MATH. SCAND. 59 (1986), 305–309

ÜBER EINE ASYMPTOTISCHE FORMEL VON RIEGER BETREFFEND DIE FORD–SPEISER-KONFIGURATION

WERNER GEORG NOWAK

Für einen gekürzten Bruch a/b im Einheitsintervall $[0,1[$ sei $C(a/b)$ die abgeschlossene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(a/b, 1/2b^2)$ und Radius $1/2b^2$ (der sogenannte Ford-Kreis). Zwei verschiedene Ford-Kreise $C(a/b)$ und $C(c/d)$ berühren einander genau dann, wenn $ad-bc=\pm 1$ gilt, also a/b und c/d Nachbarn in einer geeigneten Fareyfolge sind (andernfalls sind sie disjunkt). Es sei nun $ad-bc=\pm 1$ und h/k die Mediante von a/b und c/d (also $h=a+c$, $k=b+d$), dann bilden die einander berührenden Kreise $C(a/b)$, $C(c/d)$ und $C(h/k)$ ein Kreisbogendreieck; die abgeschlossene Scheibe seines Inkreises bezeichnen wir mit $K(b,d)$. (Wegen a/b, $c/d \in [0,1[$ und $ad-bc=\pm 1$ sind a,c durch die Vorgabe von b,d eindeutig bestimmt.)

Eine neuere Arbeit von G. J. Rieger [4] untersucht nun u.a. die Frage, wie dicht diese Kreisscheiben $K(b,d)$ in der Nähe der x-Achse liegen, und zwar in der folgenden quantitativen Formulierung: Für (kleines) $u>0$ sei g_u die Gerade durch $(0,u)$ und $(1,u)$ und $W(u)$ die Summe der Längen aller (endlich vielen) Strecken, die den Durchschnitt von g_u mit der Vereinigung aller $K(b,d)$ bilden. Dann erhielt Rieger die asymptotische Beziehung

$$W(u) = \frac{7\sqrt{3}}{6} - 2 + O(\sqrt{u}\log(2/u)) \qquad (u \to 0+)\,. \tag{1}$$

(Für weitere Details sowie eine graphische Darstellung des Sachverhalts sei der Leser auf die Originalarbeit [4] verwiesen. Eine umfassende und sehr gut lesbare Zusammenstellung dieser und verwandter Probleme findet man übrigens bei B. Meister [2].)

Ziel der vorliegenden Note ist eine Verschärfung der Abschätzung (1). Wir erhalten zunächst

Eingegangen am 1. Juli 1985.

Satz 1. *Es gilt*

$$W(u) = \frac{7\sqrt{3}}{6} - 2 + O(\sqrt{u}\, l_0(1/u)) \quad (u \to 0+)\,, \tag{2}$$

wobei die Abkürzung $l_j(t) = \exp\left(-c_j(\log t)^{3/5}(\log\log t)^{-1/5}\right)$ *mit* $c_j > 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ *verwendet wird.*

(Man beachte, daß $l_0(1/u) \to 0$ während $\log(2/u) \to \infty$ für $u \to 0+$.) Unter Annahme der Riemannschen Vermutung läßt sich dieses Ergebnis sogar noch wesentlich verbessern:

Satz 2. *Falls* $\zeta(s) \neq 0$ *für* $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$, *dann folgt (für jedes* $\varepsilon > 0$)

$$W(u) = \frac{7\sqrt{3}}{6} - 2 + O(u^{6/11-\varepsilon}) \quad (u \to 0+)\,. \tag{3}$$

Unsere Verschärfung beruht auf einer verfeinerten Anwendung der Gitterpunkttheorie, der Verwendung tiefliegender Ergebnisse über die Möbiussche μ-Funktion sowie einer geeigneten Änderung der Summationsreihenfolge.

