MATH. SCAND. 60 (1987), 96–108

OSCILLATIONS DE FONCTIONS ALÉATOIRES GAUSSIENNES À VALEURS VECTORIELLES

X. FERNIQUE

Sommaire.

On étend aux fonctions aléatoires gaussiennes à valeurs vectorielles les résultats de Ito et Nisio sur les oscillations des fonctions aléatoires gaussiennes à valeurs réelles; les oscillations utilisées sont à valeurs vectorielles. Les résultats obtenus permettent d'énoncer une généralisation adaptée de l'alternative de Belayev en mettant pourtant en évidence des phénomènes nouveaux de singularité.

1. Oscillations de fonctions à valeurs vectorielles, définitions, propriétés générales.

Soient (T, δ) un espace pseudométrique, S une partie dense de T et E un espace de Banach; soit de plus f une application de S dans E, nous appellerons (S, δ)-oscillation de f et nous noterons $W_S(f)$ la fonction sur T à valeurs dans les parties fermées de E définie par

1.1. $$W_S(f,t) = \bigcap_{u>0} \overline{\{f(s)-f(s'), \delta(t,s) < u,\ \delta(t,s') < u, (s,s') \in S \times S\}}.$$

De même pour tout $t \in T$ et tout $u > 0$, nous appellerons (S, δ)-oscillation de f sur la boule $B(t,u)$ de centre t et de rayon u l'ensemble

1.2. $$V_S(f,t,u) = \bigcap_{v>0} \overline{\{f(s)-f(s'), s \in B(t,u) \cap S,\ s' \in B(t,u) \cap S,\ \delta(s,s') < v\}}.$$

On vérifie d'après ces définitions que ces oscillations possèdent les propriétés suivantes:

1.3.1. $V_S(f,t,u)$ est une fonction croissante de u.

1.3.2. Si f est uniformément continue sur (S, δ), alors $V_S(f,t,u)$ se réduit à $\{0\}$; de plus pour toute autre fonction g, on a alors

Reçu le 7 octobre 1985.

$V_S(f+g, t, u) = V_S(g, t, u)$.

1.3.3 Si $\delta(t, t')$ est inférieur à $v > 0$, alors $V_S(f, t, u)$ est contenu dans $V_S(f, t', u+v)$.

1.3.4. $W_S(f, t)$ est égal à l'intersection $\bigcap_{u>0} V_S(f, t, u)$.

1.3.5. Pour qu'il existe une fonction g sur T à valeurs dans E qui soit continue sur (T, δ) et coïncide avec f sur S, il faut que pour tout $t \in T$, $W_S(f, t)$ se réduise à $\{0\}$; de plus cette condition est suffisante si l'image de f est relativement compacte.

Si f est en fait définie sur T, on peut aussi introduire la (S, δ)-demi-oscillation de f, c'est la fonction sur T à valeurs dans les parties fermées de E définie par

1.4. $$U_S(f, t) = \bigcap_{u>0} \overline{\{f(s)-f(t), s \in B(t, u) \cap S\}};$$

on vérifie que $W_S(f, t)$ contient l'ensemble des différences des couples d'éléments de $U_S(f, t)$; il y a en fait égalité si la trajectoire de f sur S est relativement compacte dans E. Sous une telle hypothèse, la notion d'oscillation devient beaucoup plus maniable, on a par exemple:

PROPOSITION 1.5. *On suppose que la trajectoire de f sur S est contenue dans une partie compacte K de E; dans ces conditions, pour tout $u > 0$, il existe une famille finie $(y_1, \ldots, y_n)$ de formes linéaires continues sur E ne dépendant que de K et de u telle que pour tout $t \in T$, on ait*

$$\sup\{|x|, x \in W_S(\langle f, y_k\rangle, t), k \in [1, n]\} \leqq 1 \Rightarrow \sup\{\|x\|, x \in W_S f, t)\} \leqq u.$$

En effet puisque K est compact, la topologie de E et la topologie affaiblie y coïncident; il existe donc une famille finie $(y_1, \ldots, y_n)$ de formes linéaires continues sur E telle que pour tout couple (x, x') d'éléments de K, on ait

$$\sup\{|\langle x - x', y_k\rangle|, 1 \leqq k \leqq n\} \leqq 1 \Rightarrow \|x - x'\| \leqq u,$$

et on constate que cette famille vérifie les propriétés énoncées.

