MATH. SCAND. 56 (1985), 70-82

UN EXEMPLE D'ALGÈBRE DE BANACH COMMUTATIVE RADICALE A UNITÉ APPROCHÉE BORNÉE SANS MULTIPLICATEUR NON TRIVIAL

KONIN KOUA

1. Introduction.

Soit A une algèbre de Banach commutative telle que $fA \neq \{0\}$ pour tout f non nul de A. Un multiplicateur de A est une application T de A dans A telle que $(Tf)g = f(Tg)$, $(f, g \in A)$. On notera $M(A)$ l'ensemble de tous les multiplicateurs de A. On déduit facilement du théorème du graphe fermé que tous les éléments de $M(A)$ sont des applications linéaires continues [11] (voir également [8]).

On sait ([11, Théorème 3.1]) que si A est semi-simple, si X est l'espace de ses idéaux maximaux et si $T \in M(A)$ alors il existe une fonction continue g sur X telle que $(Tf)(x) = g(x)f(x)$ pour tout $f \in A$ et tout $x \in X$. De plus

$$\sup_{x \in X} |g(x)| = \|g\|_\infty \leqq \|T\| .$$

Dans le cas semi simple la fonction g est donc un multiplicateur de A au sens d'Helgason [4].

On connait des exemples d'algèbres de Banach commutatives semisimples A telles que $M(A)$ soit réduit à $A \oplus \mathbf{C}e$. Le classique espace J introduit par R. C. James dans [6] et [7] qui est de codimension 1 dans son bidual muni de la structure d'algebre définie dans [1] et l'algèbre BV_0 des suites à variation bornée convergeant vers 0, munie du produit coordonnée par coordonnée en sont deux exemples concrets (le second exemple et dû à S. Grabiner, voir [10, p. 90]).

On se propose ici de construire une algèbre de Banach commutative radicale à unité approchée bornée (u.a.b.) A telle $M(A)$ soit réduit à $A \oplus \mathbf{C}e$. Cette algèbre est un quotient de l'algèbre $\mathscr{M}_{1A}$ des fonction holomorphes pour $|z| < 1$, nulles en $z = 1$ et dont la série des coefficients de Taylor est absolument convergente. Ceci résoud un problème posé par A. M. Sinclair dans son récent Lectures Notes sur les semi-groupes [10, p. 89].

Reçu le 24. mai, 1983; revisé le 13. octobre, 1983.

Ce travail est une partie de ma thèse de 3ème cycle. Je remercie mon directeur de recherche J. Esterle pour toutes les discussions fructueuses que j'ai eues avec lui.

2. L'algèbre de Banach $\mathscr{M}_{1A}$.

Soit $\mathscr{A}(D)$ l'algèbre du disque unité, c'est-à-dire l'algèbre des fonctions holomorphes dans le disque unité ouvert qui peuvent être prolongées par continuité au disque unité fermé. Posons

$$A = \left\{ f \in \mathscr{A}(D) \mid f(z) = \sum_{n \geqq 0} a_n z^n, \sum_n |a_n| < +\infty \right\}.$$

A muni de la norme $\|f\| = \sum_{n \geqq 0} |a_n|$ est une algèbre de Banach. On considère l'idéal fermé de A noté $\mathscr{M}_{1A} = \{f \in A \mid f(1) = 0\}$. On a alors les résultats suivants:

LEMME 1. *$\mathscr{M}_{1A}$ possède une unité approchée bornée.*

PREUVE. Considérons la suite $(e_n)_{n \geqq 1}$ des fonctions définies pour tout $z \in D$ par

$$e_n(z) = \frac{z-1}{z-1-1/n}.$$

Alors e_n est un élément de $\mathscr{M}_{1A}$ pour tout $n \geqq 1$. En effet $e_n(1) = 0$ pour tout n. Par ailleurs

$$e_n(z) = 1 - \frac{1}{(n+1)\left(1 - \dfrac{n}{n+1} z\right)} = \sum_{p \geqq 0} a_{n,p} z^p,$$

où $a_{n,0} = n/(n+1)$ et $a_{n,p} = -n^p/((n+1)^{p+1})$ pour tout $p \geqq 1$

$$\sum_{p \geqq 0} |a_{n,p}| = 2\frac{n}{n+1} < 2.$$

On a donc $e_n \in \mathscr{M}_{1A}$ pour tout $n \geqq 1$. Soit maintenant la fonction β définie pour $z \in D$ par $\beta(z) = z - 1$.

