MATH. SCAND. 61 (1987), 39–67

SUITES INERTES DANS LES ALGÈBRES DE LIE GRADUÉES

("Autopsie d'un meurtre II")

S. HALPERIN et J.-M. LEMAIRE

A John Moore, pour son 60ème anniversaire.

Introduction

Le point de départ de ce travail est la question suivante, abordée par l'un de nous dans [15]: étant donné un espace X simplement connexe et un élément $\phi \in \pi_{n+1}(X)$, à quelle condition sur ϕ l'inclusion

$$X \to X \cup_\phi e^{n+2}$$

est elle surjective en homotopie?

Nous n'étudierons en fait ce problème qu'au niveau de l'homotopie rationnelle. Rappellons (c.f. [16]) que la composition de lacets fait de la coalgèbre $H_*(\Omega X;\mathbf{Q})$ une algèbre de Hopf et que le crochet $[\alpha, \beta] = \alpha.\beta - (-1)^{\deg\alpha\deg\beta}\beta.\alpha$ définit dans le sous-espace des éléments primitifs une structure d'algèbre de Lie graduée dont $H_*(\Omega X;\mathbf{Q})$ est l'algèbre enveloppante. De plus, l'homomorphisme $\pi_*(\Omega X) \otimes Q \to H_*(\Omega X;\mathbf{Q})$ de Hurewicz est un isomorphisme sur cette algèbre de Lie, que nous notons désormais $\pi(X)$, suivant Quillen [18].

Toute ces constructions étant fonctorielles, la surjectivité du morphisme

$$\pi_*(X) \otimes \mathbf{Q} \to \pi_*(X \cup_\phi e^{n+2}) \otimes \mathbf{Q}$$

équivaut à celle du morphisme d'algèbres

$$H_*(\Omega X;\mathbf{Q}) \to H_*(\Omega(X \cup_\phi e^{n+2});\mathbf{Q}). \tag{1}$$

Soit $\langle\bar{\phi}\rangle$ l'idéal bilatère dans $H_*(\Omega X;\mathbf{Q})$ engendré par l'élément, $\bar{\phi}$, image de

Reçu le 24 juillet 1985; révisé le 24 octobre 1985.

ϕ par l'application $\pi_{n+1}(X) = \pi_n(\Omega X) \to H_n(\Omega X; \mathrm{Q})$. Dans [15] il est montré qu'une condition suffisante pour la surjectivité du morphisme (1) est que la projection $H_*(\Omega X; \mathrm{Q}) \to H_*(\Omega X; \mathrm{Q})/\langle\bar{\phi}\rangle$ induise un isomorphisme sur $\mathrm{Tor}_i(\mathrm{Q}, \mathrm{Q})$, $i \geqq 3$, et une injection sur $\mathrm{Tor}_2(\mathrm{Q}, \mathrm{Q})$: cette condition ne porte donc que sur la structure d'algèbre associative de $H_*(\Omega X; \mathrm{Q})$.

Ici nous montrons tout d'abord (paragraphe 1, Théorème 1.1) que cette condition est aussi nécessaire, répondant ainsi à une question de [15]. Le problème topologique initial est donc réduit à une question purement algébrique: pour quels éléments $a \in A$ (A, algèbre associative graduée sur un corps $\boldsymbol{k}$) la projection $A \to A/\langle a\rangle$ induit-elle un isomorphisme (respectivement une injection) sur $\mathrm{Tor}_i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$, $i \geqq 3$ (respectivement sur $\mathrm{Tor}_2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$)?

Cette question a été considérée en détail par Anick [2], dont nous rappellons certains résultats dans le paragraphe 2. En effet Anick formule une autre condition, étroitement analogue à celle de régularité dans les algèbres commutatives, et démontre ensuite l'équivalence des deux conditions. Il appelle "strongly free" les éléments satisfaisants à ces conditions équivalentes.

Pour des raisons de simplicité et d'euphonie nous proposons de substituer l'adjectif "*inerte*" à la traduction littérale de "strongly free", ce choix étant inspiré par le fait que $a \in A$ est inerte si et seulement si le passage $A \to A/\langle a\rangle$ modifie $\mathrm{Tor}_*(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$ aussi peu que possible.

Rappelons que le paragraphe 1 réduit la question de la surjectivité de

$$\pi_*(X) \otimes \mathrm{Q} \to \pi_*(X \cup_\phi e^{n+2}) \otimes \mathrm{Q}$$

au problème de déterminer si $\bar{\phi} \in H_*(\Omega X; \mathrm{Q})$ est inerte ou non. Mais $\bar{\phi}$ n'est pas un élément arbitraire: il appartient à l'algèbre de Lie graduée $\boldsymbol{\pi}(X)$ dont $H_*(\Omega X; \mathrm{Q})$ est l'algèbre enveloppante. Ceci conduit à la définition: un élément x dans une algèbre de Lie graduée, L, sur un corps de caractéristique zéro est *inerte* s'il est inerte dans l'algèbre enveloppante, UL.

Les résultats principaux des paragraphes 3 et 4, consacrés à l'étude de l'inertie dans les algèbres de Lie graduées, ne s'étendent pas aux algèbres associatives générales. Ils sont donc complémentaires de ceux d'Anick. Parmi ces propriétés spéciales aux algèbres de Lie figure le critère suivant d'inertie (paragraphe 3, Théorème 3.3): $x \in L$ est inerte si et seulement si

(i) L'idéal I de L engendré par x est une algèbre de Lie libre.

(ii) Le $U(L/I)$-module $I/[I, I]$, défini par la l'action adjointe de L dans I, est libre.

Nous en déduisons un critère topologique (paragraphe 3, Proposition 3.4): $\bar{\phi} \in \boldsymbol{\pi}(X)$ est inerte si et seulement si ou bien la fibre homotopique de

$i: X \to X \cup_\phi e^{n+2}$ est rationnellement un bouquet d'au moins deux spherès, ou bien $\phi: S^{n+1} \to X$ est une équivalence d'homotopie rationelle.

Dans le paragraphe 4 nous nous limitons aux algèbres de Lie graduées qui sont nulles en degrés impairs et nous montrons (Théorème 4.1) que si x est un élément inerte dans une telle algèbre, L, alors tout élément non nul dans l'idéal engendré par x est aussi inerte dans L. Une application de ce résultat (Exemple 4.11) est que la somme connexe $X = (S^3 \times S^3) \# (S^3 \times S^3)$ possède la propriété suivante: la catégorie rationnelle de Lusternik-Schnirelmann de $X \cup_\varphi e^{n+2}$ est toujours deux, quel que soit $\phi \in \pi_*(X)$.

En guise de conclusion de ce travail nous mettons en évidence une classe remarquable d'éléments inertes. En effet, soit V une variété sans bord, compacte, 1-connexe, de dimension n, et soit v un point de V. Si l'algèbre de cohomologie rationelle de V n'est pas engendrée par un seul élément nous montrons (Théorème 5.1) que la classe d'homotopie d'une petite $(n-1)$-sphère entourant v est inerte das $\pi(V-v)$.

Dans le cas particulier ou V est un espace formel, ce résultat est dû à L. Avramov [3].

Le Théorème 5.1 conduit immédiatement à une description explicite de l'algèbre de Lie $\pi(\Omega(M \# N))$ d'un somme connexe (Théorème 5.4).

Ce travail est le fruit d'une collaboration qui a débuté à l'occasion du séjour à Nice du premier auteur en qualité de professeur associé; le Thèorème 4.1 a été élaboré à Toronto grâce au soutien financier accordé au second auteur par le CNRS français et le CNRSG canadien. Enfin la démonstration de 5.1 a été découverte pendant le colloque de Princeton en l'honneur de John Moore: les auteurs sont heureux de lui dédier ce travail, et de lui témoigner ainsi leur reconnaissance pour avoir inspiré une bonne part des progrès de la topologie algébrique depuis trente ans ... et la thèse du second auteur!

Dans ce qui suit, on suppose une fois pour toutes que $\boldsymbol{k}$ est un corps commutatif, et que les $\boldsymbol{k}$-espaces vectoriels considérés sont de la forme $V = \oplus_{i \geq 0} V_i$, chaque V_i étant de dimension finie. La série de Hilbert de V est la série formelle

$$V(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \dim V_p . z^p$$

et nous écrirons $V(z) \geqq W(z)$ si $\dim W_p \geqq \dim V_p$ pour tout p. Si S est un CW-complexe de type fini, sa série de Poincaré est la série de Hilbert de son homologie (ou de sa cohomologie) rationnelle.

Les algèbres considérées sont toujours graduées et connexes, l'isomorphisme de la composante de degré zéro avec le corps, $\boldsymbol{k}$, définissant l'unité et l'augmentation. Dans les paragraphes 3 et 4, nous considérons des algèbres de Lie graduées connexes ($L_i = 0$ si $i \leqq 0$): nous supposons alors que $\boldsymbol{k}$ est de caractéristique nulle; dans le paragraphe 5, nous prendrons tout bonnement $\boldsymbol{k} = \mathbf{Q}$.

1. Autopsie des cycles inertes.

Rappellons que si X est un espace simplement connexe et si $\phi \in \pi_{n+1}(X)$ alors la surjectivité de

$$\pi_*(X) \otimes \mathbf{Q} \xrightarrow{i} \pi_*(X \cup_\phi e^{n+2}) \otimes \mathbf{Q}$$

équivaut à celle du morphisme $H_*(\Omega X; \mathbf{Q}) \to H_*(\Omega(X \cup_\phi e^{n+2}); \mathbf{Q})$. Or ce dernier s'interprète au travers des modèles de Adams-Hilton [1].

En effet, si $\mathscr{A}$ est une algèbre de chaînes (algèbre munie d'une différentielle de degré -1) sur un corps $\boldsymbol{k}$ quelconque et si $z \in \mathscr{A}_n$ est un cycle nous considérons le morphisme d'algèbres de chaînes

$$\mathscr{A} \to \mathscr{B} = \mathscr{A} \amalg T(x), \quad dx = z,$$

où $T(\mathrm{x})$ est l'algèbre tensorielle sur x de degré $n+1$ et $\mathscr{A} \amalg T(\mathrm{x})$ est le produit libre (coproduit). Dans le cas où $\mathscr{A}$ est un modèle d'Adams-Hilton de ΩX (en particulier $H\mathscr{A} = H_*(\Omega X; \boldsymbol{k})$) et où la classe $\bar{z} \in H\mathscr{A}$ de z coïncide avec la classe $\bar{\phi} \in H_*(\Omega X; \boldsymbol{k})$ déterminée par ϕ le morphisme

$$H_*(\Omega X; \boldsymbol{k}) \to H_*(\Omega(X \cup_\phi e^{n+2}); \boldsymbol{k})$$

s'identifie au morphisme $H\mathscr{A} \xrightarrow{\alpha} H\mathscr{B}$ induit par l'inclusion $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$.