2. Oscillations de fonctions aléatoires gaussiennes à valeurs vectorielles.

Dans ce paragraphe, X désigne une fonction aléatoire gaussienne centrée (f.a.g.) sur un espace pseudométrique séparable (T, δ) à valeurs dans un espace de Banach séparable E; E' est le dual topologique de E et E'_1 en est la boule unité; on note $\hat{d}$ et D les pseudométriques sur T définies par

$$\hat{d}^2(s,t) = \sup\{E\langle X(s)-X(t), y\rangle^2, y \in E'_1\}, \quad D^2(s,t) = E\|X(s)-X(t)\|^2,$$

enfin S est une partie dénombrable et dense de T. *On suppose dans tout ce paragraphe que l'application canonique de* (T,δ) *dans* $(T,\hat{d})$ *est uniformément continue.* On se propose d'étudier les propriétés des oscillations $\{W_S(X(\omega),t),\ \omega \in \Omega, t \in T\}$. Les résultats principaux sont contenus dans les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME 2.1. *La* (S,δ)*-oscillation de* X *est non aléatoire au sens suivant: il existe une partie négligeable* N_S *de* Ω *et une application* w_S *de* T *dans l'ensemble des parties fermées de E telles que*

2.1.1 $$\forall \omega \notin N_S, \forall t \in T, \quad W_S(X(\omega),t) = w_S(t).$$

Si de plus l'application canonique de (T,δ) *dans* (T,D) *est continue, alors la fonction* w_S *est indépendante de* S, *c'est-à-dire qu'il existe une application* w *de* T *dans l'ensemble des parties fermées de E et pour tout partie S dénombrable dense de T, il existe une partie négligeable* N_S *de* Ω *telles que*

2.1.2. $$\forall \omega \notin N_S, \forall t \in T, \quad W_S(X(\omega),t) = w(t).$$

THÉORÈME 2.2. *La* (S,δ)*-demi-oscillation de* X *est non aléatoire au sens suivant: il existe une application* u_S *de* T *dans l'ensemble des parties fermées de E et pour tout élément t de T une partie négligeable* $N_S\,(t)$ *de* Ω *telles que*

2.2.1. $$\forall t \in T, \forall \omega \notin N_S(t), \quad U_S(X(\omega),t) = u_S(t).$$

Si de plus l'application canonique de (T,δ) *dans* (T,D) *est continue, alors* u_S *est indépendante de* S.

Nous ne démontrerons que le Théorème 2.1., la preuve du Théorème 2.2. n'apportant aucun élément supplémentaire. Le schéma de preuve sera très semblable à celui utilisé dans le cas réel par Ito et Nisio [5] sous la forme développée dans [2]. L'idée fondamentale est d'utiliser un développement de Karhunen-Loeve de X pour montrer que les ensembles $V_S(X(\omega),t,u)$ sont p.s. non aléatoires; nous développerons donc d'abord les notions nécessaires sur les espaces autoreproduisants asociés aux f.a.g. à valeurs vectorielles; nous résoudrons aussi les difficultés liées à la measurabilité de l'application $\omega \to V_S(X(\omega),t,u)$ en utilisant pour cela une technique efficace dans l'étude de la loi vectorielle du logarithme itéré (où l'ensemble limite est effectivement une $(\mathbf{N}, \delta)$-demi-oscillation au point à l'infini pour une fonction aléatoire sur $\bar{\mathbf{N}}$ à valeurs vectorielles).

