) + 2\varrho_c - \varrho|\alpha) = (v|\alpha^+|\alpha) + (2\varrho_c(\mathfrak{l}) - \varrho(\mathfrak{l})|\alpha) > C_1 - C_1 = 0.$$

- Ist $\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{l})$, dann ist $(\mu(v) + 2\varrho_c|\alpha) = 2(\varrho_c(\mathfrak{l})|\alpha) \geq 0$ nach der Wahl von $\Delta^+(\mathfrak{l})$. Ist $\alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{h})$, dann gilt nach Teil a:

$$(\mu(v) + 2\varrho_c|\alpha) = (\mu(v) + 2\varrho_c - \varrho|\alpha) + (\varrho|\alpha) > 0, \text{ da } (\varrho|\alpha) > 0.$$

Zu der trivialen Darstellung von L^+ mit höchstem Gewicht 0 wählen wir die imaginären, paarweise orthogonalen Wurzeln $\beta_1, \dots, \beta_s \in \Delta^+(\mathfrak{l}) \subset \Delta^+$ wie in Proposition 4.1 in [10] (siehe auch [9, S. 239]). Dann gehören die β_1, \dots, β_s auch zu π^L, π^L wie im Paragraphen 4 gewählt. Setze

$$c_j := -2 \frac{(2\varrho_c(\mathfrak{l}) - \varrho(\mathfrak{l})|\beta_j)}{(\beta_j|\beta_j)}, \quad j = 1, \dots, s.$$

$$C := \max \{C_1, \max \{(\varrho(\mathfrak{l}) - 2\varrho_c(\mathfrak{l}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s c_j \beta_j|\alpha) \mid \alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{h})\}\} \geq 0.$$

5.2 LEMMA. Es sei $v \in \Lambda_C$ und $\lambda \in \mathfrak{ih}_0^{+*}$ zu dem höchsten Gewicht $\mu(v)$ wie in Proposition 4.1 in [10] gewählt. Dann ist

$$\lambda = \mu(v) + 2\varrho_c - \varrho + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s c_j \beta_j.$$

BEWEIS. Aus der Definition von Δ^+ folgt, dass eine Wurzel $\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{l})$ genau dann nicht kompakt bzw. einfach ist, wenn α als Element von Δ^+ diese Eigenschaften besitzt. Dies benutze man, um zu zeigen, dass β_1, \dots, β_s als Elemente von Δ^+ die in Proposition 4.1 aufgeführten Nebenbedingungen erfüllen. Sei $\tilde{\lambda}$ die rechte Seite der obigen Gleichung. Wegen

$$(\mu(v) + 2\varrho_c - \varrho | \beta_j) = (2\varrho_c(\mathfrak{l}) - \varrho(\mathfrak{l}) | \beta_j)$$

und der Eindeutigkeitsaussage in Proposition 4.1, genügt es also zu zeigen, dass erstens $\tilde{\lambda}$ dominant ist, und zweitens, dass jede imaginäre Wurzel, die auf $\tilde{\lambda}$ orthogonal steht, ein nicht verschwindendes Skalarprodukt mit einem der β_j hat. Es sei also $\alpha \in \Delta^+$. Dann gilt

$$(\tilde{\lambda} | \alpha) = (v | \alpha^+ | \alpha) + \left(2\varrho_c(\mathfrak{l}) - \varrho(\mathfrak{l}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s c_j \beta_j | \alpha \right).$$

Für $\alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{h})$ ist die rechte Seite echt grösser als Null nach der Definition von C . Für $\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{l})$ ist sie nicht negativ nach der Wahl von β_1, \dots, β_s . Insbesondere folgt aus $(\tilde{\lambda} | \alpha) = 0$, dass $\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{l})$. Die zweite Behauptung folgt aus der Wahl von β_1, \dots, β_s .