Nous sommes donc ramenés à montrer que α est surjective si et seulement si la projection π: $H\mathscr{A} \to H\mathscr{A}/\langle \bar{z} \rangle$ induit un isomorphisme (respectivement une injection) sur $\mathrm{Tor}_t(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$, $t \geqq 3$, (respectivement sur $\mathrm{Tor}_2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$.

Nous démontrons ceci pour un cycle z arbitraire dans une algèbre de chaînes $\mathscr{A}$ quelconque. Le morphisme α se factorise en

$$\pi: H\mathscr{A} \to H\mathscr{A}/\langle \bar{z} \rangle \quad \text{et} \quad \gamma: H\mathscr{A}/\langle \bar{z} \rangle \to H\mathscr{B}.$$

Définissons d'autre part, l'algèbre de chaînes $(\bar{\mathscr{B}}, \bar{d})$ par $\bar{\mathscr{B}} = H\mathscr{A} \amalg T(x)$, $\bar{d}|_{H\mathscr{A}} = 0$, $\bar{d}x = \bar{z}$. L'inclusion $H\mathscr{A} \to \bar{\mathscr{B}}$ induit alors un homomorphisme

$$\bar{\alpha}: H\mathscr{A} \to H\bar{\mathscr{B}},$$

et le résultat promis se formule comme suit:

THÉORÈME 1.1. *Avec les notations définies ci-dessus, les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) $\alpha: H\mathscr{A} \to H\mathscr{B}$ *est surjective.*
(ii) $\bar{\alpha}: H\mathscr{A} \to H\bar{\mathscr{B}}$ *est surjective.*
(iii) $\gamma: H\mathscr{A}/\langle \bar{z} \rangle \to H\mathscr{B}$ *est un isomorphisme.*
(iv) $\pi: H\mathscr{A} \to H\mathscr{A}/\langle \bar{z} \rangle$ *induit un isomorphisme sur* $\mathrm{Tor}_3(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$ *et une injection sur* $\mathrm{Tor}_2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$.
(v) π: *induit un isomorphisme sur* $\mathrm{Tor}_p(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$ *pour* $p \geqq 3$ *et une injection sur* $\mathrm{Tor}_2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$.

REMARQUE 1.2. Les conditions (ii), (iv) et (v) ne portent que sur l'élément $\bar{z}$ et la structure d'algèbre de $H\mathscr{A}$.

La démonstration du Théorème 1.1. s'appuie sur la construction suivante; rappelons que la $n$ième suspension $s^n V$ d'un espace vectoriel gradué V est définie par $(s^n V)_q = V_{q-n}$. Si $\mathscr{A}$ est une algèbre et $r \in A_n$, $n > 0$, nous définissons une nouvelle algèbre $A\{r\}$ comme suit: En tant qu'espace vectoriel gradué, on pose

$$A\{r\} = \boldsymbol{k}.1 \oplus s^n A,$$

$\boldsymbol{k}.1$ étant placé en degré zéro; ensuite le produit $\circ$ est défini par

$$s^n a \circ s^n b = s^n(arb),$$

l'élément 1 étant l'identité de $A(r\}$. Il est clair que l'espace $A\{r\}_+/A\{r\}_+ \circ A\{r\}_+$ des indécomposables de $A\{r\}$ s'identifie à $s^n(A/\langle r \rangle)$, où $\langle r \rangle$ est l'déal bilatère engendré par r. Si $\mathscr{A}$ est une algèbre de chaînes et z un cycle de degré n de $\mathscr{A}$, on fait de $\mathscr{A}\{z\}$ une algèbre de chaînes en posant $ds^n a = (-1)^n s^n(da)$, et l'on a

$$H(\mathscr{A}\{z\}) = H\mathscr{A}\{\bar{z}\}$$

où $\bar{z}$ est la classe de z dans $H\mathscr{A}$.

La clef de la démonstration de 1.1 réside dans la formulation d'une sixième condition équivalente:

THÉORÈME 1.3. *Chacune des cinq assertions du Théorème* 1.1. *est équivalente à*

(vi) *l'algèbre* $H\mathscr{A}\{\bar{z}\}$ *est libre* (i.e. *isomorphe à une algèbre tensorielle*).

Avant de commencer la preuve, observons quelques faits élémentaires.

Rappelons d'abord [15] que $\mathscr{B} = \mathscr{A} \amalg T(x)$ se décompose en somme directe

$$\mathscr{B} = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathscr{A} \otimes (\boldsymbol{k}.x \otimes \mathscr{A})^{\otimes p} \tag{1.4}$$

où l'on convient que $(\cdot)^{\otimes 0} = \boldsymbol{k}$.

Rappelons ensuite que la bar-construction réduite $\boldsymbol{B}$ définie comme dans [17] est un foncteur de la catégorie des algèbres de chaînes connexes dans celle des espaces vectoriels différentiels gradués – en oubliant la structure de coalgèbre. De (1.4) nous tirons

LEMME 1.5. *On définit un isomorphisme d'espaces vectoriels différentiels gradués*

$$\psi : \boldsymbol{k} \oplus s^{n+1}(\mathscr{A} \amalg T(x)) \to \boldsymbol{B}(\mathscr{A}\{z\})$$

en posant

$$\psi(s^{n+1}(a_0 \otimes x \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes x \otimes a_p)) = s^n a_0 | s^n a_1 | \ldots | s^n a_p.$$

Soit maintenant E^r la suite spectrale associée à la filtration de $\mathscr{B}$ par le poids en x (cf. [15, paragraphe 1]). Cette filtration est identifiée par ψ à la filtration standard de la bar construction, et il s'ensuit le

LEMME 1.6. *L'application ψ induit des isomorphismes*

(a) $E^1_{p,q} \cong \boldsymbol{B}_{p+1,q+n} H\mathscr{A}\{\bar{z}\}$

(b) $E^2_{p,q} \cong \operatorname{Tor}^{H\mathscr{A}\{\bar{z}\}}_{p+1,q+n}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$.

En conséquence immédiate nous avons le

LEMME 1.7. (vi) $\Leftrightarrow E^2_{p,*} = 0$, $p \geqq 1$.

Nous pouvons maintenant établir les Théorèmes 1.3 (et 1.1), suivant le schèma

$$\begin{tikzcd}
 & \text{(i)} \arrow[dd, Rightarrow] & \text{(iii)} \arrow[l, Rightarrow] & \\
\text{(ii)} \arrow[ur, Rightarrow] & & & \\
 & \text{(vi)} \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \text{(iv)} \arrow[uu, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{(v)}
\end{tikzcd}$$

Toutes les implications de ce schéma sauf (i) $\Rightarrow$ (vi) découlent immédiatement des arguments de [15, paragraphe 2], et du Lemme 1.7, une fois observé que $\operatorname{Im} \bar{\alpha} = E^2_{0,*}$ et $\operatorname{Im} \alpha = E^{\infty}_{0,*}$.

Pour établir (i) $\Rightarrow$ (vi), choisissons un sous-espace gradué U des cycles de $\mathscr{A}$ tel que la composition $U \to H\mathscr{A} \xrightarrow{\cong} H\mathscr{B}$ soit un isomorphisme, et considérons le morphisme d'algèbres de chaînes

$$\chi : (T(s^n U), \circ) \to \mathscr{A}\{z\}$$

qui étend l'inclusion $s^n U \to s^n \mathscr{A}$. Il suffit de démontrer que χ induit un isomorphisme en homologie. A cette fin, considérons le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{B}T(s^n U) \arrow[r, "\boldsymbol{B}\chi"] & \boldsymbol{B}\mathscr{A}\{z\} \\
 & \boldsymbol{k} \oplus s^{n+1}\mathscr{B} \arrow[u, "\psi"', "\cong"] \\
\boldsymbol{k} \oplus s^{n+1}U \arrow[uu, "\simeq"] \arrow[ur, "\simeq"] \arrow[r] & \boldsymbol{k} \oplus s^{n+1}\mathscr{A} \arrow[u, "\subseteq"']
\end{tikzcd}$$

Le morphisme de gauche induit un isomorphisme en homologie car $T(s^n U)$ est libre; la flèche oblique également par construction de U. Il en résulte que $\boldsymbol{B}\chi$ induit un isomorphisme en homologie, et il en est de même de χ d'après le théorème de comparaison de Moore [17].

2. Elements et suites inertes dans une algèbre.

Soit A une algèbre. Etant donné un élément $r \in A_n$, $n > 0$, rappelons que $\langle r \rangle$ désigne l'idéal bilatére de A engendé par r et $\pi : A \to A/\langle r \rangle$ la projection canonique.

DÉFINITION 2.1. L'élément r est *inerte* dans A si l'une des deux conditions suivantes – équivalentes d'après (1.3) – est satisfaite:

(a) l'algèbre $A\{r\}$ est libre.
(b) le morphisme $\mathrm{Tor}_p^{\pi}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$ est injectif pour $p = 2$ et bijectif pour $p = 3$.

REMARQUE 2.2. Il est immédiat d'après (a) que le centralisateur d'un élément inerte est la sous-algèbre qu'il engendre.

Considérations maintenant une suite (r_i), $r_i \in A_{n_i}$, $n_i > 0$ d'éléments de A, finie ou dénombrable, et notons $\langle r_1, r_2, \ldots, r_s \rangle$ l'idéal bilatère de A engendré par $r_1, r_2, \ldots, r_s$.

DÉFINITION 2.3. La suite (r_i) est *inerte* dans A si r_1 est inerte dans A et pour tout i, r_{i+1} représente un élément inerte dans $A/\langle r_1, \ldots, r_i \rangle$.

Soit I l'idéal bilatère de A engendré par les éléments d'une suite finie ou dénombrable (r_i), $r_i \in A_{n_i}$, $n_i > 0$. En posant $I^0 = A$, $I^{k+1} = I^k.I$, $k \geqq 0$, on définit une filtration décroissante d'algèbre sur A (filtration I-adique); notons $\mathrm{Gr}\, A$ l'algèbre bigraduée associée à cette filtration

$$\mathrm{Gr}_{p,q}A = (I^p/I^{p+1})_{p+q}.$$

En particulier $\mathrm{Gr}_{0,*}A = A/I$ et $\mathrm{Gr}_{1,*}A = I/I^2$.

Soit $\bar{Q}I = I/A_+.I+I.A_+$ l'espace vectoriel des indécomposables de l'idéal I. Toute base d'un supplémentaire de $A_+.I+I.A_+$ dans I est un système minimal de générateurs d'idéal de I, et inversement. Une section $\lambda: \bar{Q}I \to I/I^2$ de la projection canonique s'étend en un homomorphisme d'algèbres bigraduées:

$$\chi: A/I \amalg T(\bar{Q}I) \to \mathrm{Gr}\, A$$

dont la restriction à A/I est l'identité.

