MATH. SCAND. 58 (1986), 301–310

QUELQUES PROPRIÉTÉS MESURABLES DE DIVERSES SUITES D'UN ESPACE DE BANACH SÉPARABLE E DANS $E^{\mathbf{N}}$

IDRÌS ASSANI

Resume.

Nous détaillons les résultats annoncés dans [2]. Nous étudions ainsi les propriétés mesurables de diverses suites d'un espace de Banach séparable E dans $E^{\mathbf{N}}$. Dans $(\mathscr{C}[0,1])^{\mathbf{N}}$ ces ensembles de suites forment des ensembles non analytiques. Une caractérisation des Banach réticulés faiblement séquentiellement complets est donnée par les propriétés boréliennes des suites relativement faiblement complètes.

Abstract. Some measurable properties of some sequences of a separable Banach space E in $E^{\mathbf{N}}$.

In this article we give the details of results announced in [2]. We study the measurable properties of some sequences of a separable Banach space E in $E^{\mathbf{N}}$. In $(\mathscr{C}[0,1])^{\mathbf{N}}$ these sets of sequences are not analytic sets. We give a characterization of weakly sequentially complete Banach lattices by the Borelian properties of weakly relatively complete sequences.

L'étude des propriétés mesurables de diverses suites (suites sans-suites l^1, les suites relativement faiblement compactes, les suites relativement faiblement complètes, les suites faiblement convergentes et les suites de Cauchy faible) d'un espace de Banach séparable E dans $E^{\mathbf{N}}$ nous est apparuelors de l'étude de la compacité faible des parties décomposables de L_E^1, (voir [3]). Nous avions exhibé alors un ensemble d'espaces de Banach E, à savoir ceux pour lesquels les suites de Cauchy faible non faiblement convergentes ne formaient pas un analytique de $E^{\mathbf{N}}$. Bien que, par un affinement des techniques développées dans [3], le problème de compacité faible ait été résolu dans [4], il semble que l'étude des propriétés mesurables ait un intérêt propre.

Reçu le 19. octobre, 1984.

I.

On considère E un Banach séparable et E^{N} muni de la topologie produit de E. On obtient un polonais. Un analytique de E^{N} est l'image continue d'un borélien et un co-analytique le complémentaire d'un analytique. Un P.C.A. est l'image continue d'un co-analytique et un Δ_2^1 est un P.C.A. de complémentaire P.C.A. (voir [5]).

Proposition 1. *Soit E un espace de Banach séparable. On a les propriétés suivantes:*

(i) *les suites équivalentes à la base canonique de c_0 forment un borélien de E^{N},*
(ii) *même énoncé pour les suites bornées équivalentes à la base canonique de l^1,*
(iii) *les suites bornées sans sous-suites l^1 forment un co-analytique de E^{N},*
(iv) *même énoncé pour les suites de Cauchy faible, les suites relativement faiblement compactes et les suites faiblement convergentes.*

Démonstration. (i) Une suite (x_n) d'éléments de E est une c_0-suite s'il existe $\delta > 0$ et $M > 0$ tels que pour tout $n \in \mathsf{N}$, pour tout choix de scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ on ait

$$\delta \cdot \sup_{i=1,\ldots,n} |\alpha_i| \leqq \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \leqq M \cdot \sup_{i=1,\ldots,n} |\alpha_i|.$$

Soit $f^{(q,q')}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$, la fonction de E^{N} dans $\mathsf{R} \times \mathsf{R}$ qui à (x_n) élément de E^{N} associe

$$\left(\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| - q \cdot \sup_{i=1,\ldots,n} |\alpha_i|,\ q' \cdot \sup_{i=1,\ldots,n} |\alpha_i| - \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \right)$$

où q et q' sont des rationnels strictement positifs. Les applications $f^{(q,q')}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ sont continues et donc

$$A^{(q,q')}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = f^{(q,q')-1}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}(\mathsf{R}^+ \times \mathsf{R}^+)$$

est un fermé de E^{N}. L'ensemble $A^{(q,q')}$ intersection prise sur toutes les suites finies de scalaires est un fermé de E^{N}.

Par suite $\mathscr{D} = \bigcup_{q,q'>0} A^{(q,q')}$ est un borélien de E^{N}.

(ii) Une suite (x_n) est une l^1-suite s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathsf{N}$, pour tout choix de scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ on ait:

$$\delta \cdot \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leqq \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\|.$$

Par une méthode analogue au (i) on montre que l'ensemble de ces suites est un borélien.