2.3. Notions sur les espaces autoreproduisants.

2.3.1. A la f.a.g. X à valeurs vectorielles, est associé la f.a.g. $\tilde{X}$ sur $T \times E$ à valeurs réelles définie par

$$\forall t \in T, \forall y \in E', \quad \langle X(t), y \rangle = \tilde{X}(t, y);$$

à tout élément $\tilde{h}$ de l'espace autoreproduisant $\tilde{H}$ lié à $\tilde{X}$ est associé un élément k de $L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ et on a

$$\forall t \in T, \forall y \in E', \quad \tilde{h}(t, y) = \int k \tilde{X}(t, y) dP.$$

Ceci implique que pour tout $t \in T$, l'application $y \to \tilde{h}(t, y)$ est définie par l'élément $h(t) = \int k X(t) dP$ de l'espace autoreproduisant $H(t)$ lié à $X(t)$; puisque $X(t)$ est un vecteur gaussien à valeurs dans E, $h(t)$ est un élément de E et on a

$$\forall t \in T, \forall y \in E', \quad \langle h(t), y \rangle = \tilde{h}(t, y);$$

il en résulte en particulier que pour tout couple (s, t) d'éléments de T et tout élément y de E'_1, on a

$$\langle h(s) - h(t), y \rangle = \int k \langle X(s) - X(t), y \rangle dP \leqq \|k\|_{L^2} (E\langle X(s) - X(t), y \rangle^2)^{1/2},$$

et donc

$$\|h(s) - h(t)\|_E \leqq \|\tilde{h}\|_{\tilde{H}} \hat{d}(s, t);$$

ceci signifie que l'application h de T dans E est uniformément continue sur $(T, \hat{d})$ et vu nos hypothèses, sur (T, δ).

2.3.2. Puisque $(T, \delta) \times (E'_1, w)$ est séparable, $\tilde{H}$ l'est aussi. Soit $(\tilde{h}_n)$ une base orthonormale de $\tilde{H}$; il existe alors une suite gaussienne normale (λ_n) telle que

$$\forall t \in T, \forall y \in E', \quad \tilde{X}(t, y) = \sum \lambda_n \tilde{h}_n(t, y) \text{ p.s.};$$

pour tout $t \in T$, $\sum \lambda_n h_n(t)$ est donc une série de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans E telle que

$$\forall y \in E', \quad P\{\langle X(t), y\rangle = \sum \lambda_n \langle h_n(t), y\rangle\} = 1\,;$$

bien que les $h_n(t)$ ne soient pas nécessairement orthonormaux dans $H(t)$ (si les λ_n ne sont pas $X(t)$-mesurables), ceci suffit pour que pour tout $t \in T$, la série $\sum \lambda_n h_n(t)$ converge p.s. dans E vers $X(t)$. Nous notons $S_n(t)$ et $R_n(t)$ la somme partielle et le reste de rang n de cette dernière série; il existe une partie négligeable N telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall \omega \notin N, \forall t \in S, \quad X(\omega, t) - S_n(\omega, t) = R_n(\omega, t)\,;$$

comme pour tout $\omega \in \Omega$, $S_n(\omega)$ est d'après 2.3.1. uniformément continue sur (T, δ), la relation ci-dessus et la propriété 1.3.2. permettent de calculer pour tout $n \in \mathbf{N}$, les oscillations de $X(\omega)$ en fonction de celles de $R_n(\omega)$.

2.4. Sur la mesurabilité des oscillations des f.a.g.

Lemme 2.4.1. *Pour tout $t \in T$, tout $u > 0$ et tout fermé F de E, l'ensemble*

$$\Omega(X, F) = \{\omega \in \Omega : F \subset V_S(X(\omega), t, u)\}$$

est mesurable pour la tribu engendrée par X; sa probabilité vaut zéro ou un.