Wir halten C, v, λ wie in 5.2 fest. Wir setzen:

$$\mathfrak{l}^1 := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{(\alpha | \lambda) = 0} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{n}^1 := \bigoplus_{(\alpha | \lambda) > 0} \mathfrak{g}_\alpha, \quad \mathfrak{b}^1 := \mathfrak{l}^1 \oplus \mathfrak{n}^1,$$

und

$$L^1 := \{a \in G \mid \text{Ad}(a)\mathfrak{l}^1 \subset \mathfrak{l}^1, \text{Ad}(a)\mathfrak{n}^1 \subset \mathfrak{n}^1\}.$$

Dann ist L^1 eine quasi-zerfallende reduktive Liegruppe mit Cartaninvolution $\theta | L^1$. \mathfrak{b}^1 ist eine θ -invariante parabolische Unteralgebra. Aus $(\alpha | \lambda) = 0$ folgt $\alpha \in \Delta(\mathfrak{l})$. Also gilt $\mathfrak{l}^1 \subset \mathfrak{l}$. Aus der Definition von \mathfrak{n}^1 ergibt sich $\mathfrak{n}^1 = \mathfrak{n}^1 \cap \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$. Wenden wir die obigen Konstruktion von \mathfrak{b}^1 auf L und $\mu(v) - 2\varrho(\mathfrak{n}^-, \mathfrak{h}^+)$ statt G und $\mu(v)$ an, so erhalten wir die parabolische Unteralgebra $\mathfrak{b}^1 \cap \mathfrak{l} = \mathfrak{l}^1 \oplus \mathfrak{n}^1 \cap \mathfrak{l}$ in \mathfrak{l} . Für zusammenhängendes G liefert deshalb Induktion in Stufen ([8, S. 247]), Lemma 4.9 in [8] und 4.4 die Langlands-Parameter für E_v^G , $\bar{v} \in \mathcal{A}_C$, wenn diese für alle E_v^L bestimmt haben.

\mathfrak{h}_0^- und die Cayley-Transformierten von β_1, \dots, β_s spannen eine maximale abelsche, τ -invariante (da $\beta_j | \alpha^+ = 0$) Unteralgebra von \mathfrak{l}_0^- auf ([7, S. 6] oder [5, S. 26]). Wir können annehmen, dass die Algebra \mathfrak{d}_0 aus dem Beweis von 3.1 hiermit übereinstimmt. Dann ist $J := Z_{L^1}(\mathfrak{d}_0)$ eine Cartan-Untergruppe in L^1 , L und G mit $J^- = D = \exp(\mathfrak{d}_0)$.

5.3 BEZEICHNUNGEN. Es sei $Q = MDU$ eine spitzenförmige parabolische Untergruppe von G mit $MD = Z_G(D)$ und $Y = (X, \bar{v})$ ein M -regulärer Charakter

von J^+ ([8, S. 233]). Mit $V(X)=V^M(X)$ bezeichnen wir die diskrete Darstellung von M zu X ([8, S. 233]) und mit $I(Y)=I^G(Y)$ die Darstellung $I(Y)=\text{Ind}_Q^G(V(X)\otimes\tilde{v}\otimes 1)$. $F(X)=F^G(X)$ sei die Menge der minimalen K -Faktoren von $I(Y)$ ([8, S. 243]). Für $\delta \in F(X)$ sei $I(Y; \delta)$ die (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte irreduzible Teildarstellung von $I(Y)$, deren Einschränkung auf K die Darstellung δ enthält. Eine entsprechende Bezeichnung benutzen wir für L^1 bzw. L statt G .

5.4 SATZ. Sei $v \in A_C$, $\pi \in \hat{K}$ mit einem höchsten Gewicht $\mu(v)$ und $Q=MDU$ eine spitzenförmige parabolische Untergruppe von G mit $MD=Z_G(D)$. Dann gilt:

a) Ist π^0 der Charakter auf L^+ zu dem höchsten Gewicht $\mu(v)$, der in $\pi|L^+$ enthalten ist und λ wie in 5.2, dann ist $X=X^G:=(\pi^0|J^+, \lambda|j^+)$ ein M -regulärer Charakter von J^+ und $F^G(X)=\{\pi\}$.

b) Es sei \tilde{n} wie in dem Beweis von 3.1, $\gamma \in \mathfrak{d}^*$ sei durch

$$\gamma|a^- := v|a^-, \quad \gamma|\mathfrak{d} \cap \mathfrak{t} = -\varrho(\tilde{n}, \mathfrak{d})|\mathfrak{d} \cap \mathfrak{t}$$

definiert, und $Y=Y^G:=(X, \gamma)$. Dann ist $E_{\pi, v}=I(Y, \pi)$.