(iii) Notons $\mathscr{B}$ le borélien de $E^{\mathbf{N}}$ constitué des suites équivalentes à la base canonique de l^1. Les suites dans E admettant une sous-suite équivalente à la base canonique de l^1 forment un ensemble analytique. Par passage au complémentaire on obtient le résultat du (iii).

(iv) Il suffit de montrer ces propriétés dans $\mathscr{C}[0,1]$. Munissons la boule unité B du dual de $\mathscr{C}[0,1]$ de la topologie $\sigma((\mathscr{C}[0,1])', \mathscr{C}[0,1])$. On obtient un polonais. Le complémentaire parmi les suites bornées des suites de Cauchy faible peut s'exprimer de la façon suivante:

$$\forall n \geqq 1;\ \exists\, y \in B \text{ tel que } \forall\, n_0 \in \mathbf{N},\ \exists\, m,p \geqq n_0 \text{ tels que}$$
$$|\langle y,f_m\rangle - \langle y,f_p\rangle| > 1/n.$$

Ceci montre que le complémentaire est analytique et donc que les suites de Cauchy faible forment un co-analytique de $(\mathscr{C}[0,1])^{\mathbf{N}}$.

Le complémentaire des suites relativement faiblement compactes peut s'exprimer ainsi (voir [8])

$$\exists\, \delta > 0,\ \exists\big((X_i),X_0\big) \in [0,1]^{\mathbf{N}} \times [0,1],\quad X_i \to X_0$$

telle que

$$\forall\, p,\ \exists\, n \geqq p \text{ tels que } |f_n(X_i) - f_n(X_0)| > \tfrac{\delta}{3}\quad \forall\, i = 1,\dots,p.$$

Les suites faiblement convergentes forment un co-analytique comme intersection des suites de Cauchy faible et des suites relativement faiblement compactes.

Proposition 2. *Soit E un espace de Banach séparable. Les ensembles suivants forment un Δ_2^1 universellement mesurable dans $E^{\mathbf{N}}$.*

(i) *Les suites bornées sans sous-suite l^1 et non relativement faiblement compactes.*
(ii) *Les suites bornées sans sous-suite l^1 et non faiblement convergentes dans E.*
(iii) *Les suites bornées sans sous-suite l^1 et non de Cauchy faible.*
(iv) *Les suites relativement faiblement compactes et non de Cauchy faible.*
(v) *Les suites relativement faiblement compactes et non faiblement convergentes.*
(vi) *Les suites de Cauchy faible et non faiblement convergentes.*

Démonstration. Elle résulte du fait que les analytiques et les co-analytiques sont universellement mesurables et que l'intersection d'un analytique et d'un co-analytique est un P.C.A. de complémentaire P.C.A. donc un Δ_2^1.

Remarque. Il est montré dans [4] que les ensembles du (vi) sont co-analytiques.

II.

Nous allons montrer que dans $(\mathscr{C}[0,1])^{\mathsf{N}}$ les ensembles des Propositions 1 et 2 ne sont pas analytiques. Ce sont donc pour la Proposition 1 des co-analytiques vrais et pour la Proposition 2 des Δ_2^1 qui ne sont pas analytiques.

Nous nous appuyons sur la proposition suivante:

Proposition 3. *Soit A un analytique de K, l'ensemble de Cantor. Il existe une suite f_n de fonctions continues de $K \times [0,1]$ dans $[0,1]$ telle que*:

$$\begin{aligned} &\textit{si } t \notin A: && \lim f_n(t,x) = 0, \quad \forall x \in [0,1] \\ &\textit{et si } t \in A: && \exists x_t \in [0,1], \textit{ tel que}: \ \limsup f_n(t,x_t) = 1 \\ & && \textit{et} \quad \liminf f_n(t,x_t) = 0. \end{aligned}$$

Démonstration, Soit A un analytique de K. L'ensemble A est la projection sur l'axe K d'un fermé F de $K \times \mathsf{N}^{\mathsf{N}}$ (voir [5]). Or N^{N} est homéomorphe à l'ensemble des irrationnels de R donc homéomorphe à un G_δ de $[0,1]$; $K \times [0,1]$ étant métrique, F est un G_δ de $K \times \mathsf{N}^{\mathsf{N}}$. L'ensemble A est donc la projection d'un G_δ de $K \times [0,1]$.