Alors

$$e_n(z) = \frac{\beta(z)}{\beta(z) - 1/n}$$

ce qui implique que $\beta(z)e_n(z) - \beta(z) = e_n(z)/n$. Donc

$$\|\beta e_n - \beta\| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+1)^3} + \frac{n^2}{(n+1)^4} + \dots$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \times \frac{1}{1 - \frac{n}{n+1}} = \frac{2}{n+1}$$

et $\|\beta e_n - \beta\| \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Soit alors α l'application $z \to z$. Pour montrer que la suite $(e_n)_{n \geqq 1}$ est une u.a.b. de $\mathscr{M}_{1A}$, il suffit de montrer que les polynomes en $\alpha - 1$ sont denses dans $\mathscr{M}_{1A}$.

Si $g \in \mathscr{M}_{1A}$ avec $g(z) = \sum_{i \geqq 0} a_i z^i$ alors $g = \sum_{i \geqq 0} a_i \alpha^i$ cette série étant absolument convergente dans A. De

$$g = \sum_{i \geqq 0} a_i \alpha^i \quad \text{et} \quad g(1) = \sum_{i \geqq 0} a_i = 0$$

on déduit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $i_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $p \geqq i_0$

$$\left\| g - \sum_{i=0}^{p} a_i \alpha^i \right\| \leqq \varepsilon/2$$

et

$$\left| \sum_{i=0}^{p} a_i \right| \leqq \varepsilon/2 \, .$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $i_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $p \geqq i_0$ on a

$$\left\| g - \sum_{i=0}^{p} a_i (\alpha^i - 1) \right\| \leqq \varepsilon$$

c'est-à-dire

$$\left\| g - \sum_{i=1}^{p} a_i (\alpha^i - 1) \right\| \leqq \varepsilon \, .$$

Mais

$$\alpha^i - 1 = \sum_{k=1}^{i} \lambda_{k,i} \beta^k$$

où β est la fonction $z \to z - 1$ et

$$\lambda_{k,i} = \frac{i(i-1) \dots (i+1-k)}{k!} \, .$$

Par suite

$$\left\|g-\sum_{i=1}^{p} a_i(\alpha^i-1)\right\| = \left\|g-\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{i} a_i\lambda_{k,i}\beta^k\right\| .$$

Ainsi pour tout $\varepsilon>0$, il existe $i_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $p \geqq i_0$ on a:

$$\left\|g-\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{i} a_i\lambda_{k,i}\beta^k\right\| \leqq \varepsilon .$$

Ce qui assure que les polynômes en $\alpha-1$ sont denses dans $\mathcal{M}_{1A}$.

Donc

$$\|ge_n-g\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

pour tout élément g de $\mathcal{M}_{1A}$ puisque $\|\beta e_n-\beta\| \to 0$ quand $n \to \infty$. Ceci achève la preuve du lemme.

PROPOSITION 2. *L'ensemble des multiplicateurs de $\mathcal{M}_{1A}$ noté $M(\mathcal{M}_{1A})$ se reduit à $\mathcal{M}^{\ddagger}_{1A}=M_{1A}\oplus \mathbf{C}e$.*

PREUVE. Pour $g \in \mathcal{M}_{1A}$ et $\lambda \in \mathbf{C}$ fixés, l'application $f \to (g+\lambda e)f$ de $\mathcal{M}_{1A}$ dans $\mathcal{M}_{1A}$ est évidemment un multiplicateur de $\mathcal{M}_{1A}$.

Réciproquement, soit $T \in M(\mathcal{M}_{1A})$ et soit $z \in D$. Si f_1 et f_2 sont deux éléments de $\mathcal{M}_{1A}$ tels que $f_1(z) \neq 0$ et $f_2(z) \neq 0$, alors on a:

$$\frac{(Tf_1)(z)}{f_1(z)} = \frac{(Tf_2)(z)}{f_2(z)}$$

car T est un multiplicateur.