Un argument classique (voir par ex. [2, (2.2)]) montre que χ est surjectif, quel que soit l'idéal I. L'injectivité de χ équivaut précisément à l'inertie d'un système minimal de générateurs de I, comme l'a observé Anick. Pour la commodité du lecteur, nous rappellons ses résultats ([2, paragraphe 2]). Soit X un espace vectoriel gradué, de base (x_i) avec $\deg x_i = n_i + 1$, et soit $\mathscr{B}$ l'algèbre de chaînes, $A \amalg T(X)$ munie de la différentielle d qui vérifie $d|_A = 0$, $dx_i = r_i$. Les différentes caractérisations d'Anick des suites inertes sont rassemblées dans le:

Théorème 2.4. *Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) *La suite (r_i) est inerte dans A.*

(ii) *La suite (r_i) représente une base de $\bar{Q}I$, et χ est un isomorphisme.*

(iii) *La suite (r_i) représente une base de $\bar{Q}I$, et les séries de Hilbert de A, A/I et $\bar{Q}I$ vérifient $A(z)^{-1} = A/I(z)^{-1} - \bar{Q}I(z)$.*

(iv) *La suite (r_i) représente une base de $\bar{Q}I$ et la projection π: $A \to A/I$ induit un isomorphisme sur* $\mathrm{Tor}_3(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$ *et une injection sur* $\mathrm{Tor}_2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$.

(v) *L'homomorphisme d'algèbres, α: $A \to H(A \amalg T(X))$, est surjectif.*

(vi) *α induit un isomorphisme $A/I \xrightarrow{\cong} H(A \amalg T(X))$.*

Comme conséquence immédiat des Théorèmes 1.1 et 2.4 on déduit le

Corollaire 2.5. *Si $S = T \oplus U$ est un sous-espace de A_+, la réunion d'une base de T et d'une base de U est inerte si et seulement si la base de T est inerte et la base de U représente une suite inerte dans A/I_T, I_T l'idéal engendré par T.*

La condition d'inertie ne porte vraiment que sur l'idéal engendré par la suite, et non sur la suite elle-même, pourvu qu'elle engendre l'idéal de façon minimale. En particulier toute permutation d'une suite inerte est inerte. Nous sommes donc conduits à la

DÉFINITION 2.6. Un idéal bilatère $I \subset A$ est inerte si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite:

(i) I est engendré par une suite inerte.

(ii) La projection $\pi: A \to A/I$ induit une injection sur $\mathrm{Tor}_2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$ et une bijection sur $\mathrm{Tor}_3(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$.

Soit maintenant $(F_pA)_{p \in \mathbf{Z}}$ une filtration d'algèbre de A finie en chaque degré, et soit $E^0_{**}A = \mathrm{Gr}\, A$ l'algèbre bigraduée associée. La proposition suivante se démontre de la même manière que [2, Théorème 3.2]:

PROPOSITION 2.9. *Si $(\bar{r}_i) \in E^0_{**}A$ est une suite inerte d'éléments (bihomogènes) et si (r_i) est un relèvement quelconque de $(\bar{r}_i)$ alors la suite (r_i) est inerte.*

3. Eléments et suites inertes dans une algèbre de Lie.

Nous supposons désormais $\boldsymbol{k}$ de caractéristique nulle.

Rappelons que l'algèbre de Lie libre $\boldsymbol{L}(X)$ sur l'espace vectoriel gradué X est la sous-algèbre de Lie de $T(X)$ engendrée par X: l'algèbre enveloppante $U\boldsymbol{L}(X)$ s'identifie à $T(X)$. Le foncteur algèbre enveloppante U commute aux coproduits, d'où $UL \amalg T(X) = U(L \amalg \boldsymbol{L}(X))$, L étant une algèbre de Lie graduée quelconque.

Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, valable dans le cas gradué (cf. [16], [18, Appendix B]) identifie L à l'espace des éléments primitifs de l'algèbre de Hopf UL. Le même théorème permet de montrer que si $J \subset UL$ est l'idéal bilatère engendré par un idéal de Lie $I \subset L$, alors

$$I = L \cap J, \quad [L, I] = L \cap (J.UL_+ + UL_+.J) \quad \text{et} \quad U(L/I) = UL/J.$$

L'espace des indécomposables de l'idéal de Lie I, à savoir $\bar{Q}I = L/[L, I]$ s'identifie donc à $\bar{Q}J = J/J.UL_+ + UL_+.J$, de sorte que la notation $\bar{Q}$ ne crée pas de confusion. Plus généralement si $I^{(0)} = L$, $I^{(k)} = [I^{(k-1)}, I]$ désigne la filtration centrale descendante de l'idéal I, on a

$$I^{(k)} = L \cap J^k$$

et l'on en déduit l'isomorphisme canonique d'algèbres bigraduées

$$U\,\mathrm{Gr}\, L = \mathrm{Gr}\, UL$$

où $\operatorname{Gr} UL$ est associé à la filtration J-adique de UL.

Le choix d'une section $\bar{Q}I = I/[L, I] \to I/[I, I]$ permet de définir un homomorphisme

$$\begin{aligned} \chi_L &: (L/I) \amalg L(\bar{Q}I) \to \operatorname{Gr} L \\ U\chi_L &: (UL/J) \amalg T(\bar{Q}J) \to \operatorname{Gr} UL \end{aligned}$$

tel que

coïncide avec l'homomorphisme χ défini au paragraphe 2.

Ces remarques permettent de transposer aux algèbres de Lie graduées les résultats du paragraphe 2, une fois posée la définition naturelle suivante:

DÉFINITION 3.1. Une suite (r_i), $r_i \in L$ (respectivement un idéal $I \subset L$) est *inerte* si (r_i) est inerte dans UL (respectivement l'idéal J engendré par I est inerte dans UL).

Remarquons qu'un système minimal de générateurs de l'idéal de Lie I est inerte si et seulement si I est inerte.

Compte tenu des remarques qui précèdent, la transposition aux algèbres de Lie du Théorème 2.4 est évidente:

PROPOSITION 3.2. *Soit (r_i) une suite d'éléments de l'algèbre de Lie L. Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) *(r_i) est une suite inerte.*

(ii) *(r_i) représente une base de $\bar{Q}I$ et χ_L est un isomorphisme.*

(iii) *(r_i) représente une base de $\bar{Q}I$ et la flèche $L \to L/I$ induit un isomorphisme sur* $\operatorname{Tor}_3^{U\cdot}(k, k)$ *et une injection sur* $\operatorname{Tor}_2^{U\cdot}(k, k)$.

(iv) *L'application $L \to H(L \amalg L(Y), d)$, où Y est un espace vectoriel de base (y_i), avec* $\deg y_i = \deg r_i + 1$, $d|L = 0$, $dy_i = r_i$, *est surjective.*

Dans le cas des algèbres de Lie, on peut donner un critère pratique d'inertie d'un idéal, qui n'a pas d'analogue chez les algèbres associatives générales.

Si I est un idéal de L, l'action de L sur I induit une représentation de L/I dans $QI = I/[I, I]$: on a donc une structure naturelle de $U(L/I)$-module sur QI, pour laquelle

$$\bar{Q}I = I/[L, I] = QI/U(L/I)_+ . QI = k \otimes_{U(L/I)} QI$$

est l'espace des indécomposables.

THÉORÈME 3.3. *L'idéal I est inerte dans L si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées*

(i) *I est une algèbre de Lie libre: $I \cong L(QI)$.*

(ii) *QI est un $U(L/I)$-module libre.*

Avant de démontrer 3.3 nous en signalons une conséquence topologique: Soit X un CW complexe 1-connexe de type fini et $\phi: S^{n+1} \to X$ une application continue. Soit F la fibre homotopique de l'inclusion $i: X \to X \cup_\phi e^{n+2}$.

PROPOSITION 3.4. *En dehors du cas trivial où ϕ est une équivalence d'homotopie rationnelle les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{i_\#} \pi_*(X \cup_\phi e^{n+2}) \otimes \mathbb{Q}$ *est surjective.*

(ii) $\bar{\phi}$ *est inerte dans* $\boldsymbol{\pi}(X)$.

(iii) F *a le type d'homotopie rationnelle d'un bouquet d'au moins deux sphères.*

PREUVE. L'équivalence de (i) et (ii) n'est autre que le Théorème 1.1. Si (i) est vrai le noyau de $i_\#$ est $\pi_*(F) \otimes \mathbb{Q}$; il en suit que $\boldsymbol{\pi}(F)$ est le noyau de la surjection $\boldsymbol{\pi}(X) \to \boldsymbol{\pi}(X \cup_\phi e^{n+2})$ d'algèbres de Lie. La condition (i) de 3.3 exprime donc que F est, rationnellement, un bouquet de sphères. Puisque $X \cup_\phi e^{n+2}$ n'est pas rationnellement contractile, la condition (ii) de 3.3 implique que $\dim \tilde{H}_*(F; \mathbb{Q}) \geqq 2$.

Réciproquement, si F est un bouquet d'au moins deux sphères, l'algèbre de Lie $\boldsymbol{\pi}(F)$ est libre sur au moins deux générateurs. Le centre de $\boldsymbol{\pi}(F)$ est donc nul et a fortiori il en est de même de l'image du connectant $\pi_*(X \cup e^{n+2}) \otimes \mathbb{Q} \to \pi_{*-1}(F) \otimes \mathbb{Q}$, d'où la surjectivité de $i_\#$.

REMARQUE 3.5. Dans [9] Félix et Thomas montrent que $\tilde{H}_*(F; \mathbb{Q})$ est toujours un module libre sur $U\boldsymbol{\pi}(X \cup_\phi e^{n+2})$ que ϕ soit ou non inerte.

PREUVE DE 3.3. A la suite exacte courte d'algrèbes de Lie

$$I \to L \to L/I$$

est associée la suite spectrale

$$E^2_{p,q} = \operatorname{Tor}_p^{U(L/I)}(\operatorname{Tor}_q^{UL}(U(L/I), \boldsymbol{k}), \boldsymbol{k}) \Rightarrow \operatorname{Tor}_{p+q}^{UL}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}).$$

L'isomorphisme de changement d'anneaux

$$\operatorname{Tor}_q^{UL}(U(L/I), \boldsymbol{k}) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Tor}_q^{UI}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$$

confère à $\operatorname{Tor}_q^{UI}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$ une structure de $U(L/I)$-module. Pour $q = 1$, on a $\operatorname{Tor}_1^{UI}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}) = QI$ et cette structure coïncide avec celle définie ci-dessus (cf. [7, 3.12]).