Le complémentaire de F est F_σ. L'ensemble $K \times [0,1]$ étant parfaitement normal il existe d'après [9] une suite de fonctions continues de $K \times [0,1]$ dans $[0,1]$ telle que

$$\begin{aligned} &\text{si } (t,x) \notin F: && \lim_n f_n(t,x) = 0 \\ &\text{et si } (t,x) \in F: && \limsup_n f_n(t,x) = 1 \quad \text{et} \quad \liminf_n f_n(t,x) = 0. \end{aligned}$$

Le lemme s'en déduit alors.

Nous avons les théorèmes suivants:

Théorème 1. *Dans $(\mathscr{C}[0,1])^{\mathsf{N}}$ les ensembles suivants sont des co-analytiques vrais.*

(i) *Les suites de Cauchy faible.*
(ii) *Les suites faiblement convergentes.*
(iii) *Les suites sans sous-suite l^1.*
(iv) *Les suites relativement faiblement compactes.*

DÉMONSTRATION. (i) et (ii) déduisent simplement de la Proposition 3. On considère la fonction mesurable φ qui à $t \in K$ associe $(f_n(t,\cdot))_n$ où les fonctions f_n sont celles de la Proposition 3. Alors

$$\text{si } t \notin A: \quad (f_n(t,\cdot)) \text{ converge faiblement vers } 0$$
$$\text{et si } t \in A: \quad \exists x_t \text{ tel que } \limsup f_n(t,x_t) = 1 \quad \text{et} \quad \liminf f_n(t,x_t) = 0.$$

L'image réciproque par φ des suites faiblement convergentes est donc A^c.

Prenons une partie analytique non borélienne dans K, il en existe (voir [5]).

Les ensembles (i) et (ii) ne peuvent former un borélien de $(\mathscr{C}[0,1])^{\mathbf{N}}$ sinon A^c serait borélien ce qui ne peut être.

(iii) Nous allons montrer que dans $\mathscr{C}([0,1]\times[0,1])$ les suites sans sous-suite l^1 ne forment pas un borélien de $(\mathscr{C}([0,1]\times[0,1]))^{\mathbf{N}}$.

L'ensemble $\mathscr{C}([0,1]\times[0,1])$ étant séparable est isométrique à un sous-espace fermé de $\mathscr{C}[0,1]$, (voir [6]), il en résultera que dans $\mathscr{C}[0,1]$ nous avons le même résultat.

Prenons une suite (g_n) dans $\mathscr{C}[0,1]$ qui soit bornée et équivalente à la base canonique de l^1 et posons

$$F_n(t,x,y) = f_n(t,x)\times g_n(y)$$

où la suite $f_n(\cdot,\cdot)$ est celle de la Proposition 3. Alors

$$\text{si } t \notin A: \quad \lim_n F_n(t,x,y) = 0 \quad \text{pour tout } (x,y) \text{ appartenant à } [0,1]\times[0,1]$$

et si $t \in A$: il existe une sous-suite (f_{n_K}) de (f_n) telle que

$$\lim_K f_{n_K}(t,x_t) = 1.$$

On ne peut extraire de la suite $F_{n_K}(t,\cdot,\cdot) = f_{n_K}(t,\cdot)\times g_{n_K}(\cdot)$ une suite F_{n_K}' de Cauchy faible. En effet on aurait pour tout y

$$\lim_K F_{n'_K}(t,x_t,y) = \lim_K f_{n'_K}(t,x_t)\times g_{n'_K}(y) = \lim_K g_{n'_K}(y).$$

La suite $(g_{n'_K})$ serait de Cauchy faible, ce qui ne peut être.

Il résulte de [7] que pour chaque t appartenant à A la suite $(F_n(t,\cdot,\cdot))$ possède une sous-suite équivalente à la base canonique de l^1. L'application

φ; $t \in K \to (F_n(t,\cdot,\cdot)) \in (\mathscr{C}([0,1] \times [0,1]))^{\mathbf{N}}$ est continue donc mesurable. L'image réciproque des suites bornées sans sous-suite l^1 est A^c. Cet ensemble ne peut donc pas être un borélien de $(\mathscr{C}([0,1] \times [0,1]))^{\mathbf{N}}$.

(iv) On peut reprendre la démonstration du (iii) mais on peut, aussi donner l'argument suivant qui n'utilise pas le théorème de Rosenthal [7]. On considère la suite F_n définie par:

$$F_n(t,x,y) = f_n(t,x) \times k_n(y) \quad \text{de} \quad \mathscr{C}(K \times [0,1] \times [0,1])$$

où $k_n(\cdot)$ est une suite de Cauchy faible non faiblement convergente dans $\mathscr{C}[0,1]$ et la suite $f_n(\cdot,\cdot)$ est celle de la Proposition 3. Alors

si $t \notin A$: $\quad \lim f_n(t,x) \times k_n(y) = 0$

et si $t \in A$: il existe une suite f_{n_K} telle que $\lim\limits_{K} f_{n_K}(t,x_t) = 1$.