Pour chaque $z \in D$, choisissons $f \in \mathcal{M}_{1A}$ tel que $f(z) \neq 0$ et posons

$$\theta(z) = \frac{(Tf)(z)}{f(z)}$$

θ ainsi définie ne dépend pas du choix de f. En particulier, si on considère l'élément g de $\mathcal{M}_{1A}$ défini pour tout $z \in D$ par $g(z)=1-z$. Alors $\theta=Tg/g$ est définie et continue sur $D-\{1\}$ et analytique à l'intérieur de D.

Soit alors $\theta(z)=\sum_{m\geqq 0} b_m z^m$ son développement en série de Taylor. Pour $n \in N$ soit

$$T(e_n)(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{n,m} z^m$$

le développement de Taylor de $T(e_n)$.

Alors $e_n g \xrightarrow[n\to\infty]{} g$, donc

$$T(e_n)g = T(e_n g) \xrightarrow[n\to\infty]{} Tg = \theta g .$$

Les convergences étant considérées au sens de la norme de A. En particulier ceci implique que

$$T(e_n)(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta(z)$$

uniformément pour $|z| \leqq \frac{1}{2}$. On déduit alors des inégalités de Cauchy que

$$b_m = \lim_{n\to\infty} c_{n,m} \qquad \text{pour tout } m\,.$$

Il existe une constante K positive telle que $\|T(e_n)\| \leqq K$ pour tout n, puisque T est nécessairement continu. Donc

$$\sum_{m=0}^{l} |b_m| \leqq \limsup_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{l} |c_{n,m}| \leqq \limsup_{n\to\infty} \|T(e_n)\| \leqq K\,.$$

La suite des sommes partielles $S_l = \sum_{m=0}^{l} |b_m|$ étant majorée, la série $\sum_{m=0}^{\infty} |b_m|$ est convergente.

Donc θ est un élément de A. On a ainsi montré que si $T \in M(\mathcal{M}_{1A})$, alors il existe $\theta \in A$ tel que $Tf = \theta f$, pour tout $f \in \mathcal{M}_{1A}$. Donc $M(\mathcal{M}_{1A})$ s'identifie à A qui est isomorphe à $\mathcal{M}_{1A} \oplus \mathbf{C}e$.

3. L'algèbre de Banach $\mathcal{M}_{1A}/\mathcal{I}$.

Soit F la fonction définie pour tout $z \in D - \{1\}$ par $F(z) = \exp(z+1)/(z-1)$. F n'appartient pas à $\mathcal{A}(D)$, mais c'est une fonction intérieure continue sur $D - \{1\}$. Cette fonction a été utilisée par J. Esterle dans des construction de sous espaces invariants pour des opérateurs sur lesquels opèrent certaines algèbres de fonctions analytiques, voir [3, p. 150].

Posons

$$\mathcal{M}_1 = \{f \in \mathcal{A}(D) \mid f(1) = 0\}\,.$$

Pour toute fonction f de la forme $f = Fg$ où $g \in \mathcal{M}_1$, on pose $f(1) = 0$. On obtient ainsi un prologement continu de f à $\bar{D}$ puisque F est bornée par 1 sur $\bar{D}\{1\}$. Posons $I = F\mathcal{M}_1$. Alors I est un idéal de $\mathcal{A}(D)$ contenu dans $\mathcal{M}_1$. L'application $f \to Ff$ est une isométrie de $\mathcal{M}_1$ car F est de module 1 sur le cercle privé de $z = 1$. Donc I est fermé puisque $\mathcal{M}_1$ l'est. De plus $I \neq \mathcal{M}_1$ car la fonction $f \in \mathcal{M}_1$ définie par $f(z) = 1 - z$ n'appartient pas à I (sinon on aurait $f(x) = 0$ $(\exp 2/(x-1))$ quand $x \to 1^-$). Posons alors $\mathcal{I} = \varphi^{-1}(I)$ où φ est l'injection naturelle de $\mathcal{M}_{1A}$ dans $\mathcal{M}_1$. En fait $\mathcal{I} = \mathcal{M}_{1A} \cap I$ et $\mathcal{I}$ est un idéal fermé de A strictement contenu dans $\mathcal{M}_{1A}$. On a le résultat suivant:

PROPOSITION 3. *$\mathcal{M}_{1A}/\mathcal{I}$ est une algèbre de Banach commutative radicale à unité approchée bornée.*

PREUVE. *$\mathcal{M}_{1A}/\mathcal{I}$ est à unité approchée bornée.* Pour le voir il suffit de considérer la suite des $\bar{e}_n=\pi(e_n)$, images dans $\mathcal{M}_{1A}/\mathcal{I}$ des e_n de $\mathcal{M}_{1A}$ donnés par le lemme 1, par l'application canonique π de $\mathcal{M}_{1A}$ sur $\mathcal{M}_{1A}/\mathcal{I}$.