Démonstration. Pour tout élément x de E, $\Omega(X, x)$ est l'ensemble $\{\omega \in \Omega : x \in V_S(X(\omega)), t, u)\}$ et la définition de V_S montre puisque S est dénombrable que cet ensemble est mesurable pour la tribu engendrée par X; le résultat 2.3.1. montre que pour tout entier $n, \Omega(X, x)$ est p.s. égal à $\Omega(R_n, x)$ mesurable pour la tribu engendrée par R_n; sa probabilité vaut donc zéro ou un. Soient alors F une partie fermée de E et (x_n) une suite dense dans $F, \Omega(X, F)$ est égal à l'intersection des $\Omega(X, x_n)$ et le résultat s'ensuit.

Lemme 2.4.2. *Supposons l'espace d'épreuves complet; pour tout $t \in T$, tout $u > 0$ et toute partie ouverte U de E, l'ensemble*

$$\Omega(U) = \{\omega \in \Omega : U \cap V_S(X(\omega), t, u) \neq \emptyset\}$$

est mesurable; sa probabilité vaut zéro ou un.

Démonstration. Soit U une partie ouverte de E; si $\Omega(U)$ est négligeable, la conclusion du lemme est vérifiée pour U; nous supposons donc dans la suite de la preuve que la probabilité extérieure de $\Omega(U)$ est non nulle et nous allons construire une partie mesurable A de Ω telle que

$$A \subset \Omega(U), \quad P(A) = 1,$$

et ceci établira la conclusion du lemme dans tous les cas.

Notons d'abord que puisque E est séparable, pour tout ouvert G de E et tout entier $p > 0$, il existe un recouvrement dénombrable $(G_k(G, p), k \in \mathbf{N})$ de G par des parties ouvertes de diamètre inférieur à $1/p$ dont les adhérences sont contenues dans G; si la probabilité extérieure de $\Omega(G)$ est non nulle, il existe au moins un élément k de $\mathbf{N}$ tel que la probabilité extérieure de $\Omega(G_k(G, p))$ soit aussi non nulle.

Dans ces conditions, si $P^*(\Omega(U))$ est non nulle, on construit par récurrence une suite (U_p) de parties ouvertes de E telles que

$$U_0 = U; \quad \forall p > 0, U_p \in (G_k(_{p-1}, p), k \in \mathbf{N}); \quad \forall p \geqq 0, P^*\Omega(U_p) > 0.$$

La suite $(U_p, p \geqq 0)$ engendre alors un filtre de Cauchy convergeant dans l'espace complet E vers un élément x appartenant à $\bar{U}_1$ donc à U et on a

$$\forall p > 0, \quad U_p \subset B(x, 1/p).$$

Par ailleurs pour tout entier $p > 0$, l'ensemble $\Omega(U_p)$ est contenu dans l'ensemble

$$\Omega'(p,x) = \{\forall v > 0, \exists s \in B(t,u) \cap S, \exists s' \in B(t,u) \cap S:$$
$$\delta(s,s') < v, \|X(s) - X(s') - x\| \leqq v + 1/p\}$$

mesurable pour la tribu engendrée par X et comme précédemment pour la tribu complète engendrée par R_n; puisque $P^*\Omega(U_p)$ est non nulle, $P\Omega'(p,x)$ est aussi non nulle, donc égale à 1; on note A l'ensemble $\cap_{p>0}\Omega'(p,x)$, il est de probabilité un et pour tout élément ω de A, on a

$$\forall p > 0, \exists s \in B(t,u) \cap S,$$
$$\exists s' \in B(t,u) \cap S: \delta(s,s') < 1/p, \|X(s) - X(s') - x\| < 2/p;$$

ceci signifie que A est contenu dans $\Omega(x)$ et donc dans $\Omega(U)$; on a mis en évidence un ensemble mesurable de probabilité un contenu dans $\Omega(U)$; le lemme est démontré.