On ne peut alors extraire de la suite $f_{n_K}(t,\cdot,\cdot) \times k_{n_K}(\cdot)$ une suite faiblement convergente car alors la suite extraite $k_{n_K}(\cdot)$ serait faiblement convergente.

Théorème 2. *Dans $(\mathscr{C}[0,1])^{\mathbf{N}}$ les ensembles suivants forment des Δ_2^1 universellement mesurables non analytiques.*

(i) *Les suites sans sous-suite l^1 et non relativement faiblement compactes.*
(ii) *Les suites sans sous-suite l^1 et non faiblement convergentes dans $\mathscr{C}[0,1]$.*
(iii) *Les suites sans sous-suite l^1 et non de Cauchy faible.*
(iv) *Les suites relativement faiblement compactes et non de Cauchy faible.*
(v) *Les suites relativement faiblement compactes et non faiblement convergentes.*
(vi) *Les suites de Cauchy faible et non faiblement convergentes.*

Démonstration. On se place dans $\mathscr{C}([0,1] \times [0,1])$ comme précédemment.

(i) On prend une suite $h_n(\cdot)$ de Cauchy faible et non faiblement convergente dans $\mathscr{C}[0,1]$ et une suite $(k_n(\cdot))$ équivalente à la base canonique de l^1 et bornée dans $\mathscr{C}[0,1]$.

On considère la suite F_n de $\mathscr{C}(K \times [0,1] \times [0,1])$ définie par

$$F_{2p}(t,x,y) = f_p(t,x) \times k_p(y)$$

et

$$F_{2p+1}(t,x,y) = h_p(y).$$

Alors si $t \notin A$ la suite $F_n(t,\cdot,\cdot)$ n'est pas relativement faiblement compacte puisque la suite $h_p(\cdot)$ n'est pas faiblement convergente. Elle ne contient pas de sous-suite l^1 comme réunion de deux suites de Cauchy faible.

Si $t \in A$, il existe une sous-suite de $f_p(t,\cdot)$ telle que $\lim\limits_i f_{p_i}(t,x_t) = 1$.

On ne peut extraire de $f_{p_i}(t,\cdot) \times k_{p_i}(\cdot)$ qu'une suite équivalente à la base canonique de l^1. En posant $\varphi(t) = (F_n(t,\cdot,\cdot))_n$ on obtient une application mesurable de K dans $(\mathscr{C}([0,1] \times [0,1]))^{\mathbf{N}}$ telle que si $t \notin A$, $\varphi(t)$ est une suite sans sous-suite l^1 et non relativement faiblement compacte et si $t \in A$, $\varphi(t)$ contient une sous-suite l^1. L'image réciproque par φ de (i) est donc A^c.

L'ensemble des suites (i) ne peut être analytique car son image réciproque, A serait co-analytique et donc A serait borélien.

(ii) La démonstration du (i) s'applique aussi pour conclure.

(iii) On reprend l'argument de (i) en imposant aux fonctions $k_p(\cdot)$ de prendre des valeurs supérieures à 1 (par exemple).

(iv) L'argument est analogue en prenant

$$F_{2p}(t,x,y) = f_p(t,x) \times h_p(y)$$

où h_p est de Cauchy faible non faiblement convergente dans $\mathscr{C}[0,1]$ et

$$F_{2p+1}(t,x,y) = g_p(y)$$

où $g_p(\cdot)$ est faiblement convergente vers une fonction g de $\mathscr{C}[0,1]$ supérieure à 1 pour tout y.

(v) En reprenant (iv) on obtient (v).

(vi) On reprend la démonstration donnée dans [1].

Posons

$$g_n(t,x) = \begin{cases} f_n(t,x) & \text{si } 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \text{ ou } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leqq x \leqq 1 \\ n\left(1 - f_n(t,\frac{1}{2} - \frac{1}{n})\right)x + 1 - \frac{n}{2}\left(1 - f_n(t,\frac{1}{2} - \frac{1}{n})\right) & \text{si } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leqq x \leqq \frac{1}{2} \\ n\left(f_n(t,\frac{1}{2} + \frac{1}{n}) - 1\right)x + 1 - \frac{n}{2}\left(t,\frac{1}{2} + \frac{1}{n})\right) - 1\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \end{cases}$$

pour $n \geqq 3$ et $g_n(t,x) = f_n(t,x)$ pour $n < 3$.