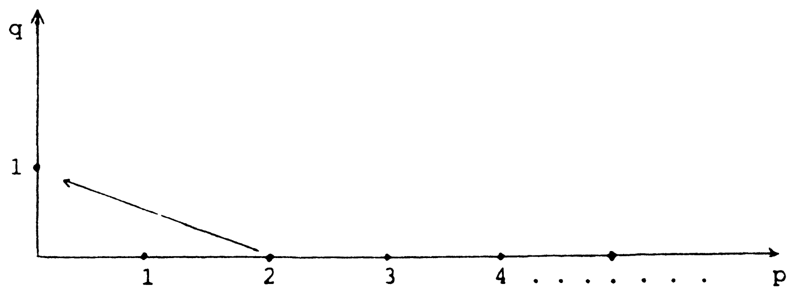
Supposons que I est inerte. L'homomorphisme

$$\operatorname{Tor}^{UL}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}) \to \operatorname{Tor}^{U(L/I)}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$$

a pour gradué associé l'homomorphisme de coin $E^{\infty}_{**} \to E^2_{*,0}$, qui est donc injectif pour $p+q = 2$ et bijectif pour $p+q \geqq 3$. On en déduit $E^2_{1,1} = E^{\infty}_{1,1} = 0$, soit

$$\mathrm{Tor}_1^{U(L/I)}(\mathrm{Tor}_1^{UI}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}), \boldsymbol{k}) = 0.$$

Par suite $QI = \mathrm{Tor}_1^{UI}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$ est un $U(L/I)$-module libre et $\mathrm{Tor}_p^{U(L/I)}(QI, \boldsymbol{k}) = E^2_{p,1} = 0$ pour $p \geqq 1$. Au niveau E^2 la suite spectrale est décrite par le schéma



où les points indiquent les termes éventuellement non nuls: en effet, l'hypothèse déjà utilisée sur le morphisme de coin entraîne

$$E^2_{0,2} = \mathrm{Tor}_0^{U(L/I)}(\mathrm{Tor}_2^{UI}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}), \boldsymbol{k}) = 0$$

et donc, $\mathrm{Tor}_2^{UI}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}) = 0$ par "Nakayama", l'algèbre $U(L/I)$ étant connexe. Cette dernière condition entraine que UI, et done l'algèbre de Lie I, sont libres. La réciproque s'obtient en inversant ces arguments.

EXAMPLE 3.6. L'élément, b, est inerte dans $\boldsymbol{L}(a, b)$, donc l'idéal (b) est librement engendré comme algèbre de Lie par la suite $(b_n)_{n \in \mathrm{N}}$ définie par $b_0 = b$ et $b_{n+1} = [a, b_n]$.

EXAMPLE 3.7. Soit $L = \boldsymbol{L}(a, x)/([x, x])$ avec x de degré impair. Il est clair que $L = \boldsymbol{L}(a) \amalg \boldsymbol{k}.x$, où $\boldsymbol{k}.x$ est l'algèbre de Lie abélienne de dimension 1 et de base x. D'après 3.2 (ii), a est inerte dans L. Mais $L/(a) = \boldsymbol{k}.x$ et $U(L/(a)) = \Lambda x$, de sorte que la sous-algèbre (a) de L est librement engendrée par a et $[x, a]$: on a donc l'extension

$$0 \to \boldsymbol{L}(a, [x, a]) \to L \to \boldsymbol{k}.x \to 0$$

qui montre que L contient une sous-algèbre libre de codimension 1.

Dans une algèbre associative un élément peut être inerte sans l'être dans toute sous-algèbre qui le contient; ainsi ab est inerte dans l'algèbre tensorielle $T(a,b)$ (cf. [2]) mais la relation $ab(a^2b) = (aba)ab$ montre que ab n'est pas inerte dans la sous-algèbre engendrée par ab, a^2b et aba. Ce phénomène ne se produit pas dans les algèbres de Lie:

THÉORÈME 3.8. *Soit E une sous-algèbre de Lie de L, et (r_i) une suite d'éléments de E. Si (r_i) est inerte dans L, elle l'est également dans E.*

LEMME 3.9. *Si $I \subset E$ est un idéal de L inerte dans L, il est inerte dans E et tout système minimal de générateurs de I comme idéal de L est une suite inerte dans E.*

PREUVE DE 3.9. D'après (3.3) I est libre et QI est un $U(LI)$-module libre. Comme $U(L/I)$ est un $U(E/I)$-module libre (par Poincaré-Birkhoff-Witt) et que la structure de $U(E/I)$-module de QI s'obtient par restriction, QI est $U(E/I)$-libre. Donc I est inerte dans E par (3.3).

Un système minimal de générateurs de I comme idéal de E peut être obtenu en complétant un système minimal de générateurs comme idéal de L. Or une sous-suite d'une suite inerte est inerte.

PREUVE DE 3.8. Soit (r_i) une suite d'éléments de E, inerte dans L. Définissons la suite décroissante d'algèbres de Lie $E^{(k)}$, $k \geqq 0$ par

$$E^{(0)} = L, \quad E^{(k+1)} = E + I^{(k)}$$

où $I^{(k)}$ désigne l'idéal de $E^{(k)}$ engendré par la suite (r_i). En utilisant 3.9, on voit que la suite (r_i) est inerte dans chaque $E^{(k)}$. Soit I l'idéal engendré par (r_i) dans E. Les inclusions

$$E \hookrightarrow E^{(k)}, \quad I \to I^{(k)}$$

sont des isomorphismes en degrés $\leqq k$. Il en est de même de l'homomorphisme d'algèbres

$$U(E/I) \to U(E^{(k)}/I^{(k)}).$$

Il résulte de cette observation et de l'inertie de $I^{(k)}$ dans $E^{(k)}$ que pour $p+q < k$, la flèche

$$\mathrm{Tor}_{p,q}^{UE}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}) \to \mathrm{Tor}_{p,q}^{U(E/I)}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k})$$

est injective (respectivement bijective) pour $p = 2$ (respectivement $p = 3$).

Ceci étant vrai pour tout k, l'idéal I est inerte. Enfin (r_i) est un système minimal de générateurs de l'idéal qu'ils engendrent dans L, et donc de l'idéal I.

COROLLAIRE 3.10. *Soit x inerte dans L et E la sous-algèbre engendrée par x et un élément m linéairement indépendant de x et $[x, x]$. Sir* deg *m est pair, E est libre. Si* deg *m est impair, E contient une sous-algèbre libre sur deux générateurs de codimension* 0 *où* 1.

PREUVE. x est inerte dans E d'après 3.8. Soit I l'idéal engendré par x dans E, et filtrons E par la série centrale descendante de I. D'après (3.2), l'algèbre bigraduée associée est $\operatorname{gr} E = (E/I) \amalg \mathbf{L}(x)$. Mais E/I est engendrée par m, d'où $E/I \cong \mathbf{L}(m)$ où $\mathbf{L}(m)/([m, m])$ ce dernier cas ne pouvant se produire que si $\deg m$ est impair. L'exemple 3.5 montre que gr E satisfait les conclusions de l'énoncé: il en est donc de même de E.

La réciproque de 3.10 est fausse: voici un exemple d'un élément x *non* inerte dans une algèbre de Lie Λ, mais tel que pour tout $m \in \Lambda$ la sous algèbre engendrée par x et par m soit libre.

EXEMPLE 3.11. Soit $\Lambda = \mathbf{L}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)/I$, I notant l'idéal engendré par la suite inerte (cf. [2, Theorème 3.2]) $[x_1, x_2] - [x_2, x_3]$, $[x_2, x_3] - [x_1, x_3]$, $[x_1, x_3] - [x_4, x_5]$. L'algèbre $U\Lambda$ est donc de dimension globale 2.

Il est clair que x_5 n'est pas inerte dans Λ: en effet, s'il l'était on pourrait ajouter x_5 à la suite ci-dessus et obtenir une suite inerte dans $\mathbf{L}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Mais alors $[x_1, x_3]$, $[x_2, x_3] - [x_1, x_3]$, $[x_1, x_2] - [x_2, x_3]$ serait inerte dans $\mathbf{L}(x_1, x_2, x_3, x_4)$, et donc d'après 3.8, $[x_1, x_2]$, $[x_1, x_3]$, $[x_2, x_3]$ serait inerte dans $\mathbf{L}(x_1, x_2, x_3)$ ce qui contredit l'identité de Jacobi (où le fait que l'algèbre abélienne sur x_1, x_2, x_3 est de dimension globale 3).

En revanche, si nous supposons les degrés des x_i pairs, on montre sans difficulté en utilisant une base de Chen-Fox-Lyndon (cf. [20, p. 15]) que la sous-algèbre de Λ engendrée par m et x_5 est libre, quel que soir $m \in \Lambda$. (Cet argument nous a été signalé par le referee et remplace advantageusement une démonstration homologique assez laboureuse.)

Nous concluons ce paragraphe par l'étude des suites inertes dans les algèbres de Lie libres.

THÉORÈME 3.12. *Un élément $r \in \mathbf{L}(X)$ est inerte si et seulement si il n'existe pas $u \in \mathbf{L}(X)$, $\lambda \in \mathbf{k}$ tel que $r = \lambda[u, u]$.*

En particulier, si X est concentré en degrés pairs, tout élément non nul de $\mathbf{L}(X)$ est inerte.

Si X est concentré en degrés pairs, le théorème est due à J. Labute [13].

Le cas général résulte à l'évidence des Propositions 3.13 et 3.14 ci-après. Rappelons tout d'abord que tout élément de $T(X)$ s'écrit de manière unique (à scalaire près) comme produit d'éléments irréductibles ("Lemme de Gauss").

PROPOSITION 3.13. *Tout élément* $a \in \mathbf{L}(X)$ *est soit irréductible dans* $T(X)$, *soit égal à* λv^2 *pour un certain* $v \in \mathbf{L}(X)$ *de degré impair irréductible dans* $T(X)$.