BEWEIS. a) Es sei $\omega(a):=[\det(\text{Ad}(a)|\mathfrak{n}^1 \cap \mathfrak{p})]^{-1}$, $a \in L^1 \cap K$. Dann ist $\pi^0\omega$ eine feine Darstellung von $L^1 \cap K$ mit einem höchsten Gewicht $\mu(v) - 2\varrho(\mathfrak{n}^1 \cap \mathfrak{p})$. Somit gibt es einen feinen Charakter χ von J^+ mit $\pi^0\omega \in F^{L^1}(\chi, d\chi)$. Da $\pi^0\omega$ ein Charakter ist, muss aber $\chi=\pi^0\omega|J^+$ gelten. Damit ergibt sich, dass X ein M -regulärer Charakter von J^+ ist mit $\pi \in F^G(X)$ (siehe dazu [8, S. 245]). Ersetzen wir G durch L , v durch v^L und π durch π^L (siehe Paragraph 4), dann ist $\pi^L \in F^L(X^L)$ und ([8, S. 245])

$$\#F^G(X) = \#F^{L^1}(\chi, d\chi) = \#F^L(X^L).$$

Es genügt also zu zeigen, dass $\#F^L(X^L)=1$. Es sei $Q_L=M_LDU_L=Q \cap L$. Dann ist Q_L eine minimale parabolische Untergruppe von L und $M_L \subset L^+$. Wir wählen $\gamma \in \mathfrak{d}^*$ wie in Teil b und setzen $I^L=I^L(Y^L)$. Ist $\delta \in \hat{L}^+$ so, dass $m(\delta, I^L) \neq 0$. Da

$$I^L|L^+ = \text{Ind}_{M_L}^{L^+}(\pi^L|M_L) = \bigoplus_{\sigma \in L^+} m(\pi^L|M_L, \sigma)\sigma$$

gilt, folgt $m(\pi^L|M_L, \delta) \neq 0$. Nun liegt $\exp(a_0^+) \subset M_L$ in dem Zentrum von L^+ (siehe 4.1), es gibt also ein $\vartheta \in i(\mathfrak{h}_0^+ \cap \mathfrak{t}_0)^*$, so dass $\mu(v) - 2\varrho(\mathfrak{n}^-, \mathfrak{h}^+) + \vartheta$ ein höchstes Gewicht von δ ist. Insbesondere ist

$$\|\delta\| - \|\pi^L\| = (\vartheta|\vartheta) + 4(\varrho_c(\mathfrak{l})|\vartheta).$$

Da $\mu(v) - 2\varrho(\mathfrak{n}^-, \mathfrak{h}^+) + \vartheta$ und somit auch ϑ dominant sind, ist dieser Ausdruck nicht negativ und genau dann gleich Null, wenn $\vartheta=0$. Ist also δ ein minimaler

L^+ -Faktor von I^L , so folgt, dass $\vartheta=0$ und wegen (4.2), dass δ ein Charakter ist. Es gilt $L^+ = M_L L_0^+$ ([9, S. 26]). $\delta|L_0^+$ und $\pi^L|L_0^+$ sind beide irreduzibel und gehören zu dem gleichen Gewicht, also stimmen sie überein. Aus $\delta|M_L = \pi^L|M_L$ folgt dann $\delta = \pi^L$ und $F^L(X^L) = \{\pi^L\}$.

b) Die Bezeichnungen seien wie in dem Beweis von Teil a. Wir wählen Q so, dass u_L die Liealgebra $\tilde{\mathfrak{n}}$ aus dem Beweis von 3.1 ist. Wir nehmen zuerst an, dass G zusammenhängend ist. Dann ist auch L zusammenhängend (4.1). Nun sind die Definition von γ und die Konstruktion in dem Beweis von 3.1 gerade so gewählt, dass $U(\mathfrak{l})^{l^+}$ auf $\text{Hom}_{L^+}(\pi^L, I^L)$ durch den Homomorphismus $u \mapsto \varphi_1(u)(\sigma)$ operiert, wobei

$$\sigma|a^+ := v^L|a^+, \quad \sigma|a^- := v|a^- + \varrho(\tilde{\mathfrak{n}}, \mathfrak{d})|a^-.$$