2.5. Démonstration du Théorème 2.1. Pour tout $t \in T$ et tout $u > 0$, nous notons $v(t,u)$ l'ensemble $\{x : P\Omega(X,x) = 1\}$; on constate que $v(t,u)$ est fermé et que $P\Omega(X, v(t,u))$ est égale à 1; soit par ailleurs U le complémentaire ouvert de $v(t,u)$, alors pour tout $x \in U$, $P\Omega(X,x)$ est nulle et le Lemme 2.4.2. montre que la probabilité extérieure de $\Omega(U)$ est nulle. Il existe donc une partie négligeable $N(t,u)$ de Ω telle que

$$\forall \omega \notin N(t,u), \quad v(t,u) \subset V_S(X(\omega),t,u), \qquad \complement v(t,u)] \cap V_S(X(\omega),t,u) = \emptyset,$$

c'est-à-dire

2.5.1. $$\forall \omega \notin N(t,u), \quad v(t,u) = V_S(X(\omega),t,u).$$

Les propriétés des oscillations montrent que la fonction v vérifie comme elles :

2.5.2. $v(t,u)$ est une fonction croissante de u.

2.5.3. Si $\delta(t,t')$ est inférieur à $u' > 0$, alors $v(t,u)$ est contenu dans $v(t',u+u')$. On note N_S la réunion $\bigcup_{t\in S}\bigcup_{u\in \mathbf{Q}^+} N(t,u)$, c'est une partie négligeable ; on pose aussi $w_S(t)$ égal à l'intersection $\bigcap_{u>0} v(t,u)$, on va montrer que N_s et w_S ainsi construits vérifient la conclusion 2.1.1. du théorème.

En effet pour tout $t\in T$ et tout couple (u,u') de nombres > 0, puisque S est dense dans T, il existe un élément s de S et un nombre u'' tels que

$$\delta(s,t) < u'' < u'/2, \quad u+u'' \in \mathbf{Q}^+ ;$$

d'après les propriétés 1.3.3., 2.5.1. et 2.5.2., pour tout $\omega \notin N_S$, on aura alors

$$V_S(X,(\omega),t,u) \subset V_S(X(\omega),s,u+u'') = v(s,u+u'') \subset v(t,u+u'),$$

et aussi de la même manière

$$v(t,u) \subset v(s,u+u'') = V_S(X(\omega),u+u'') \subset V_S(X(\omega),t,u+u') ;$$

il en résulte successivement

$$W_S(X(\omega),t) = \bigcap_{u>0} V_S(X(\omega),t,u) \subset \bigcap_{u>0} v(t,2u) = w_S(t),$$

$$w_S(t) = \bigcap_{u>0} v(t,u) \subset \bigcap_{u>0} V_S(X(\omega),t,u) = W_S(X(\omega),t),$$

et ces deux relations établissent la propriété 2.1.1.

Supposons maintenant l'application $(T,\delta) \to (T,D)$ continue, notons S_1, S_2 deux parties dénombrables denses de T, N_1 et N_2 les parties négligeables,

w_1 et w_2 les oscillations non aléatoires qui leur sont associées par la propriété 2.1.1. Pour tout élément s de S_1, il existe une suite $(s_n(s))$ extraite de S_2 convergeant vers s et telle que $X(s_n(s))$ converge p.s. vers $X(s)$; il existe donc une partie négligeable N_3 de Ω telle que

$$\forall \omega \notin N_3, \forall s \in S_1, \quad X(\omega, s) = \lim X(\omega, s_n(s)).$$

Soient alors $\omega \notin N_1 \cup N_2 \cup N_3, t \in T, x \in w_1(t)$ et $u > 0$; la définition de $w_1(t)$ montre qu'il existe des éléments s et s' de S_1 tels que

$$\|X(\omega, s) - X(\omega, s') - x\| \leqq u/3, \quad \delta(t, s) \leqq u/2, \quad \delta(t, s') \leqq u/2;$$

il existe aussi un entier $n > 0$ tel que

$$\begin{aligned} &\|X(\omega, s) - X(\omega, s_n(s))\| \leqq u/3, \quad \delta(s, s_n(s)) \leqq u/2, \\ &\|X(\omega, s') - X(\omega, s_n(s')\| \leqq u/3, \quad \delta(s', s_n(s')) \leqq u/2; \end{aligned}$$

on aura alors aussi

$$\|X(\omega, s_n(s)) - X(\omega, s_n(s')) - x\| \leqq u, \quad s_n(s) \in B(t, u) \cap S_2, \ s_n(s') \in B(t, u) \cap S_2,$$

et ceci montre que x appartient aussi à $w_2(t)$, établit l'inclusion $w_1(t) \subset w_2(t)$ et donc l'égalité; le théorème est démontré.