PREUVE. Rappelons que $\mathbf{L}(X)$ est l'espace des primitifs de $T = T(X)$. Montrons d'abord que si $a = w \cdot z$ et $w \in T_+$ n'est pas primitif, alors w n'est pas irréductible. Soit

$$\Delta : T \to T \otimes T$$

la diagonale, et écrivons

$$\Delta w = w \otimes 1 + 1 \otimes w + \sum_i w_i \otimes \tilde{w}_i + \Phi$$

où $w_i \in T_p$, $\Phi \in T_{>p} \otimes T$, $0 < p \leqq \frac{1}{2} \deg w$. Soit $(\Delta z)_{p,*} = \sum_j z_j \otimes \tilde{z}_j$ la composante de Δz dans $T_p \otimes T$; on peut supposer sans restriction que chacune des familles (w_i), $(\tilde{w}_i)$, (z_i) et $(\tilde{z}_j)$ est linéairement indépendante. Le calcul de la composante $(\Delta a)_{p,*}$ donne

$$0 = \sum_i w_i \otimes \tilde{w}_i \cdot z + \sum (-1)^{p \cdot \deg w} z_j \otimes w \cdot \tilde{z}_j,$$

d'où l'existence d'éléments $w_i' \in T$ tels que

$$\tilde{w}_i \cdot z = w \cdot w_i'.$$

Le Lemme de Gauss pour T assure l'existence d'éléments b_i tels que $w = \tilde{w}_i \cdot b_i$. Comme $\deg b_i = \deg w_i > 0$, w n'est pas irréductible.

Par suite, si a n'est pas irréductible, a est de la forme $a = v^k \cdot w$, où $v \in \mathbf{L}(X)$ est irréductible, $w \in T(X)$ et $k > 0$. Alors où bien $w \in \boldsymbol{k}$ où il existe w' avec $w = v \cdot w'$, de sorte que finalement $a = \mu \cdot v^l$ pour uncertain $\mu \in \boldsymbol{k}$ et $l > 0$.

En effet, soit $r = k \cdot \deg v$. On vérifie facilement que si $\deg w > 0$,

$$0 = \Delta_{r,*}(a) = v^k \otimes w + \sum_i z_i \otimes v z_i'.$$

Enfin puisque $\boldsymbol{k}$ est de caractéristique nulle, $a = \mu v^l$ ($l > 1, v \in \mathbf{L}(X)$) ne peut être primitif que si $l = 2$ et $\deg v$ impair.

PROPOSITION 3.15. *Un élément $r \in T(X)$ est inerte si et seulement si il n'existe pas $u \in T(X)_+, v \in T(X)$ tels que*

$$r = uvu.$$

PREUVE. D'après le Théorème 2 de [5], on a $\mathrm{Tor}_3^{T(X)/\langle r\rangle}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}) = 0$ – et par conséquent r est inerte – si et seulement si il n'existe pas d'éléments a, $b \in T(X)$ vérifiant

$$(3.16) \qquad \begin{bmatrix} 0 < \deg a = \deg b < \deg r \\ ar = rb. \end{bmatrix}$$

Ecrivons $u \equiv v$ si u est un multiple scalaire non nul de v. Supposons alors 3.16 satisfait, et soient

$$a = a_1 \ldots a_s, \quad r = r_1 \ldots r_t, \quad b = b_1 \ldots b_p$$

les décompositions respectives de a, r, b en facteurs irréductibles. L'unicité de la décomposition $ar = rb$ entraîne $s = p$ et $s < t$, car r ne divise pas a vu que $\deg r > \deg a$. De plus $a_i \equiv r_i$ et $b_i \equiv r_{t-s+i}$. Par suite $r_1 \ldots r_{t-s} \equiv$ $\equiv r_{s+1} \ldots r_t$. Soit $k \geqq 1$ l'entier tel que $ks < t \leqq (k+1)s$; il vient $r_1 \ldots r_{t-ks} \equiv$ $\equiv r_{ks+1} \ldots r_t$ par unicité de la décomposition. On pose alors

$$u = r_1 \ldots r_{t-ks} \quad \text{et} \quad v = r_{t-ks+1} \ldots r_{ks}.$$

Inversement si $r = uvu$, on pose $a = uv$, $b = vu$.

4. Inertie des éléments d'une idéal inerte.

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le

THÉORÈME 4.1. *Soit L une algèbre de Lie, concentrée en degrés pairs (< 0). Si $K \subset L$ est un idéal inerte de L, tout élément non nul $r \in K$ est inerte dans L.*

COROLLAIRE 4.2. *Soit $\pi: L \to L/K$ la projection. Un élément x de L est inerte si $\pi(x)$ est inerte dans L/K ou nul.*

PREUVE DE 4.2. Si $\pi x = 0$, le corollaire n'est autre que 4.1. Si πx est inerte dans L/K, alors la suite formée de x et d'un système minimal de générateurs de l'idéal K est inerte dans L (Corollaire 2.5); par suite x est inerte dans L.

REMARQUE. Si $K = L$, le Théorème 4.1 se réduit au résultat de Labute [13] – cf. 3.12. La généralisation de 4.1 au cas où L admet des éléments de degrés impairs reste un problème ouvert.

La démonstration de 4.1 s'appuie sur quelques lemmes techniques. Pour alléger l'écriture, nous dirons qu'un sous-espace vectoriel S d'une algèbre de Lie L est *inerte* s'il admet une base inerte – et donc si toute base de S est une suite inerte dans L.

Le premier lemme est un raffinement de 3.9.

LEMME 4.3. *Soit $K \rightarrowtail L \twoheadrightarrow E$ une extension d'algèbres de Lie – K est donc un idéal de L – et soit $A \subset UL$ un relèvement linéaire de UE. Les conditions suivantes, portant sur un sous-espace vectoriel W de K sont, alors, équivalentes:*

(i) *W est inerte dans L.*

(ii) *La restriction à $A \otimes W$ de l'action de UL sur K est injective et l'image $A.W$ de $A \otimes W$ est inerte dans K.*

PREUVE. Le lemme résulte de 3.3, une fois observé que:

a) l'idéal I engendré par W dans L est engendré par $A.W$ dans K,

b) d'après Poincaré-Birkhoff-Witt, la restriction à $U(K/I) \otimes A$ de la multiplication de $U(L/I)$ est un isomorphisme $U(K/I) \otimes A \xrightarrow{\cong} U(L/I)$.

LEMME 4.4. *Soit $K \rightarrowtail L \twoheadrightarrow E$ une extension d'algèbres de Lie, et M un UL-module. Le module M est UL-libre si et seulement si M est UK-libre et $\boldsymbol{k} \otimes_{UK} M$ est UE-libre.*

PREUVE. C'est encore une conséquence immédiate de Poincaré-Birkhoff-Witt.

Rappelons qu'une extension $K \rightarrowtail L \twoheadrightarrow E$ est scindée, i.e. $L \twoheadrightarrow E$ admet une section, si et seulement si L est isomorphe au produit semi-direct $K \rtimes E$, où E agit sur K via la section.

LEMME 4.5. *Soit $K \rightarrowtail L \twoheadrightarrow E$ une extension scindée. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *K est un idéal inerte de L.*

(ii) *$L = E \amalg \mathbb{L}(X)$, ou X engendre l'idéal K de L.*

(iii) *$K \cong \mathbb{L}(UE \otimes X)$ comme UE-modules.*

PREUVE: (i) <=> (iii): Ceci résulte de 3.3.

(i) => (ii) : Soit X le sous-espace de K engendré par un système minimal de générateurs de l'idéal K. La section $E \to L$ et l'inclusion $X \hookrightarrow L$ définissent une flèche

$$\chi : E \amalg \mathbb{L}(X) \to L$$

dont la bigraduée associée est la flèche χ_L définie au début du paragraphe 3. Comme χ_L est un isomorphisme, il en est de même de χ.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Ceci est immédiat, d'après 3.2.

COROLLAIRE 4.6. *Soit K le noyau de la surjection canonique $\mathbf{L}(Y \oplus X) \to \mathbf{L}(Y)$, c'est-à-dire l'idéal engendré par X dans $\mathbf{L}(Y \oplus X)$. On a*

$$K \cong \mathbf{L}(TY \otimes X)$$

et

$$\mathbf{k} \otimes_{TY} QK \cong X.$$

DÉMONSTRATION DE 4.1. Soit n le degré de r, fixé une fois pour toutes. Soit (h_k), $k \geqq 1$ l'hypothèse additionnelle

$$(h_k)\colon\ K_p = 0, \quad p < k.$$

Si $k > n$, la conjonction de 4.1 et de h_k est trivialement vraie. Vu que toutes les algèbres de Lie considérées sont connexes, (h_1) est vérifiée d'office, et le Théorème 4.1 sera démontré si nous établissons que: 4.1 est vrai sous l'hypothèse (h_k) s'il est vrai sous l'hypothèse (h_{k+1}).

Supposons donc que K vérifie (h_k). Nous allons effectuer deux réductions du problème.

Soit d'abord $\operatorname{gr} L$ l'algèbre de Lie bigraduée associée à la filtration de L par la suite centrale descendante de K. Comme K est inerte, on a $\operatorname{gr} L \cong L/K \amalg \mathbf{L}(X)$ d'après 3.2. De plus, la classe $\bar{r}$ de r dans $\operatorname{gr} L$ est dans l'idéal engendré par X dans $\operatorname{gr} L$, qui est inerte d'après 4.4. Grâce à 2.9, il suffit de montrer que $\bar{r}$ est inerte, de sorte que nous pouvons supposer sans restreindre la généralité que

$$(4.7) \qquad \begin{cases} L = E \amalg \mathbf{L}(X), \text{ et} \\ K \text{ est l'idéal de } L \text{ engendré par } X. \end{cases}$$

Ensuite, quel que soit $m > 0$, l'idéal engendré par X dans $E/E_{>m} \amalg \mathbf{L}(X)$ est inerte et satisfait à (h_k). Les flèches horizontales du carré

$$\begin{array}{ccc} E \amalg \mathbf{L}(X) & \twoheadrightarrow & E/E_{>m} \amalg \mathbf{L}(X) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi_m \\ E \amalg \mathbf{L}(X)/(r) & \twoheadrightarrow & E/E_{>m} \amalg \mathbf{L}(X)/(r) \end{array}$$

sont l'identité en degrés $\leqq m$, et l'on a donc

$$\operatorname{Tor}^{\pi}_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = \operatorname{Tor}^{\pi_m}_{p,q}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$$

pour $p+q < m$. En appliquant 3.2 (iii), nous pouvons réduire la démonstration ou cas où E est de dimension totale finie.

Il reste à démontrer que si 4.1 est vrai sous l'hypothèse (h_{k+1}) il est aussi vrai pour l'hypothèse (h_k) si 4.7 est satisfaite et E est de dimension finie. Nous procédons par récurrence sur la dimension, e, de E.

Si $e = 0$ le 4.1 résulte de [13]. Etablissons le pas de la récurrence sur e. Soit a un élément (non nul) de degré maximum dans E, et par abus de notation, notons également a l'idéal de dimension 1 engendré par a dans E. Soit $(a)_L$ l'idéal engendré par a dans L et considérons le diagramme.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] \arrow[d] & (a)_L \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & E \amalg \boldsymbol{L}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K'' \arrow[r] \arrow[d] & E/a \amalg \boldsymbol{L}(X) \arrow[r] \arrow[d] & E/a \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches sont les inclusions et les surjections évidentes, et les lignes et colonnes sont exactes. Deux cas se présentent:

PREMIER CAS. $r \notin K'$.