Es genügt deshalb zu zeigen, dass $\varrho(\tilde{\mathfrak{n}}, \mathfrak{d})|a^- = \varrho(\Delta^+(g, a))|a^-$. Daraus folgt nämlich $E_{v_i}^L = I^L(Y^L; \pi^L)$. Die Induktion in Stufen liefert zusammen mit 4.9 in [8] und 4.4 die Behauptung für E_v^G . Nach 4.3 ist

$$\varrho(\Delta^+(g, a))|a^- = \varrho(\Delta^+(l, a))|a^-.$$

Sei $\beta \in \Delta^+(l, a)$ und $x \in I_\beta$. Dann gibt es $x_1 \in l \cap t^+$, $x_2 \in l \cap t^-$ und $x_3 \in l \cap \mathfrak{s}^-$ mit $x = x_1 + x_2 + x_3$. Für $h \in a^-$ mit $\beta(h) \neq 0$ gilt

$$\beta(h)x_1 + \beta(h)x_2 + \beta(h)x_3 = [h, x] = [h, x_1] + [h, x_2] + [h, x_3].$$

Da $[h, x_1] \in \mathfrak{s}^-$, $[h, x_2] \in \mathfrak{s}^+$ und $[h, x_3] \in t^+$, folgt $x_2 = 0$. Insbesondere ist $I_\beta \subset t^+ \oplus \mathfrak{s}^-$. Für $h \in \mathfrak{d} \cap t$ bekommt man aber

$$[h, x] = [h, x_1] + [h, x_3] \in I_\beta \cap (t^- \oplus \mathfrak{s}^+) = 0,$$

und das liefert $[\mathfrak{d} \cap t, I_\beta] = 0$. Genau so zeigt man, dass $\beta|\mathfrak{d} \cap t = 0$ aus $\beta \in \Delta(\tilde{\mathfrak{n}}, a)$, $\beta|a^- \neq 0$ folgt. Beides zusammen liefert die Behauptung.

Es sei nun G beliebig. Dann ist $\text{Hom}_{g, K_0}(I^G(Y; \pi)|G_0, E_v^{G_0}) \neq 0$, also auch

$$\text{Hom}_{g, K}(I^G(Y; \pi), E_v^G) \neq 0$$

([9, S. 26]). Es sei $\Phi \in \text{Hom}_{g, K}(I^G(Y; \pi), E_v^G)$, $\Phi \neq 0$. Dann ist $\text{Im } \Phi$ irreduzibel und $m(\pi, \text{Im } \Phi) = 1$. Aus 4.6 und der Definition von $E_{\pi, v}^G$ erhält man $\text{Im } \Phi = E_{\pi, v}^G$.

Ist $a = a^+$, so ist $E_{\pi, v}^G$ unitär nach 4.8. Aus 5.4 folgt deshalb:

5.5 SATZ. Die Bezeichnungen seien wie in 5.4. Ferner sei $a = a^+$. Dann ist $I^G(Y, \pi)$ unitär.

5.6 BEMERKUNG. Statt 4.4 hätten wir gleich zeigen können, dass

$$E_v^G = X^G(\mathfrak{b}, I^L(Y^L; \pi^L), \pi)$$

gilt. Induktion in Stufen, Lemma 4.9, Lemma 4.10 und dessen Beweis ([8]) liefern dann sofort eine Konstante N , so dass 5.5, Teil b für alle $\nu \in \Lambda$ mit $(\mu(\nu)|\alpha) > N$ ($\alpha \in \Delta(n, \mathfrak{h}^+)$) richtig ist. Lemma 4.10 gibt aber keine Information darüber wie gross N ist. Deswegen und der Vollständigkeit halber habe ich diese etwa umständlichere Methode gewählt.