2.6. Remarques sur le champ d'application des théorèmes. Si (T, δ) est quasicompact, si X est tendu, c'est-à-dire si pour tout $u > 0$, il existe une partie compacte K de E telle que pour tout $t \in T$, $P\{X(t) \notin K\}$ soit inférieure à u, si de plus X est faiblement continue en probabilité, c'est-à-dire si pour tout élément y de E', la fonction aléatoire réelle $t \to \langle X(t), y \rangle$ est continue en probabilité, on sait [3] que les injections $(T, \delta) \to (T, D) \to (T, \hat{d})$ sont uniformément continues; dans ces conditions les hypothèses des deux théorèmes sont alors vérifiées. Ce sera en particular le cas si X est la restriction à une partie compacte T d'une f.a.g. sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^n$ stationnaire faiblement continue en probabilité.

3. Application à l'étude des trajectoires des f.a.g. stationnaires ou à accroissements stationnaires et à valeurs vectorielles.

Dans ce paragraphe, (G, δ) est un groupe métrique localement compact séparable, T en est une partie compacte d'intérieur $\mathring{T}$ que l'on suppose dense dans T; S est une partie dénombrable de $\mathring{T}$ dense dans T; E est un espace de Banach séparable; X est une f.a.g. sur G, stationnaire ou à accroissements stationnaires, à valeurs dans E et *on suppose qu'elle est faiblement continue en probabilité.*

Si $E = \mathbf{R}$, alors l'alternative de Belayev montre [1] que, soit X a p.s. des trajectoires non bornées sur S, soit il existe une f.a.g. X' équivalente à X et ayant ses trajectoires continues sur G. On se propose ici d'etudier les extensions de cette alternative aux espaces de Banach généraux. Ce ne'st pas possible dans les termes ci-dessus comme le montre l'example suivant [3]:

3.1. Exemple de f.a.g. stationnaire sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans c_0 et à trajectoires singulières. Soient (λ_n) une suite gaussienne normale et U une f.a.g. stationnaire sur $\mathbf{R}$ normalisée à valeurs réelles ayant p.s. des trajectoires continues. On suppose que

$$\lim_{t \to \infty} E(U(0)U(t)) = 0$$

de sorte que

$$E \sup\{U(t)/\sqrt{2\log(2+t)},\ t \geqq 0\} < \infty,$$

$$\lim_{T \to \infty} \sup\{U(t)/\sqrt{2\log(2+T)}, 0 \leqq t \leqq T\} = 1, \text{ p.s.};$$

soit de plus (U_n) une suite de copies de U indépendantes; pour tout $t \in \mathbf{R}$, on pose

$$X(t) = \{U_n(t\exp(n^2/2))/(n+1), n \in \mathbf{N}\}.$$

Dans ces conditions, la suite $(X_n(t))$ a même loi que la suite $(\lambda_n/(n+1))$ de sorte que $X(t)$ est p.s. un élément de l'espace c_0; ceci signifie que $X = \{X(t),\ t \in \mathbf{R}\}$ est une f.a.g. à valeurs dans c_0. Par ailleurs pour tout élément h de $\mathbf{R}$, la loi de la translatée $\tau_h X$ est déterminée par l'ensemble des

$$E(X_n(t+h)X_m(s+h)), \quad (s,t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R},\ (n,m) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N};$$

si $n \neq m$, cette espérance est nulle par l'indépendance, indépendamment de h; si $n = m$, cette espérance est aussi indépendamment de h, $E(X_n(t)X_n(s))$ puisque U_n est stationnaire: ceci montre que X est une f.a.g. stationnaire. On a de plus ([3, Théorème 1.2.])