Dans ce cas, $\bar{r} = \eta(r)$ est non nul dans K'', et K'' vérifie (h_k). D'après l'hypothèse de récurrence sur e, $\bar{r}$ est inerte dans $E/a \amalg \boldsymbol{L}(X)$. D'après 4.3 la restriction à $\bar{r}$ de l'action de $U(E/a)$ sur K'' est une injection

$$U(E/a) \otimes \boldsymbol{k}.\bar{r} \hookrightarrow K''$$

dont l'image V est un sous-espace vectoriel inerte de K''. Soit maintenant A un relèvement linéaire de $U(E/a)$ dans UE, et soit $A.r$ l'image de la restriction à $A \otimes \boldsymbol{k}.r$ de l'action de UE sur K. Il s'ensuit que $A \otimes \boldsymbol{k}.r \to A.r$ est un isomorphisme, ainsi que la restriction de η à $A.r$.

D'autre part, d'après 4.5 nous avons les isomorphismes:

$$K = \boldsymbol{L}(T(a) \otimes A \otimes X). \tag{4.8}$$

$$K'' = \boldsymbol{L}(U(E/a) \otimes X). \tag{4.9}$$

Comme 4.8 est un isomorphisme de $T(a)$-modules, le produit semi-direct $K \rtimes a$ s'identifie à $L(A \otimes X) \amalg a \cong K'' \amalg a$ et dans le diagramme suivant on $a\, \varrho\alpha = \eta$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[dr, "\eta"'] & K'' \amalg a \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\varrho"] & a \arrow[r] & 0 \\ & & K'' & & \end{tikzcd}$$

où ϱ est la projection canonique, et α la composée $K \hookrightarrow K \rtimes a \cong$ $\cong \mathbf{L}(A \otimes X) \amalg a \cong K'' \amalg a$.

Observons que $\alpha(A.r) \oplus a$ est un sous-espace vectoriel inerte dans $K'' \amalg a$: en effet a est inerte et $\varrho(\alpha(A.r)) = \eta(A.r) = U(E/a).\bar{r}$ qui est inerte dans K''. Il s'ensuit que $\alpha(A.r)$ est inerte dans $K'' \amalg a$. Une deuxième application de 4.3 montre alors que

$$T(a) \otimes A.r \to T(a).A.r$$

est un isomorphisme sur un sous-espace vectoriel inerte de K.

Mais UE est isomorphe à $T(a) \otimes A$ et par conséquent

$$UE \otimes \mathbf{k}.r \to UE.r$$

est un isomorphisme sur un sous-espace inerte de K. Une troisième application de 4.3 (à l'extension $K \rightarrowtail L \twoheadrightarrow E$) montre que r est inerte dans L.

DEUXIÈME CAS: $r \in K'$.

Nous allons établir que K' est inerte dans L et vérifie $(h_{k+\deg a})$, et donc (h_{k+1}): ceci achèvera la démonstration compte tenu des réductions opérées ci-dessus.

D'abord K' est bien un idéal de L car $K' = K \cap (a)_L$. D'autre part, K' est le noyau de la projection η, qui peut s'écrire, en vertu de 4.8 et 4.9

$$\eta = \mathbf{L}(q): \mathbf{L}(T(a) \otimes A \otimes X) \twoheadrightarrow \mathbf{L}(U(E/a) \otimes X)$$

où q est la projection de noyau $T(a)_+ \otimes A \otimes X$ qui identifie A à $U(E/a)$. Le Corollaire 4.6 nous donne alors l'isomorphisme

$$K' = \mathbf{L}(T(U(E/a) \otimes X) \otimes T(a)_+ \otimes A \otimes X)$$

compatible avec la structure de $UK'' = T(U(E/a) \otimes X)$-module à gauche sur QK'. En particulier QK' est UK''-libre, et

$$\mathbf{k} \otimes_{UK''} QK' = T(a)_+ \otimes A \otimes X.$$

Mais a est dans le centre de E; donc dans l'algèbre enveloppante UE on a

$$T(a)_+.A = a.UE = UE.a$$

et par conséquent $\boldsymbol{k} \otimes_{UK''} QK'$ est un UE-module libre sur $a \otimes X$. Le Lemme 4.4 appliqué à l'extension

$$0 \to K'' \rightarrowtail L/K' \twoheadrightarrow E \to 0$$

assure alors que QK' est un $U(L/K')$-module libre; comme K' est une algèbre de Lie libre, l'idéal K' est inerte dans L.

Enfin on vient de voir que K' est engendré en tant qu'idéal par $a \otimes X$: il vérifie donc $(h_{k+\deg a})$.

EXAMPLE 4.10. Soient a, b, a', b', de degré 2 et soit

$$\Gamma = \mathbf{L}(a, a', b, b')/([a, b] + [a', b']).$$

Tout élément non nul, $u \in \Gamma$, est alors inerte.

En effet si $\deg u = 2$ l'algèbre de Lie $\boldsymbol{L}(a, b, a', b')/u$ est libre. La suite u, $[a, b] + [a', b']$ est donc inerte dans $\boldsymbol{L}(a, a', b, b')$, de sorte que u est inerte dans Γ.

Soit maintenant $\deg u > 2$ et observons que la suite

$$a', b', [a, b] + [a', b']$$

est inerte dans $\boldsymbol{L}(a, a', b, b')$. Il s'ensuit que a', b' engendrent un idéal inerte, I, dans Γ. Or le quotient Γ/I est concentré en degré 2. Ainsi u est dans I, qui est inerte. L'élément u est donc inerte dans Γ d'après 4.1.

EXEMPLE 4.11. Considérons à présent l'espace

$$Z = (S^3 \vee S^3 \vee S^3 \vee S^3) \cup_\phi e^6$$

où $\phi = [\tilde{a}, \tilde{b}] + [\tilde{a}', \tilde{b}'] \in \pi_5(S^3 \vee S^3 \vee S^3 \vee S^3)$, $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{a}'$, $\tilde{b}'$ désignant les inclusions des sphères dans le bouquet. Il est facile de voir que Z n'est autre que la somme connexe de deux exemplaires de $S^3 \times S^3$. Soient a, b, a', b' les éléments correspondants dans $\boldsymbol{\pi}(S^3 \vee S^3 \vee S^3 \vee S^3)$.

Comme $[a, b] + [a'.b']$ est inerte dans $\boldsymbol{\pi}(S^3 \vee S^3 \vee S^3 \vee S^3) = \boldsymbol{L}(a, b, a', b')$, l'algèbre de Lie $\boldsymbol{\pi}(Z)$ est isomorphe à l'algèbre Γ de l'exemple 4.9. Comme $\mathrm{gl.dim}\, \Gamma = 2$, la catégorie rationnelle $\mathrm{cat}_0(Z)$ de Z égale à 2 (cf. [8]). Soit maintenant ψ un élément non nul quelconque de $\boldsymbol{\pi}_r(Z)$. D'après 4.9, ψ est inerte et par conséquent

$$\boldsymbol{\pi}(Z \cup_{\tilde{\psi}} e^{r+2}) \cong \Gamma/(\psi)$$

et $2 = \mathrm{gl.dim}(Z \cup_{\tilde{\psi}} e^{r+2}) = \mathrm{cat}_0(Z \cup_{\tilde{\psi}} e^{r+2})$. Nous avons ainsi construit un

CW-complexe fini dont la catégorie rationnelle n'est pas modifiée par l'attachement d'une cellule quelconque. Notons que tous les espaces $Z \cup_{\tilde{\psi}} e^{r+2}$ sont π-formels.

5. Homotopie des variétés "percées".

Nous concluons ce travail par un résultat qui fournit des exemples remarquables de classes d'homotopie inertes. Appellons *monogène* une algèbre associative graduée engendré par un seul élément. Si V est une variété et $v \in V$ nous notons la variété "percée $V - v$ par $\mathring{V}$.

THÉORÈME 5.1. *Soit V une variété (ou plus généralement un $\mathbb{Q}$-complexe de Poincaré [6]) compacte, sans bord, simplement connexe, de dimension n, et soit v un point de V. Si $H^*(V;\mathbb{Q})$ n'est pas monogène, l'inclusion $\mathring{V} \hookrightarrow V$ induit une surjection*

$$\pi(\mathring{V}) \to \pi(V)$$

en homotopie rationnelle.

En d'autres termes, la classe de l'inclusion d'une petite $(n-1)$-sphère entourant v est inerte dans $\pi(\mathring{V})$; ou encore, l'attachement de la n-cellule dans une décomposition cellulaire minimale de V est inerte.

Dans le cas particulier où V est un espace formel, ce théorème est dû à *L.* Avramov [3, Théorème 7.5]: il est intéressant d'observer qu'Avramov a été conduit à ce résultat en traduisant une propriété des anneaux locaux de Gorenstein au moyen du "dictionnaire" algèbre locale – topologie découvert par J.-E. Roos et compilé depuis trois ans par Avramov et Félix, entre autres (cf. [3], [4]). Le Théorème 5.1 est également à rapprocher du résultat de J. Stasheff [19] suivant lequel le type d'homotopie rationnelle d'une variété V est entièrement déterminé par celui de $\mathring{V}$ et l'algèbre $H^*(V;\mathbb{Q})$: notre théorème fournit une description explicite de l'algèbre de Lie $\pi(V)$ en fonction de $\pi(\mathring{V})$ si $H^*(V;\mathbb{Q})$ n'est pas monogène.

Si $H^*(V;\mathbb{Q})$ est monogène de la forme $P(x)/x^{m+1}$, $m \geqq 1$, un argument cellulaire montre que $H^*(\mathring{V};\mathbb{Q})$ est alors de la forme $P(x)/x^m$. Les espaces V, $\mathring{V}$ sont alors intrinsèquement formels et leurs algèbres de Lie ont la forme

$$\pi(V) = \mathbb{Q}.\alpha \oplus \mathbb{Q}.\beta; \quad \pi(\mathring{V}) = \mathbb{Q}.\alpha \oplus \mathbb{Q}.\gamma$$

où $|\alpha| = |x| - 1$, $|\beta| = (m+1)|x| - 2$, et $|\gamma| = m|x| - 2$. Le morphisme $\pi(\mathring{V}) \to \pi(V)$ envoie α sur α et γ sur zéro.

Enfin, si V est rationnellement une sphère alors $\mathring{V}$ est rationnellement contractile.