Beweis von Satz 1. Es sei $F(u,v) = \frac{1}{4}(v^{-2} - (8u - 7/v)^2)^{1/2}$ für $3/4v \leqq u \leqq 1/v$ (und 0 sonst), dann ist nach [4] $F(u, Q(b,d))$ mit $Q(b,d) := b^2 + bd + d^2$ die Länge des Segments der Geraden g_u mit $K(b,d)$ (da der Radius von $K(b,d)$ gleich $1/8Q(b,d)$ und die Ordinate des Mittelpunkts $7/8Q(b,d)$ ist). Folglich gilt (vgl. [4, Formel (7)])

$$W(u) = \sum_{\mathrm{SB}} F(u, Q(b,d)) \tag{4}$$

mit dem Summationsbereich ($b, d \in \mathbb{Z}$)

$$\mathrm{SB}\colon\ b > 0, \quad d > 0, \quad \operatorname{ggT}(b,d) = 1, \quad 3/4u \leqq Q(b,d) \leqq 1/u\,.$$

Wir verwenden nun folgende Hilfsresultate:

Lemma 1. *Es sei* $A(x)$ *die Anzahl der Gitterpunkte* $(b,d) \in \mathbb{Z}^2$ *mit*

$$Q(b,d) = b^2 + bd + d^2 \leqq x, \quad b > 0, \ d > 0\,. \tag{5}$$

Dann gilt für $x \to \infty$

$$A(x) = A_1 x - \sqrt{x} + O(x^{1/3}) \quad (A_1 = \pi/3\sqrt{3})\,. \tag{6}$$

Beweis. Dies folgt durch unmittelbare Übertragung des im Buch von F. Fricker [1, S. 41–44], für den Kreis durchgeführten Arguments. Der zusätzliche Term $-\sqrt{x}$ ergibt sich daraus, daß die Punkte auf den Koordinatenachsen nicht mitgezählt werden.

LEMMA 2. *Es sei* $R(x)$ *die Anzahl aller* $(b,d) \in \mathbf{Z}^2$ *mit* $\operatorname{ggT}(b,d)=1$, *für die* (5) *erfüllt ist. Dann gilt für* $x \to \infty$

$$R(x) = A_2 x + O(\sqrt{x}\, l_1(x)) \quad (A_2 = 2/\pi\sqrt{3})\,. \tag{7}$$

BEWEIS. Nach einem elementaren Lemma von Vinogradov folgt

$$R(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) A(x/k^2) = \sum_{k \leqq y} + \sum_{k > y} =: S_1 + S_2 \tag{8}$$

wobei μ die Möbiussche Funktion bezeichnet und $y \in \mathbf{N}$ noch verfügbar bleibt. Nun gilt bekanntlich (vgl. Walfisz [7, S. 191])

$$M(t) := \sum_{k \leqq t} \mu(k) = O(t l_2(t)) \quad (t \to \infty)\,, \tag{9}$$

daraus folgt mittels Abelscher Umformung

$$\sum_{k \leqq y} \mu(k) k^{-2} = \sum_{k=1}^{\infty} - \sum_{k>y} = \frac{6}{\pi^2} + O(y^{-1} l_1(y))$$

und

$$\sum_{k \leqq y} \mu(k) k^{-1} = -\sum_{k>y} \mu(k)^{-1} = O(l_1(y))\,.$$

Daher ergibt sich durch Einsetzen von (6) in (8) zunächst

$$\begin{aligned} S_1 &= A_1 x \sum_{k \leqq y} \mu(k) k^{-2} - \sqrt{x} \sum_{k \leqq y} \mu(k) k^{-1} + O\Big(x^{1/3} \sum_{k \leqq y} k^{-2/3}\Big) \\ &= A_2 x + O(x y^{-1} l_1(y)) + O(\sqrt{x}\, l_1(y)) + O(x^{1/3} y^{1/3})\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Andererseits folgt durch Abelsche Umformung

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k>y} M(k)\big(A(x/k^2) - A(x/(k+1)^2)\big) - M(y) A(x/(y+1)^2) \\ &= O\Big(\sum_{k>y} k l_2(k) |A(x/k^2) - A(x/(k+1)^2)|\Big) + O(x y^{-1} l_2(y)) \\ &= O\Big(\sum_{k>y} l_2(k) A(x/k^2)\Big) + O(x y^{-1} l_2(y)) = O(x y^{-1} l_1(y))\,, \end{aligned}$$

wobei im ersten O-Term die Abelsche Umformung rückgängig gemacht wurde unter Beachtung der Tatsache, daß $A(x/k^2)$ in k monoton abnimmt und für genügend großes k überhaupt 0 wird. Durch Zusammenfassen der Ergebnisse für S_1 und S_2 und die Wahl $y=[\sqrt{x}]$ erhält man nun die Behauptung (7) von Lemma 2.