$$E \sup_{n \in \mathbf{N}} \sup_{t \in [0,1]} |X_n(t)| \leqq \sup_{n \in \mathbf{N}} E \sup_{t \in [0,1]} \frac{U(t\exp(n^2/2))}{n+1} +$$

$$+ (\pi/2) E \sup_{n \in \mathbf{N}} (\lambda_n/(n+1));$$

les deux termes du second membre sont bornés si bien que X a p.s. des trajectoires sur $[0, 1]$ bornées dans c_0. Par contre, fixtant $u \in [0, 1]$, on a pour tout $T \geqq 1$, en choisissant n égal à la partie entière de $\sqrt{2 \log(T/u)} + 1$

$$E \sup_{\substack{0 \leqq t \leqq u \\ t \in \mathbf{Q}}} \|X(0) - X(t)\|_{c_0} \geqq E \sup_{\substack{0 \leqq t \leqq u \\ t \in \mathbf{Q}}} |X_n(0) - X_n(t)| \geqq E \sup_{0 \leqq t \leqq T} \frac{|U(0) - U(t)|}{1 + \sqrt{2 \log(T/u)}},$$

de sorte que pour tout $u \in [0, 1]$, faisant tendre T vers l'infini, on obtient

$$E \sup\{\|X(0) - X(t)\|_{c_0}, \ 0 \leqq t \leqq u, \ t \in \mathbf{Q}\} \geqq 1.$$

Pour toute f.a.g. X' équivalente à X, on aura donc:

$$\limsup_{\substack{t \to 0 \\ t \in \mathbf{Q}}} \|X'(0) - X'(t)\|_{c_0} \geqq 1 \quad \text{p.s.}$$

et les trajectoires de X' seront p.s. discontinues à l'origine.

On a pourtant dans tout espace de Banach séparable l'extension suivante de l'alternative de Belayev:

THÉORÈME 3.2. *Soit X une* f.a.g. *stationnaire ou à accroissements stationnaires sur le groupe G à valeurs dans E et faiblement continue en probabilité*; *on a alors l'alternative suivante*:

ou bien il existe une f.a.g. *X' équivalente à X ayant* p.s. *des trajectoires continues, ou bien toute* f.a.g. *X' équivalente à X a* p.s. *sur T des trajectoires qui ne sont pas relativement compactes.*

Dans la démonstration du théorème, on utilisera le lemme suivant:

LEMME 3.2.1. *Soit X une* f.a. *sur un ensemble dénombrable S à valeurs dans un espace de Banach séparable E. On note A l'ensemble*

$$\{\omega \in \Omega : \{X(\omega, t), t \in S\} \text{ est relativement compact dans } E\};$$

alors A est mesurable; *si X est gaussien, alors $P(A)$ vaut zéro ou un*; *si de plus $P(A)$ est non nul, il existe un compact K de E tel que*

$$\forall a > 0, \quad P\{\forall t \in S, \ X(t) \in K/a\} > 1 - a.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME. Soit (x_n) une suite dense dans E; puisque E est complet, les ensembles relativement compacts y sont les ensembles précompacts; dans ces conditions,

$$A = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \bigcup_{m \in \mathbf{N}} \bigcap_{t \in S} \left\{ X(t) \in \bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, 4^{-n}) \right\};$$

ceci montre que A est mesurable; supposons maintenant $P(A) > p > 0$ et X gaussien, il existe donc une application m de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad P \bigcap_{t \in S} \left\{ X(t) \in \bigcup_{m=1}^{m(n)} B(x_j, 4^{-n}) \right\} > p;$$

notons C_n l'enveloppe symétrique convexe de $(x_m, m \in [1, m(n)])$, alors C_n est compacte, convexe, symétrique et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad P\{(X(t), t \in S) \in [C_n + B(0, 4^{-n})]^S\} > p;$$

dans E^S, $(X(t), t \in S)$ est gaussien et $[C_n + B(0, 4^{-n})]^S$ est symétrique convexe, on a donc d'après les propriétés d'intégrabilité des vecteurs gaussiens (voir [4, 0.3.4.])