$\mathcal{M}_{1A}/\mathcal{I}$ est radicale. Rappelons que tout caractère de $\mathcal{M}_{1A}/\mathcal{I}$ provient d'un caractère de $\mathcal{M}_{1A}$ qui s'annulle sur $\mathcal{I}$.

Soit α l'application $z \to z$. Alors tout élément f de A s'écrit sous la forme $f=\sum_{n\geqq 0}a_n\alpha^n$ où les a_n sont les coefficients de Taylor de f.

Soit $t \in D$. L'application $f \to f(t)$ est évidemment un caractère χ de A. En fait

$$\chi(f) = \sum_{n\geqq 0} a_n\chi(\alpha^n) = \sum_{n\geqq 0} a_n t^n .$$

Réciproquement, si χ est un caractère de A, on a $|\chi(\alpha)| \leqq \|\alpha\| \leqq 1$, donc $\chi(\alpha) \in D$. Posons alors $t=\chi(\alpha)$. Soit f un élément de A. On a $f=\sum_{n\geqq 0} a_n\alpha^n$, cette série étant absolument convergente dans A.

Alors

$$\chi(f) = \chi\left(\sum_{n\geqq 0} a_n\alpha^n\right) = \sum_{n\geqq 0} a_n\chi(\alpha^n) = \sum_{n\geqq 0} a_n t^n = f(t) .$$

Ainsi tout caractère de A est de la forme $f \to f(t)$ où $t \in D$. Donc tout caractère de $\mathcal{M}_{1A}$ est de la forme $f \to f(t)$ où $t \in D-\{1\}$. Soit maintenant χ un caractère non nul de $\mathcal{M}_{1A}/\mathcal{I}$, χ provient alors d'un caractère non nul χ' de $\mathcal{M}_{1A}$ qui s'annulle sur $\mathcal{I}$. Il existe donc $t \in D-\{1\}$ tel que $\chi'(f)=f(t)$ pour tout f de $\mathcal{M}_{1A}$ et $f(t)=0$ si $f \in \mathcal{I}$. Considérons l'application f définie par

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z=1 \\ (z-1)^4 \exp\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right) & \text{si } z \in D-\{1\} . \end{cases}$$

Montrons que f appartient à $\mathcal{I}=F\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_{1A}$. Puisque f est de la forme Fg où $g \in \mathcal{M}_1$, il suffit de montrer que $f \in \mathcal{M}_{1A}$.

On a

$$f''(z) = 4(3z^2-9z+7)\exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

ce qui montre que f'' est bornée; par conséquent il existe une constante $M>0$ telle que

$$|f''(z)| \leqq M \qquad z \in D-\{1\}$$

or si $f(z)=\sum_{n\geqq 0} a_n z^n$, on a $f''(z)=\sum_{n\geqq 0}(n-1)na_n z^{n-2}$; f'' étant bornée, on a $n(n-1)|a_n| \leqq M/r^n$ pour tout $r<1$. Fixons n et faisons tendre r vers 1 on a

$$n(n-1)|a_n| \leqq M \quad \text{donc} \quad |a_n| \leqq \frac{M}{n(n-1)}$$

terme général d'une série convergente, donc $\sum_{n \geqq 0} |a_n| < +\infty$ ce qui assure que $f \in \mathscr{M}_{1A}$.

Comme $f(t) \neq 0$ pour tout $t \in D - \{1\}$ on voit donc que le seul caractère de A s'annulant sur $\mathscr{I}$ est l'application $g \to g(1)$, qui s'annule évidemment sur $\mathscr{M}_{1A}$. Donc l'algèbre $\mathscr{M}_{1A}/\mathscr{I}$, qui ne possède aucun caractère non nul, est radicale.