Der Beweis von Satz 1 wird nun wie bei Rieger [4] vervollständigt. Mit $X=[3/4u]$, $Y=[1/u]$ folgt aus (4) durch Abelsche Umformung

$$\begin{aligned} W(u) &= \sum_{X<n\leqq Y} (R(n)-R(n-1))F(u,n) \\ &= \sum_{X<n<Y} R(n)(F(u,n)-F(u,n+1))+R(Y)F(u,Y)-R(X)F(u,X+1)\,. \end{aligned}$$

Wir verwenden nun für $R(n)$ die Darstellung (7), machen für die Hauptterme $A_2 n$ die Abelsche Umformung wieder rückgängig und beachten, daß $F(u,v)$ bei festem u für $3/4u \leqq v \leqq 6/7u$ wächst und für $6/7u \leqq v \leqq 1/u$ abnimmt. Dies ergibt

$$\begin{aligned} W(u) &= A_2 \int_{3/4u}^{1/u} F(u,v)\,\mathrm{d}v + O(\sqrt{Y} l_1(Y) \max_v F(u,v)) \\ &= A_2 \int_{3/4}^{1} F(1,w)\,\mathrm{d}w + O(\sqrt{Y} l_1(Y) u) \\ &= \frac{7\sqrt{3}}{6} - 2 + O(\sqrt{u}\, l_0(1/u))\,, \end{aligned}$$

die Behauptung von Satz 1.

Beweisskizze von Satz 2. Die Argumentation verläuft ganz analog, nur wird statt (9) die schärfere Abschätzung

$$M(t) = O(t^{1/2+\delta}) \quad (\delta>0)$$

verwendet, die bekanntlich (vgl. z.B. [5, S. 315]) zur Riemannschen Vermutung äquivalent ist. Anstelle von Lemma 2 ergibt sich dann

$$R(x) = A_2 x + O(x^{5/11+\varepsilon'}) \quad (\varepsilon'>0)\,, \tag{7'}$$

wobei im Beweis $y=[x^{4/11}]$ zu wählen ist. (Man vgl. dazu auch B. Z. Moroz [3], von dem auch die Beweisidee von Lemma 2 übernommen wurde.) Der letzte Beweisschritt verläuft dann wieder genau wie bei Satz 1.

Abschliessende Bemerkungen.

1. Das Restglied in Satz 2 läßt sich zu $O(x^\theta)$ mit einem $\theta>6/11$ verbessern, indem man statt (6) eine Verschärfung mit $O(x^{\theta'})$, $\theta'<1/3$, verwendet, die z.B. nach J. G. Van der Corput [7] gewonnen werden kann.

2. Wie bei Rieger [4] kann man die gesamte Problemstellung auf Kreise $C_\lambda(a/b)$ mit Mittelpunkt $(a/b, 1/\lambda b^2)$ und Radius $1/\lambda b^2$ verallgemeinern. Für $\sqrt{3} < \lambda < 3$ läßt sich Riegers Satz 1′ wörtlich im Sinne unserer Sätze 1 und 2 verschärfen.

LITERATUR

1. F. Fricker, *Einführung in die Gitterpunktlehre* (Lehrbücher Monograph. Geb. Exakten Wissensch., Math. Reihe 73), Birkhäuser Verlag, Basel - Boston - Stuttgart, 1982.
2. B. Meister, *Ford-Kreise*, Staatsexamensarbeit, Justus-Liebig-Universität, Gießen, 1985.
3. B. Z. Moroz, *On the number of lattice points in plane domains*, Monatsh. Math. 99 (1985), 37–42.
4. G. J. Rieger, *Zur Kreisfigur von Ford und Speiser*, Math. Scand. 55 (1984), 22–32.
5. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, Clarendon Press, Oxford, 1951.
6. J. G. Van der Corput, *Neue zahlentheoretische Abschätzungen*, Math. Ann. 89 (1923), 215–254.
7. A. Walfisz, *Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie* (Math. Forschungsber. 15), VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1963.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT FÜR BODENKULTUR
GREGOR MENDEL-STRASSE 33
A-1180 WIEN
ÖSTERREICH