Avant de passer à la démonstration de 5.1 nous en donnons une application aux sommes connexes: soient V et W deux variétés (compactes, sans bord, simplement connexes) de dimension n qui ne sont pas rationnellement des sphères. Soit $V \# W$ leur somme connexe et soit $a \in \pi_{n-2}(V \# W)$ l'élément défini par le plongement $j: S^{n-1} \to V \# W$ de la sphère médiane dans le "collier". Alors

$$V \# W \cup_j e^n = V \vee W, \text{ et} \tag{5.2}$$

$$(V \# W)^{\circ} = V^{\circ} \vee W^{\circ}. \tag{5.3}$$

THÉORÈME 5.4. *Supposons que V et W vérifient les hypothèses ci-dessus.*

(i) *Si ni $H^*(V; \mathbf{Q})$, ni $H^*(W; \mathbf{Q})$ n'est monogène alors a est inerte dans $\pi(V \# W)$. L'algèbre bigraduée associée à la filtration $\langle a \rangle$-adique de $\pi(V \# W)$ est donnée par*

$$\mathrm{gr}(\pi(V \# W)) = \mathbf{L}(a) \amalg \pi(V) \amalg \pi(W).$$

(ii) *Si au plus une des algebres $H^*(V; \mathbf{Q})$, $H^*(W; \mathbf{Q})$ est monogène alors $\pi(V \# W)$ contient une algèbre de Lie libre sur deux générateurs.*

(iii) *La série $\Omega(V \# W)(z) = \Sigma \dim H^p(\Omega(V \# W); \mathbf{Q}) \cdot z^p$ est une fonction rationnelle des séries $\Omega V(z)$ et $\Omega W(z)$.*

DÉMONSTRATION DE 5.4 (À PARTIR DE 5.1).

(i) Dans ce cas d'après 5.1, $\pi(V^{\circ}) \to \pi(V)$ et $\pi(W) \to \pi(W^{\circ})$ sont surjectives et, compte tenu de (5.2) et (5.3), il en est donc de même pour $\pi(V \# W) \to \pi(V \vee W)$.

(ii) Supposons que c'est $H^*(W; \mathbf{Q})$ qui n'est pas monogene. D'après 5.1, $\pi(W^{\circ}) \to \pi(W)$ est surjective. D'après 5.1 et les remarques qui le suivent, $\pi(V^{\circ}) \to \pi(V)$ est non nulle. L'image de $\pi(V \# W)$ dans $\pi(V \vee W)$ contient, alors, une algèbre de la forme $\mathbf{Q}.a \amalg \mathbf{Q}.b$ avec $\deg b$ pair. Celle-ci contient $\mathbf{L}([a,[a,b]], b)$, qu'on peut remonter dans $\pi(V \# W)$.

(iii) Rappelons que $H^*(\Omega X; \mathbf{Q}) = U\pi(X)$. Puisque $H^*(V \# W; \mathbf{Q})$ n'est pas monogène, il résulte de 5.1 et de 2.4 (iii) que

$$\begin{aligned} \Omega(V \# W)(z)^{-1} &= \Omega((V \# W)^{\circ})(z)^{-1} + z^{n-2} \\ &= \Omega(V^{\circ})(z)^{-1} + \Omega(W^{\circ})(z)^{-1} - 1 + z^{n-2}. \end{aligned}$$

Si $H^*(V; \mathbf{Q})$ est monogène alors $\Omega(V^{\circ})(z)$ et $\Omega(V)(z)$ sont rationnelles; sinon $\Omega(V^{\circ})(z)^{-1} = \Omega(V)(z)^{-1} - z^{n-2}$. Ceci étant également vrai pour W, le (iii) s'ensuit.

Procédons maintenant à la démonstration du 5.1, qui, en vertu de 3.4, consiste à montrer que la fibre F de l'inclusion $\hookrightarrow V$ a le type d'homotopie rationnelle d'un bouquet de sphères: il suffit pour cela de montrer que le modèle minimal de Sullivan $\mathcal{M}_F$ de F est quasi-isomorphe à l'algèbre $H^*(F)$, munie de la différentielle nulle et du produit trivial; c.-à.-d. $H^+(F).H^+(F) = 0$.

Nous commençons par établir quelques lemmes préparatoires.

Lemme 5.5. *Toute variété* $(r-1)$-*connexe* V (*compacte, sans bord*), *avec* $r \geqq 2$, *de dimension* n, *admet un modèle non libre* A *vérifiant*

(1) $A^i = 0$ *si* $0 < i < r$.

(2) $dA^r = 0$; i.e. $A^r = H^r(V)$.

(3) $A^n = H^n(V) = \mathbb{Q}.\Omega$.

(4) $A^i = 0$ *si* $i > n$.

Preuve. Le modèle minimal $\mathcal{M}_V$ vérifie les conditions (1) et (2). Choisissons un cocycle non cohomologue à zéro $\Omega \in \mathcal{M}_V^n$, un supplémentaire U des cocycles de degré $n-1$ et un supplémentaire W de $\mathbb{Q}.\Omega$ dans $\mathcal{M}_V^n$ qui contient dU. Alors $U \oplus W \oplus \mathcal{M}_V^{>n}$ est un idéal (car $\mathcal{M}^1 = 0$) contractile par construction, et le quotient

$$A = \mathcal{M}_V/(U \oplus W \oplus \mathcal{M}_V^{\geqq n})$$

vérifie les conditions du lemme.

Lemme 5.6. *Soit* A *un modèle de* V *vérifiant les conditions du Lemme* 5.5. *Un modèle de* $\mathring{V}$ *est, alors,* $A \oplus \mathbb{Q}.u$, *avec* $|u| = n-1$, *muni de la structure d'algèbre différentielle qui étend celle de* A, *avec* $u.A^+ = 0$ *et* $du = \Omega$.

Preuve. $\mathring{V}$ se rétracte par déformation sur le $n-1$ squelette de V, dont un modèle est $\mathcal{M}_V/(\mathcal{M}_V^{\geqq n} \oplus U)$, où U est un supplémentaire des $(n-1)$-cocycles dans $\mathcal{M}_V^{n-1}$. Par construction de A on a des quasi-isomorphismes

$$\mathcal{M}_V/(\mathcal{M}_V^{\geqq n} \oplus U) \xrightarrow{\cong} A/\mathbb{Q}.\Omega \xleftarrow{\cong} A \oplus \mathbb{Q}.u.$$

Soit A une algèbre différentielle graduée commutative (A.D.G.C.) de type fini, vérifiant $H^1(A) = 0$, $H^0(A) = \mathbb{Q}$. On peut plonger A dans une algèbre contractile de la forme $A \otimes \Lambda\bar{X}$, minimale au sens que la différentielle de $A \otimes \Lambda\bar{X}$ vérifie

$$d\bar{X} \subset A^+ \otimes \Lambda\bar{X}.$$

Il suffit pour cela de prendre un modèle minimal de l'augmentation $A \to \mathbb{Q}$.

Si A est un modèle de l'espace S, l'extension "de Koszul-Sullivan"

$$A \hookrightarrow (A \otimes \Lambda \bar{X}, d) \to (\Lambda \bar{X}, 0)$$

est alors un modèle de la fibration de l'espace des chemins $S \leftarrow ES \leftarrow \Omega S$. De même, si $\phi : A \to B$ est un morphisme d'A.D.G.C. réprésentant une application continue $\phi : T \to S$ alors l'A.D.G.C. $B \otimes \Lambda \bar{X} = B \otimes_A (A \otimes \Lambda \bar{X})$ est un modèle du fibré $F \to T$ image réciproque de ES par ϕ (cf. [12, paragraphe 20]). Comme F est la fibre homotopique de ϕ, on en déduit le:

LEMME 5.7. *Soit A un modèle de V vérifiant les conditions du Lemme* 5.5, *et soit $A \otimes \Lambda \bar{X}$ une* KS-*extension contractile minimale de A. Un modèle de la fibre homotopique F de l'inclusion $\overset{\circ}{V} \hookrightarrow V$ est alors*

$$(A \oplus \mathbf{Q}.u) \otimes_A (A \otimes \Lambda \bar{X}) = (A \oplus \mathbf{Q}.u) \otimes \Lambda \bar{X}.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.1.

Il s'agit de montrer que $(A \oplus \mathbf{Q}.u) \otimes \Lambda \bar{X}$ est quasi-isomorphe à une A.D.G.C. triviale. Remarquons d'abord que $(A \otimes \Lambda \bar{X})^+$ est un sous-complexe acyclique de $(A \oplus \mathbf{Q}.u) \otimes \Lambda \bar{X}$, et que le complexe quotient $(\mathbf{Q}.u \otimes \Lambda \bar{X}) \oplus \mathbf{Q}$ hérite d'une différentielle nulle. Nous avons ainsi montré que, additivement:

$$\tilde{H}_*(F) = s^{n-1} H_*(\Omega V).$$

En particulier, F n'est jamais de dimension finie.

Nous devons donc construire une famille de cocycles de produits mutuels nuls et dont l'image dans

$$\mathbf{Q}.u \otimes \Lambda \bar{X} = [(A \oplus \mathbf{Q}.u) \otimes \Lambda \bar{X}]/A \otimes \Lambda \bar{X}$$

soit une base de $\mathbf{Q}.u \otimes \Lambda \bar{X}$.

Soit x un élément non nul de A^r. D'après l'hypothèse faite sur V, on a $1 < r \leqq n/2$, et d'après 5.5(2) x est un cocycle. Par dualité de Poincaré, il existe un cocycle $\omega \in A^{n-r}$ tel que $\omega . x = \Omega$; de plus, l'idéal I annulateur de ω contient $A^{>r}$, et $I \cap A^r$ est un supplémentaire de $\mathbf{Q}.x$ dans A^r. Par suite

$$A^+ = I \oplus \mathbf{Q}.x \quad \text{avec } \omega . I = 0, \ \omega . x = \Omega.$$

Nous distinguerons deux cas suivant la parité de r.

Premier cas: *r est impair.* On a donc $x^2 = 0$.

LEMME 5.8. *Avec les notations et hypothèses ci-dessus, on peut choisir une base $(\bar{x}_i)_{i \in \mathbf{N}}$ d'$\bar{X}$* tel que $d\bar{x}_0 = x$ et $\forall i > 0$, $d\bar{x}_i \in I \otimes \Lambda \bar{X}$.

PREUVE DE 5.8. Par construction de $A \otimes \Lambda\bar{X}$, $\bar{X}$ est muni d'une base $(\bar{y}_i)_{i \in \mathbf{N}}$ telle que

$$d\bar{y}_0 = x \quad \text{et} \quad d\bar{y}_i \in A^+ \otimes \Lambda(\bar{y}_j, j < i).$$

Il s'ensuit que $l > k \Rightarrow |\bar{y}_l| \geqq |\bar{y}_k|$.