4. Caractérisation des multiplicateurs de $\mathscr{M}_{1A}/\mathscr{I}$.

Sur $\mathscr{A}(D)$ on considère la topologie définie par la famille de semi-normes $(p_n)_n$ suivante:

$$p_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \frac{|f^{(i)}(0)|}{i!}$$

on l'appellera la topologie faible de $\mathscr{A}(D)$ et sa restriction à A sera la topologie faible de A. P_n est une semi-norme d'algèbre sur A. On dira ainsi qu'une suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathscr{M}_{1A}$ converge faiblement vers un élément f de A si la suite des coefficients de Taylor de f_n converge simplement vers les coefficients de Taylor de f.

En fait cette topologie faible coincide sur toute partie bornée de $\mathscr{A}(D)$ avec la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de $\mathring{D}$.

En effet, soit $f \in \mathscr{M}_{1A}$ avec $f(z) = \sum_{n \geqq 0} a_n z^n$. Pour m fixé on a

$$|a_n|\varrho^n \leqq \sup_{|z| \leqq \varrho} |f(z)|; \qquad \varrho < 1$$

c'est-à-dire

$$|a_n| \leqq \frac{1}{\varrho^n} \sup_{|z| \leqq \varrho} |f(z)|; \qquad \varrho < 1 .$$

Par suite

$$P_n(f) = \sum_{i=0}^{n} |a_i| \leqq \frac{n}{\varrho^n} \sup_{|z| \leqq \varrho} |f(z)|$$

ce qui montre que la topologie faible ainsi définie est moins fine que la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de $\mathring{D}$.

Pour $f \in \mathscr{A}(D)$ posons $\|f\|_\infty = \sup_{|z| \leqq 1} |f(z)|$. On a

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leqq \|f\|_\infty$$

d'après les inégalités de Cauchy.

Soit alors $\varrho<1$ fixé et soit $f: z \to \sum_{n\geqq 0} a_n z^n$ un élémemt de $\mathscr{A}(D)$. Comme

$$\sum_{n\geqq l} |a_n||z|^n \leqq \|f\|_\infty \sum_{n\geqq l} \varrho^n = \|f\|_\infty \frac{\varrho^l}{1-\varrho} \quad \text{pour } |z|\leqq\varrho$$

on a

$$\|f\|_\varrho = \sup_{|z|\leqq\varrho} |f(z)| \leqq \|f\|_\infty \frac{\varrho^l}{1-\varrho} + \sum_{n=0}^{l} |a_n|\varrho^n$$

donc

$$\|f\|_\varrho \leqq \|f\|_\infty \frac{\varrho^l}{1-\varrho} + P_l(f) \quad \text{pour tout } l\,.$$

Soit B une partie bornée de $\mathscr{A}(D)$. Posons $K=\sup_{f\in B}\|f\|_\infty$.

On obtient, pour $f, g \in B$

$$\|f-g\|_\varrho \leqq 2K\frac{\varrho^l}{1-\varrho} + P_l(f-g) \quad \text{pour tout } l\,.$$

Soit maintenant $(f_n)_n$ une suite d'éléments de B convergeant faiblement vers un élément f de B, alors

$$P_l(f_n-f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{pour tout } l\,.$$

Par suite $\lim_n \sup \|f_n-f\|_\varrho \leqq 2K\varrho^l/(1-\varrho)$ pour tout l, donc $\|f_n-f\|_\varrho \to 0$ quand $n \to \infty$. Les deux topologies considérées étant métrisables, on a bien le résultat annoncé.

Soit

$$l^1 = \left\{x=(\xi_i)_i \;\middle|\; \xi_i \in \mathbf{C},\ \|x\|_1=\sum_i |\xi_i|<+\infty\right\}$$

$$l^\infty = \{x=(\xi_i)_i \mid \xi_i \in \mathbf{C},\ \|x\|_\infty=\sup_i|\xi_i|<+\infty\}$$

$$c_0 = \{x=(\xi_i)_i \mid \xi_i \in \mathbf{C},\ \xi_i \xrightarrow[i\to\infty]{} 0\}\,.$$

On sait que l^1 est le dual de c_0 ([9, p. 109]). Considérons l'application θ de A dans l^1 qui à tout élément f de A avec $f(z)=\sum_{n\geqq 0} a_n z^n$, associe la suite $(a_n)_n$.