Prenons $h_n(t,x)$ défini par les relations

$$h_{2n}(t,x) = g_n(t,x); \quad h_{2n+1}(t,x) = g_n(t,x) + f_n(t,x)$$

$$\forall t \notin A, \quad \lim_n h_n(t,x) = g(x) \text{ existe.}$$

De plus $g(x) = 0$ si x est différent de $\frac{1}{2}$ et $g(\frac{1}{2}) = 1$. L'application

$$\varphi : t \to \left(x \to h_n(t,x)\right)$$

étant mesurable, l'ensemble (vi) ne peut être analytique car son image réciproque par φ est A^c.

III.

Nous nous proposons de donner dans cette partie une caractérisation des Banach réticulés faiblement séquentiellement complets. Quelques notations nous sont nécessaires.

Soit $\mathfrak{S} = \mathbb{N}^{*\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des suites d'entiers strictement positifs indexés par $\mathbb{N}^*$. Nous désignerons par $\mathscr{S}$ l'ensemble dénombrable des suites finies d'entiers strictement positifs et pour un élément $\sigma \in \mathfrak{S}$,

$$\sigma = (s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots), \quad s_n \in \mathbb{N}^*,$$

nous noterons σ/n la suite finie $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Soit A un analytique vrai de $\mathbb{N}^{*\mathbb{N}^*}$ c'est-à-dire une partie image continue d'un borélien de $\mathbb{N}^{*\mathbb{N}^*}$ et non borélienne. Il en existe (voir [5]) de même qu'il existe un système déterminant régulier formé d'ouverts fermés $H(s)$, $s \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$A = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}} \bigcap_{K=1}^{\infty} H(\sigma/k).$$

Rappelons qu'un P.C.A. est l'image continue d'un co-analytique et qu'un Δ_2^1 est un P.C.A. de complémentaire P.C.A. (voir [5]).

Proposition 4. *Soit A un analytique de $\mathfrak{S} = \mathbb{N}^{*\mathbb{N}^*}$. Il existe une fonction mesurable de $\mathfrak{S}$ dans $c_0^{\mathbb{N}}$ telle que:*

si $\sigma \in A$: $\quad \varphi(\sigma) \notin$ une partie relativement faiblement complète de c_0

et si $\sigma \notin A$: $\quad \varphi(\sigma) \in$ une partie relativement faiblement complète de c_0.

Démonstration. Remarquons que $\forall s \in \mathscr{S}^*$ où $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, g définie par

$$g(s) = 2^{-s_1} + 2^{-(s_1+s_2)} + \ldots + 2^{-(s_1+s_2+\ldots+s_n)}$$

est une application de $\mathscr{S}$ dans $]0,1]$.

A chaque s associons une application $F_s\colon \mathbb{N}^{*\mathbb{N}^*} \to c_0$ de la manière suivante:

$$F_s(\sigma) = 1_{H(s)}(\sigma)(2^{-s_1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s_1 - 1}, 2^{-s_1}$$

$$+ 2^{-(s_1+s_2)}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s_2 - 1}, \ldots, 2^{-s_1} + \ldots + 2^{-(s_1+\ldots+s_n)}, 0, \ldots).$$

F_s est mesurable et on a $\|F_s(\sigma)\|_{c_0} \leqq 1$. Posons alors

$$\varphi(\sigma) = \big(F_s(\sigma)\big)_s \quad \text{et} \quad \Gamma(\sigma) = \{F_s(\sigma);\ s \in \mathbb{N}^*\}$$

1°) Si $\sigma \in A$, alors il existe $t \in \mathscr{S}^*$ tel que $\sigma \in \bigcap_{K=1}^{\infty} H(t/K)$ où $t = (s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots)$. Alors $\Gamma(\sigma)$ contient la suite suivante:

$$x_n = (2^{-s_1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s_1 - 1}, 2^{-s_1} + 2^{-(s_1+s_2)}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s_2 - 1}, \ldots, 2^{-s_1}$$

$$+ 2^{-(s_1+s_2)} + \ldots + 2^{-(s_1+s_2+\ldots+s_n)}, 0, 0).$$

La suite (x_n) n'est pas relativement faiblement complète car elle converge vers l'élément x de $l^\infty \setminus c_0$, où

$$x = (2^{-s_1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s_1 - 1}, 2^{-s_1} + 2^{-(s_1+s_2)}, \ldots).$$

2°) Si $\sigma \notin A$ nous allons montrer que $\Gamma(\sigma)$ est relativement faiblement compacte. Considérons une suite x_n de $\Gamma(\sigma)$. Posons

$$x_n = F_{(s_1^n, s_2^n, \ldots, s_{p(n)}^n)}(\sigma).$$

Supposons $\operatorname{card}(\sigma(\sigma)) = +\infty$, sinon la preuve est immédiate.