$$\forall a > 0, \forall n \in \mathbf{N}, \quad P\{\forall t \in S,\ X(t) \in 2^{n+3}(C_n + B(0, 4^{-n}))/(pa)\} > 1 - a2^{-(n+1)},$$

et par suite

$$P\{\forall t \in S,\ (X(t) \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} 2^{n+3}(C_n + B(0, 4^{-n}))/(pa)\} > 1 - a;$$

dans E, l'ensemble

$$K = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \overline{\{2^{n+3} C_n / p + B(0, 2^{-n+3}/p)\}}$$

est précompact et fermé donc compact, on a

$$P\{\forall t \in S,\ X(t) \in K/a\} \geqq (1 - a),$$

et en particulier

$$P(A) \geqq P\{\exists a > 0 : \forall t \in S,\ X(t) \in K/a\} = 1$$

de sorte que le lemme est démontré.

3.3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.2. Pour démontrer ce théorème, il suffit d'établir que dans ses conditions, s'il existe une f.a.g. X' équivalente à X telle que

$$P^*\{\omega\in\Omega\colon \{X'(\omega,t), t\in T\} \text{ est relativement compact}\} > 0,$$

alors il existe une f.a.g. X'' sur T coïncidant avec X' sur S et ayant p.s. des trajectoires continues sur T; il suffit donc (propriété 1.3.5.) de montrer que sous l'hypothèse indiquée, l'oscillation w_S associée à X est nulle sur T et que l'image de S par X est relativement compacte. Or cette hypothèse implique (Lemme 3.2.1.) qu'il existe un compact K de E tel que

$$P\{\exists\, a\in \mathbf{R}^+ : \forall\, t\in S,\ X(t)\in aK\} = 1,$$
$$P\{\forall\, t\in S,\ X(t)\in K\} \geqq \tfrac{1}{2}.$$

Pour tout élément y de E', les trajectoires de $\langle X, y\rangle$ sur S sont alors bornées avec probabilité supérieure à $\frac{1}{2}$; l'alternative classique de Belayev montre que p.s. les mêmes trajectoires sont aussi uniformément continues sur S de sorte que

$$\forall\, y\in E', \quad P\{\forall\, t\in T,\ W_S(\langle X(\omega), y\rangle, t) = 0\} = 1;$$

la Proposition 1.5. montre donc

$$P\{\forall\, t\in T,\ W_S(X(\omega), t) = \{0\}\} \geqq P\{\forall\, t\in S,\ X(t)\in K\} \geqq \tfrac{1}{2};$$

le Théorème 2.1. implique alors

$$P\{\forall\, t\in T,\ W_S(X(\omega), t) = \{0\}\} = 1$$

et finalement la conclusion du théorème.

RÉFÉRENCES

1. Yu. K. Belyaev, *Continuity and Hölder's conditions for sample functions of stationary Gaussian processes*, (Proc. 4th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob.), Vol. 2, pp. 23–33. Univ. California Press, Berkeley, California, 1961.
2. X. Fernique, *Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires Gaussiennes*, (École d'Eté de Prob. de Saint-Flour IV, 1974), ed. P.-L. Hennequin, (Lecture Notès i Math. 480), pp. 1–96. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.
3. X. Fernique, *Fonctions aléatoires gaussiennes à valeurs vectorielles*, á paraître.
4. X. Fernique, *Les vecteurs aléatoires gaussiennes et leurs espaces autoreproduisants*, Technical Report Series in Statist. and Probab., Ottawa Univ., 34, 1985.

5. M. Nisio et K. Ito, *On the oscillation functions of Gaussian processes*, Math. Scand. 22 (1968), 209–223.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
LABORATOIRE ASSOCIÉ AU C N.R.S.
UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR
7 RUE RENÉ DESCARTES
F-67084 STRASBOURG CEDEX
FRANCE