θ est alors une isométrie.

La topologie faible coincide sur les parties bornées de A avec la topologie *-faible induite sur A par la dualité entre l^1 et C_0 via l'isométrie θ. Donc la boule unité de A est faiblement compacte.

On se propose dans la suite de montrer que tout multiplicateur de $\mathscr{M}_{1A}/\mathscr{I}$ est défini par un élément de $A/\mathscr{I}$.

La démonstration reposera sur la remarque et les lemmes suivants:

Remarque 4. Si $(f_n)_n$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}(D)$ qui converge faiblement vers un élément f de $\mathscr{A}(D)$, alors $f_n g$ converge faiblement vers fg pour tout $g \in \mathscr{A}(D)$.

Preuve. Utiliser la formule donnant le produit de deux séries.

Lemme 5. *Soit φ une fonction réelle continue telle que $\varphi(u) \leqq 0$ pour tout $u \in \mathbf{R}$. On suppose que*

$$\varphi(u) \xrightarrow[|u| \to +\infty]{} -\infty \quad \textit{et que} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{1+u^2}\, du < +\infty .$$

Si l'on pose

$$V(w) = \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{x^2+(u-y)^2}\, du$$

où $w = x+iy$. Alors

$$V(w) \xrightarrow[\substack{|w| \to \infty \\ \mathrm{Re}\, w > 0}]{} -\infty$$

Preuve. En posant $(u-y)/x = t$ on a

$$V(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(xt+y)}{1+t^2}\, dt$$

comme φ est négative on a

$$V(w) \leqq \frac{1}{\pi} \int_{1}^{2} \frac{\varphi(xt+y)}{1+t^2}\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{-2}^{-1} \frac{\varphi(xt+y)}{1+t^2}\, dt .$$

Pour $1 \leqq t \leqq 2$ ou $-2 \leqq t \leqq -1$ on a $1/(1+t^2) \geqq 1/5$. Par suite

$$V(w) \leqq \frac{1}{5\pi} \int_{1}^{2} \varphi(xt+y)\, dt + \frac{1}{5\pi} \int_{-2}^{-1} \varphi(xt+y)\, dt$$

donc

$$V(w) \leqq \frac{1}{5\pi} \inf \left[\sup_{1 \leqq t \leqq 2} \varphi(xt+y) ; \sup_{-2 \leqq t \leqq -1} \varphi(xt+y) \right]$$

si $y \geqq 0$ et $1 \leqq t \leqq 2$ alors $xt+y \geqq xt \geqq x$ et $xt+y \geqq y$. Ainsi

$$xt+y \geqq \sup(|x|, |y|) \geqq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^2+y^2} = \frac{|w|}{\sqrt{2}} .$$

Donc si $|w| \to \infty$, alors $xt+y \to +\infty$ uniformément en t.

Par conséquent,

$$\sup_{1 \leqq t \leqq 2} \varphi(xt+y) \xrightarrow[\substack{|x+iy|\to\infty \\ x>0 \\ y \geqq 0}]{} -\infty$$

Si $y \leqq 0$ et $-2 \leqq t \leqq -1$ alors $xt+y \leqq y$ et $xt+y \leqq xt \leqq -x$. Ainsi

$$xt+y \leqq \inf(-x, y) = \inf(-|x|, -|y|) = -\sup(|x|, |y|) = -\frac{|w|}{\sqrt{2}}.$$

Donc si $|w| \to +\infty$, alors $xt+y \to -\infty$ uniformément en t.

Par conséquent

$$\sup_{-2 \leqq t \leqq -1} \varphi(xt+y) \xrightarrow[\substack{|x+iy|\to\infty \\ x>0 \\ y \leqq 0}]{} -\infty .$$

En conclusion

$$\inf\left[\sup_{1 \leqq t \leqq 2} \varphi(xt+y), \sup_{-2 \leqq t \leqq -1} \varphi(xt+y)\right] \xrightarrow[\substack{|x+iy|\to\infty \\ x>0}]{} -\infty .$$

Donc

$$V(w) \xrightarrow[\substack{|w|\to\infty \\ \operatorname{Re} w>0}]{} -\infty .$$

LEMME 6. *Soit (f_n) une suite bornée d'éléments de $\mathscr{I}$. Si f_n converge faiblement vers un élément f de $\mathscr{M}_{1A}$ alors $f \in \mathscr{I}$.*

PREUVE. Soit A_0 l'ensemble des fonctions holomorphes dans le demi-plan droit $\{w \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} w \geqq 0\}$, continues sur le bord et tendant vers 0 à l'infini.