5.7 BEMERKUNG. Wenn wir davon ausgehen, dass G zusammenhängend ist, lassen sich die Beweise etwas vereinfachen. Es stellt sich aber heraus, dass es wichtig ist, diese Resultate auch für nicht zusammenhängende Gruppen zu haben (siehe [5]). Dazu sei $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0^+ \oplus \mathfrak{a}_0^-$ ein Cartanraum von $(\mathfrak{g}_0, \tau, \theta)$ und \mathfrak{g}_0^0 das orthogonale Komplement von \mathfrak{a}_0^- in $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{a}_0^-)$. Dann ist \mathfrak{g}_0^0 θ - und τ -invariant und \mathfrak{a}_0^+ ist ein Cartanraum von $(\mathfrak{g}_0^0, \tau|_{\mathfrak{g}_0^0}, \theta|_{\mathfrak{g}_0^0})$. Es existiert eine θ - und τ -invariante reduktive Liegruppe $G^0 \subset G$ mit $Z_G(\mathfrak{a}_0^-) = G^0 A^-$, wobei $A^- = \exp(\mathfrak{a}_0^-)$. Die Ergebnisse aus dieser Arbeit lassen sich nun auf G^0 anwenden. Insbesondere ist die diskrete Reihe von G^0/T^0 , mit $T^0 := (G^0 \cap T)_0$, nicht leer und $\mu(\nu)$ ist davon unabhängig ob wir es mit Hilfe von $\nu \in i\mathfrak{a}_0^*$ und \mathfrak{g}_0 oder $\nu|_{\mathfrak{a}_0^+}$ und \mathfrak{g}_0^0 bilden. Ist ferner $\pi \in \hat{K}$ mit einem höchsten Gewicht $\mu(\nu)$, so gibt es genau ein $\pi^0 \in (G^0 \cap K)^\wedge$ mit einem höchsten Gewicht $\mu(\nu)$, das in $\pi|_{G^0 \cap K}$ enthalten ist. Die Darstellung $E_{\pi^0, \nu|_{\mathfrak{a}_0^+}}^{G^0}$ von G^0 ist unitär und enthält π^0 als einzigen minimalen $G^0 \cap K$ -Faktor. Sei $\Delta^+(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}_0^-)$ ein positives System in $\Delta(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}_0^-)$, $\mathfrak{n}_0^0 = \mathfrak{g}_0(\Delta^+(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{a}_0^-))$ und $N^0 := \exp(\mathfrak{n}_0^0)$. Dann ist $P^0 := G^0 A^- N^0$ eine parabolische Untergruppe von G und

$$F_{\pi, \nu} := \text{Ind}_{P^0}^{G^0} E_{\pi^0, \nu|_{\mathfrak{a}_0^+}}^{G^0} \otimes \nu|_{\mathfrak{a}_0^-} \otimes 1$$

eine unitäre Darstellung von G , die π als minimalen K -Faktor enthält. Wir definieren $C \geq 0$ wie nach 5.1 zu G und \mathfrak{a} , und $C^0 \geq 0$ analog zu G^0 und \mathfrak{a}^+ und setzen $\check{C} := \max\{C, C^0\}$. Dann gilt der Satz:

5.8 SATZ. *Es sei $\nu \in \Lambda_{\check{C}}$ und $\pi \in \hat{K}$ mit einem höchsten Gewicht $\mu(\nu)$. Dann ist $E_{\pi, \nu}^{G^0}$ infinitesimal äquivalent zu der eindeutig bestimmten irreduziblen Teildarstellung von $F_{\pi, \nu}$, deren Einschränkung auf K die Darstellung π enthält, und somit unitär.*

Aus diese Weise erhält man eine neue Schar von unitären Darstellungen von G .

LITERATURVERZEICHNIS

1. M. Flensted-Jensen, *Discrete series for semisimple symmetric spaces*, Ann. of Math. 111 (1980), 253–311.
2. S. Helgason, *A duality for symmetric spaces with application to group representations*, Adv. in Math. 5 (1970), 1–154.
3. O. Loos, *Symmetric Spaces, I: General Theory*, W. A. Benjamin, Inc., New York - Amsterdam, 1969.

4. T. Matsuki, *The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups*, J. Math. Soc. Japan 3 (1979), 331–357.
5. G. Olafsson, *Die Langlands-Klassifizierung, unitäre Darstellungen und die Flensted-Jensensche fundamentale Reihe*, Seminar Prof. Maak, Nr. 39, Göttingen, 1982.
6. H. Schlichtkrull, *A series of unitary irreducible representations induced from a symmetric subgroup of a semisimple Lie group*, Invent. Math. 68 (1982), 497–516.
7. H. Schlichtkrull, *The Langlands parameters of Flensted-Jensen's discrete series for semisimple symmetric spaces*, Preprint, Univ. of Copenhagen, 1981.
8. B. Speh and D. Vogan, *Reducibility of generalized principal series representations*, Acta Math. 145 (1980), 227–299.
9. D. Vogan, *Representations of real reductive Lie groups* (Progress in Math. 15), Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1981.
10. D. Vogan, *The algebraic structure of the representations of semisimple Lie groups*, Ann. of Math. 109 (1979), 1–60.
11. G. Warner, *Harmonic analysis on semisimple Lie groups*, Vol. I. (Grundlehren Math. Wiss. 188), Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1972.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN
BUNSENSTRASSE 3-5
D-3400 GÖTTINGEN
W. GERMANY

UND

SCIENCE INSTITUTE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF ICELAND
DUNHAGI 3
IS-107 REYKJAVIK
ICELAND