1^er^ CAS.

$$- \sup_n s_1^n + s_2^n + \ldots + s_{p(n)}^n = N < +\infty.$$

On peut extraire de (x_n) une suite qui converge fortement.

2^ème^ CAS.

$$- \sup_n s_1^n + s_2^n + \ldots + s_{p(n)}^n = +\infty.$$

Il existe un indice N tel que $\sup_n s_N^n = +\infty$. Si ce n'était le cas on aurait $\forall n \in \mathbf{N}^*$; $\sup_n s_N^n < +\infty$. Il existerait alors une infinité de n pour lesquels $s_1^n = s_1'$ et donc $\sigma \in H(s_1^n) = H(s_1')$. De même il existerait une infinité de n parmi ceux-ci pour lesquels $s_2^n = s_2'$ et $\sigma \in H\big((s_1', s_2')\big)$.

En itérant le procédé on trouverait un élément $\sigma' \in \mathscr{S}^*$ tel que $\sigma \in H(\sigma'/K)$ pour tout K. On aurait alors $\sigma \in \bigcap_{K=1}^{\infty} H(\sigma'/K)$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $\sigma \notin A$.

Considérons

$$N_0 = \min\{N; \sup_n s_N^n = +\infty\}.$$

Il existe une suite n_K telle que $\lim_K s^K_{N_0} = +\infty$. La suite x_{n_K} admet une sous-suite y_p telle que les $N_0 - 1$ premières coordonnés soient les mêmes.

Considerons l'élément x de c_0 ayant ces coordonnées. La suite (y_p) converge faiblement vers x. En effet $\forall \lambda \in l^1$, $\lambda = (\lambda_n)$

$$|\langle \lambda, y_p\rangle - \langle \lambda, x\rangle| \leqq \sum_{s=s^p_N}^{+\infty} |\lambda_i| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

ce qui achève la démonstration de la proposition.

THÉORÈME 3. *Soit E un espace de Banach réticulé. Les propositions suivantes sont équivalentes*:

(i) *E est faiblement séquentiellement complet.*

(ii) *Pour tout sous-espace séparable fermé F de E les suites relativement faiblement complètes forment un borélien de $F^{\mathbf{N}}$.*

DÉMONSTRATION. (i) $\Rightarrow$ (ii) est immédiat.

(ii) $\Rightarrow$ (i) résulte de la Proposition 4 et de la caractérisation des Banach réticulés faiblement séquentiellement complets (voir [6]) de Bessaga et Pelczynski comme étant ceux ne contenant pas de copie isomorphe de c_0.

REFERENCES

1. I. Assani, *Quelques résultats liés aux ensembles decomposables de L^1_E*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 294 (1982), 641–644.
2. I. Assani, *Une caractérisation des Banach réticulés faiblement séquentiellement complets*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 298 (1984), 445–448.
3. I. Assani et H. A. Klei, *Parties décomposables compactes de L^1_E*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 294 (1982), 533–536.
4. H. A. Klei, *Compacité faible de parties décomposables de L^1_E*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 296 (1983), 965–968.
5. K. Kuratowski et A. Mostowski, *Set theory*, Stud. Logic Foundations Math., vol. 86. North-Holland Publishing Co., Amsterdam - New York - Oxford; PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1976.
6. J. Lindenstrauss et L. Tzafriri, *Classical Banach spaces*, I; *Sequence spaces* (Ergeb. Math. Grenzgeb. 92) Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1977.
7. H. P. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing l^1*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 71 (1974), 2411–2413.
8. J. Saint-Raymond, *Communication orale.*
9. J. Saint-Raymond, *Convergence d'une suite de fonctions*, Bull. Sci. Math. (2) 96 (1972), 145–150.

UNIVERSITE PARIS VI
LABORATOIRE DE PROBABILITÉS
4 PLACE JUSSIEU
TOUR 56 - 3ÈME ETAGE
75230 PARIS CEDEX 05
FRANCE