Si $f \in A_0$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{\operatorname{Re} z \geqq 0} |f(z)| = \sup_{y \in \mathbf{R}} |f(iy)|$$

d'après le principe de Phragmén-Lindelöf [2].

Soit F_0 la fonction définie pour $\operatorname{Re} w \geqq 0$ par $F_0(w) = e^{-w}$. On pose $I_0 = F_0 A_0$.

Soient alors (g_n) une suite bornée d'éléments de I_0 et $h \in A_0$ tels que

$$g_n(w) \xrightarrow[n\to\infty]{} h(w)$$

pour tout w tel que $\operatorname{Re} w > 0$. Pour tout n, $g_n = F_0 f_n$ avec $f_n \in A_0$.

La suite $(f_n)_n$ est bornée car $\|f_n\|_\infty = \|g_n\|_\infty$. Posons $u(w) = h(w) \times 1/F_0(w)$ pour $\operatorname{Re} w \geqq 0$. Alors

$$f_n(w) \xrightarrow[n\to\infty]{} u(w)$$

pour tout w tel que $\operatorname{Re} w > 0$. Donc u est bornée et continue sur le bord; de plus u tend vers 0 à l'infini sur l'axe des imaginaires car $|u(iy)| = |h(iy)|$. Supposons sans perte de généralité que u est bornée par 1, u s'écrit alors de manière unique (grâce au théorème de factorisation dans le demi-plan [5]) sous la forme $u = \lambda$ B.S.F., où

λ est un complexe de module 1.

B est un produit de Blaschke, donc borné.

S est une fonction singulière, donc bornée.

F est une fonction extérieure telle que $|F| = |u|$ presque partout sur l'axe des imaginaires.

F est donc de la forme:

$$F(w) = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \log|u(it)| \frac{tw+i}{t+iw}\frac{dt}{1+t^2}\right\}.$$

Si $w = x + iy$ on a

$$|F(w)| = \exp\left\{\frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log|u(it)|}{x^2+(t-y)^2}dt\right\}.$$

D'après le Lemme 5 et le fait que nous avons supposé u borné par 1 on a

$$|F(w)| \xrightarrow[\substack{|w|\to\infty \\ \operatorname{Re} w>0}]{} 0 .$$

Donc

$$|u(w)| \xrightarrow[\substack{|w|\to\infty \\ \operatorname{Re} w>0}]{} 0 .$$

Par conséquent u est dans A_0.

On a ainsi montré que si (f_n) est une suite bornée de A_0 telle que

$$f_n(w)e^{-w} \xrightarrow[n\to\infty]{} h(w)$$

pour tout w tel que $\operatorname{Re} w > 0$ alors h est de la forme $F_0 u$ où $u \in A_0$, c'est-à-dire $h \in I_0$. On en déduit par transformation conforme que si $(f_n)_n$ est une suite bornée d'éléments de $I = F\mathcal{M}_1$ telle que $f_n(t)$ converge vers $f(t)$ pour tout $t \in D$ et f un élément de $\mathcal{M}_1$ alors $f \in I$.

Soit maintenant $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{I} = \mathcal{M}_{1A} \cap I$, bornée au sens de la norme de $\mathcal{M}_{1A}$. Alors (f_n) est bornée dans $\mathcal{A}(D)$ et si f_n converge faiblement vers un élément f de $\mathcal{M}_{1A}$ alors $f \in I$, donc $f \in \mathcal{I}$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat annoncé:

THÉORÈME 7. *L'ensemble des multiplicateurs de* $\mathscr{M}_{1A}/\mathscr{I}$ *s'identifie à* $A/\mathscr{I} \cong (\mathscr{M}_{1A}/\mathscr{I}) \oplus \mathbf{C}e$.