Posons $\bar{x}_0 = \bar{y}_0$. Supposons ensuite $(\bar{x}_j)$ construite pour $0 \leqq j < i$ et vérifiant $\bar{x}_j - \bar{y}_j \in \Lambda(\bar{x}_k, k < j)$. Ecrivons

$$d\bar{y}_i \equiv \sum_k x \otimes \bar{x}_0^k . \Phi_{i,k} \bmod . I \otimes \Lambda\bar{X}$$

où $\Phi_{i,k}$ est un polynôme en les $\bar{x}_j$ avec $0 < j < i$. Alors

$$x \otimes \bar{x}_0^k . \Phi_{i,k} \equiv \frac{1}{k+1} d(\bar{x}_0^{k+1} \Phi_{i,k}) \bmod . I \otimes \Lambda\bar{X}$$

et en posant

$$\bar{x}_i = \bar{y}_i - \sum_k \frac{1}{k+1} \bar{x}_0^{k+1} \Phi_{i,k}$$

on obtient $d\bar{x}_i \in I \otimes \Lambda(\bar{x}_j, j < i)$.

Nous pouvons donc supposer que $\bar{X}$ admet une base $\bar{x}_i$ vérifiant les conditions du lemme. Considérons les éléments

$$z_{k,\Phi} = u \otimes \bar{x}_0^k . \Phi + (-1)^n \frac{1}{k+1} \omega \otimes \bar{x}_0^{k+1} . \Phi$$

de $(A \oplus \mathbf{Q}u) \otimes \Lambda\bar{X}$, où k parcourt $\mathbf{N}$ et Φ une base de $\Lambda\bar{X}_1$, $\bar{X}_1$ désignant le sous-espace vectoriel de $\bar{X}$ engendré par les $\bar{x}_i$, $i \geqq 1$. On vérifie immédiatement que $z_{k,\Phi}$ est un cocycle, que pour tout k, k', Φ, Φ'

$$z_{k,\Phi} . z_{k',\Phi'} = 0$$

et que les classes des $z_{k,\Phi}$ modulo $A \otimes \Lambda\bar{X}$ forment une base de $\mathbf{Q}.u \otimes \Lambda\bar{X}$. Le théorème est donc démontré dans ce cas.

REMARQUE 5.9. La dualité de Poincaré n'intervient ici que pour assurer l'existence d'un élément ω tel que $\omega . x = \Omega$: pour r impair, le Théorème 5.7 s'applique donc à des CW-complexes plus généraux.

Deuxième cas: *r pair*. Rappelons qu'un système minimal de genérateurs d'algèbre de $\mathcal{M}_V$ s'identifie à une base du dual de $\pi_*(V) \otimes \mathbf{Q}$. Il est immédiat de vérifier que puisque l'algèbre $H^*(V;\mathbf{Q})$ (de dimension totale finie) n'est pas monogène la composante impaire de $\pi_*(V) \otimes \mathbf{Q}$ est de dimension au moins deux.

Soit

$$q(V) = \inf\{j \mid \pi_{2j+1}(V) \otimes \mathbf{Q}\} \neq 0.$$

Nous procédons par recurrence sur

$$m(V) = \sum_{i < q(V)} \dim \pi_{2i}(V) \otimes \mathbf{Q}.$$

Si $m(V) = 0, r$ est impair et le théorème est établi. Nous supposons donc le théorème vrai pour $m(V) < m$, $m \geqq 1$, et nous allons montrer qu'il est encore vrai pour $m(V) = m$.

Nous supposons encore que $\bar{X}$ est muni d'une base $(\bar{x}_i)_{i \in \mathbf{N}}$ avec $d\bar{x}_0 = x$, et

$$\forall i > 0, \quad d\bar{x}_i \in A^+ \otimes \Lambda(\bar{x}_j, j < i)$$

et nous désignons par $\bar{X}_1$ le sous-espace de $\bar{X}$ engendré par les $\bar{x}_i$, $i > 0$. Notons que cette fois $|\bar{x}_0|$ est impair.

Posons

$$A_1 = \mathbf{Q} \oplus I \oplus A^+.\bar{x}_0 \subset A \otimes \Lambda\bar{x}_0;$$

c'est une sous A.D.G.C. et l'inclusion est un quasi-isomorphisme. Nous pouvons donc supposer que $A_1 \otimes \Lambda\bar{X}_1 \subset (A \otimes \Lambda\bar{x}_0) \otimes \Lambda\bar{X}_1$ est aussi une sous A.D.G.C., et que l'inclusion est encore un quasi-isomorphisme. Il en résulte que l'inclusion

$$B = (A_1 \otimes \Lambda\bar{X}_1) \oplus (u.\Lambda\bar{X}) \subset (A \oplus \mathbf{Q}.u) \otimes \Lambda\bar{X}$$

est, lui aussi, un quasi-isomorphisme d'A.D.G.C.

Posons $u' = u + (-1)^n \omega \otimes \bar{x}_0 \in B$. Evidemment

$$B_2 = \mathbf{Q} \oplus u'.\Lambda\bar{X}_1$$

est une sous A.D.G.C. de B, à différentielle et multiplication triviales. Par contre

$$B_1 = (A_1 \otimes \Lambda\bar{X}_1) \oplus (u\bar{x}_0.\Lambda\bar{X}_1) = (A_1 \oplus u\bar{x}_0) \otimes \Lambda\bar{X}_1$$

est aussi une sous A.D.G.C. de B. Un petit calcul montre que

$$B^+ = B_1^+ \oplus B_2^+ \quad \text{et} \quad B_1^+.B_2^+ = 0.$$

Il suffit donc de montrer que B_1 est quasi-isomorphe à une A.D.G.C. à multiplication et différentielle triviales. Mais $A_1 \cong A \otimes \Lambda\bar{x}_0$ est (cf. [6]) un modèle d'une variété V_1 (compacte, 1-connexe et sans bord). De plus

$$\dim \pi_i(V_1) \otimes \mathbb{Q} = \begin{cases} \dim \pi_i(V) \otimes \mathbb{Q} \quad , & i \neq r \\ \dim \pi_i(V) \otimes \mathbb{Q} - 1, & i = r. \end{cases}$$

En particulier $m(V_1) = m(V) - 1$ et, $\dim \pi_{\text{impair}}(V_1) \otimes \mathbb{Q}$ étant au moins deux, $H^*(V_1; \mathbb{Q})$ n'est pas monogène.

Nous pouvons donc appliquer l'hypothèse de récurrence à V_1. Mais dans l'A.D.G.C. B_1 on a

$$d(u\bar{x}_0) = \Omega\bar{x}_0 \quad \text{et} \quad A_1^+ . u\bar{x}_0 = 0.$$

Il s'ensuit que B_1 est un modèle de la fibre homotopique de l'inclusion $\overset{\circ}{V}_1 \hookrightarrow V_1$ et donc d'après l'hypothèse de récurrence B_1 est quasi-isomorphe à une A.D.G.C. à multiplication et différentielle triviales.

Corollaire 5.10. *Sous l'hypothèse du Théorème* 5.1, *la fibre F de l'inclusion de $\overset{\circ}{V}$ dans V a le type d'homotopie rationnelle de la* $(n-1)$-ième *suspension de la réunion disjointe de ΩV et d'un point.*

On notera que $\Sigma^{n-1}(\Omega V \vee S^\circ)$ n'est autre que la fibre homotopique de la projection $V \vee S^{n-1} \to V$.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. F. Adams et P. Hilton, *On the chain algebra of a loop space*, Comment. Math. Helv. 30 (1958), 305–330.
2. D. Anick, *Non commutative algebras and their Hilbert series*, J. Algebra 78 (1982), 120–140.
3. L. Avramov, *Local algebra and rational homotopy*, in *Homotopie Algébrique et Algèbre Locale*, Astérisque 113/114 (1984), 15–43.
4. L. Avramov et S. Halperin, *Through the looking glass: a dictionary between local algebra and rational homotopy*, in *Algebra, Algebraic Topology and their Interaction* (Proc., Stockholm, 1983), ed. J.-E. Roos (Lecture Notes in Math. 1183), pp. 1–27, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1986.
5. J. Backelin, *La serie de Poincaré-Betti d'une algèbre graduée de type fini à une relation est rationnelle*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser A-B 287 (1978), 843–846.
6. J. Barge, *Structures différentiables sur les types d'homotopie rationnelle simplement connexes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 9 (1976), 469–501.
7. F. Cohen, J. Moore et J. Neisendorfer, *Torsion in homotopy groups* I, Ann. of Math. 109 (1979), 121–168.
8. Y. Félix et S. Halperin, *Rational* L. S.*-category and its applications*, Trans. Amer. Math. Soc. 273 (1982), 1–38.
9. Y. Félix et J. C. Thomas, *Sur l'opération d'holonomie rationnelle*, in *Algebra, Algebraic*

Topology and their Interaction (Proc., Stockholm, 1983), ed. J.-E. Roos (Lecture Notes in Math. 1183), pp. 136–169. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1986.
10. D. Gottlieb, *Evaluation subgroups of homotopy groups*, Amer. J. Math. 91 (1969), 729–756.
11. V. E. Govorov, *Graded algebras* (Russian): Mat. Zametki 12 (1972), 197–204. (English): Math. Notes 12 (1972), 552–556.
12. S. Halperin, *Lectures on Minimal Models*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) 9/10 (1984), 1–261.
13. J. Labute, *Algebrès de Lie et pro-p-groupes définis par une seule relation*, Invent. Math. 4 (1967), 142–158.
14. J.-M. Lemaire, *Algèbres Connexes et Homologie des Espaces de Lacets* (Lecture Notes in Math. 422), Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1974.
15. J.-M. Lemaire, *"Autopsie d'un meurtre" dans une algèbre de chaînes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 11 (1978), 93–100.
16. J. Milnor et J. C. Moorę, *On the structure of Hopf algebras*, Ann. of Math. 81 (1965), 211–264.
17. J. C. Moore, *Differential homological algebra*, in *Actes du Congrès International des Mathématiciens* (Nice, 1970), Tome 1, pp. 335–339. Gauthier-Villars, Paris, 1971.
18. D. Quillen, *Rational homotopy theory*, Ann. of Math. 90 (1969), 205–295.
19. J. Stasheff, *Rational Poincaré duality spaces*, Illinois J. Math. 27 (1983), 104–109.
20. G. Viénnot, *Algèbres de Lie Libres et Monoïdes Libres*, (Lecture Notes in Math. 691), Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1978.

UNIVERSITY OF TORONTO
PHYSICAL SCIENCES DIVISION
SCARBOROUGH COLLEGE
SCARBOROUGH
CANADA M1C 1A4

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
LABORATOIRE ASSOCIE AU C.N.R.S. NO. 168
UNIVERSITÉ DE NICE
PARC VALROSE
F - 06034 NICE - CEDEX
FRANCE