DÉMONSTRATION. Posons $H = \mathscr{M}_{1A}/\mathscr{I}$. Soit $T \in M(H)$ et soit $(\bar{e}_n)_n$ l'unité approchée bornée de H. On a

$$T(\alpha) = \lim_n T(\alpha \bar{e}_n) = \lim_n T(\bar{e}_n)\alpha \quad \text{pour tout } \alpha \in H .$$

Puisque $T(\bar{e}_n) \in H$, il existe une suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathscr{M}_{1A}$ telle que $\bar{f}_n = T(\bar{e}_n)$. Alors

$$\|\bar{f}_n\| = \|T(\bar{e}_n)\| \leqq \|T\| \|\bar{e}_n\| \leqq 2\|T\|$$

on peut donc supposer que (f_n) est une suite bornée de $\mathscr{M}_{1A}$. Quitte à extraire de (f_n) une sous-suite convenable, on peut supposer que (f_n) converge faiblement au sens que nous avons défini plus haut vers un élément f de A.

Soient $\alpha \in H$, $g \in \mathscr{M}_{1A}$ et $h \in \mathscr{M}_{1A}$ tels que $\bar{g} = T(\alpha)$ et $\bar{h} = \alpha$. Alors

$$\bar{g} = \lim_n \bar{f}_n \alpha = \lim_n \bar{f}_n \bar{h} .$$

Donc il existe une suite (u_n) d'éléments de $\mathscr{I}$ telle que

$$\|g - f_n - u_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

(u_n) est alors bornée. Quitte à extraire de (u_n) une sous-suite convenable, on peut supposer que u_n tend faiblement vers un élément u de A quand $n \to \infty$.

D'après la Remarque 4, $f_n h$ converge faiblement vers fh. Il s'ensuit que $g - f_n h - u_n$ converge faiblement vers $g - fh - u$. Donc

$$g - fh - u = 0 .$$

Donc $u \in \mathscr{M}_{1A}$ car $g \in \mathscr{M}_{1A}$, $h \in \mathscr{M}_{1A}$. Par suite $u \in \mathscr{I}$ d'après le Lemme 6. Ainsi $\bar{g} = \bar{f}\bar{h}$ pout tout $h \in \mathscr{M}_{1A}$ tel que $\bar{h} = \alpha$. Donc $T(\alpha) = \bar{f}\alpha$ pour tout $\alpha \in H$ et comme A est isomorphe à $\mathscr{M}_{1A} \oplus \mathbf{C}e$, ceci achève la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. D. Andrew and W. L. Green, *On James' quasi-reflexive Banach space as a Banach algebra*, Canad. J. Math. 32 (1980), 1080–1101.
2. R. Boas, *Entire functions* (Pure and Appl. Math. 5), Academic Press, Inc., New York, 1954.
3. J. Esterle, *Quasimultipliers, representations of* H^∞*, and the closed ideal problem for commutative Banach algebras* in *Radical Banach algebras and automatic continuity* (Proc. Long Beach Conf., 1981), eds. J. M. Bachar, W. G. Bade, P. C. Curtis, Jr., H. G. Dales, and M. P. Thomas. (Lecture Notes in Math. 975), pp. 66–162. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1983.

4. S. Helgason, *Multipliers of Banach algebras*, Ann. of Math. 64 (1956), 240–254.
5. K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1962.
6. R. C. James, *Bases and reflexivity of Banach spaces*, Ann. of Math. 52 (1951), 518–527.
7. R. C. James, *A non-reflexive Banach space isométric with its second conjugate space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 37 (1951), 174–177.
8. B. E. Johnson, *Centralizers on certain topological algebras*, J. London Math. Soc. 39 (1967), 603–614.
9. W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson et C[ie], Editeurs, Paris, 1975.
10. A. M. Sinclair, *Continuous semi groups in Banach algebras*, (London Math. Soc. Lecture Note Ser. 63), 1982.
11. Ju-Kwei Wang, *Multipliers of commutative Banach algebras*, Pacific J. Math. 11 (1961), 1131–1170.

LABORATOIRE ASSOCIÉ AU CNRS N° 226
U.E.R. DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
351, COURS DE LA LIBÉRATION
33405 TALENCE CEDEX
FRANCE

Adresse Actuelle:
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ NATIONALE DE CÔTE D'IVOIRE
B.P. 2030 - ABIDJAN 08
CÔTE-D'IVOIRE