MATH. SCAND 63 (1988). 5–35

MODÈLE DE WHITTAKER ET IDEAUX PRIMITIFS COMPLÈTEMENT PREMIERS DANS LES ALGÈBRES ENVELOPPANTES DES ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES COMPLEXES II

C. MŒGLIN

Le corps de base est $\mathbf{C}$. Soit G un groupe semi-simple connexe dont on note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie et $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante. On identifie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ grâce à une forme bilinéaire G-invariante et on note $S(\mathfrak{g})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}$, qui grâce à l'identification précédente est l'algèbre des fonctions régulières sur $\mathfrak{g}^*$. A cette exception près, si X est une variété algébrique, on note $A(X)$ l'ensemble des fonctions régulières globalement définies sur X. Soit I un idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$. Grâce aux travaux de Borho-Brylinski et de Joseph ([2], [6], [7]), on associe à I une orbite nilpotente, notée $\mathcal{O}_I$ de $\mathfrak{g}$. Soite $f \in \mathcal{O}_I$; on choisit T' un élément semi-simple de $\mathfrak{g}$, à valeurs propres dans $\mathbf{Z}$, qui vérifie $[T',f] = -2f$. On pose $T = 1/2T'$. On écrit $\mathfrak{g} = \sum_{i \in 1/2\mathbf{Z}} \mathfrak{g}^i$ la décomposition de $\mathfrak{g}$ en espaces propres pour l'action de T et on choisit $\mathfrak{m}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ vérifiant:

$$f([\mathfrak{m},\mathfrak{m}]) = 0, \quad \text{(ici on voit } f \text{ comme un élément de } \mathfrak{g}^*)$$

$$\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}(f) = 1/2 \dim(\mathfrak{g}^{[1/2]}/\mathfrak{g}(f) \cap \mathfrak{g}^{[1/2]}).$$

On pose: $\mathfrak{n} = \sum_{i \geq 1} \mathfrak{g}^i + \mathfrak{m}$. C'est une sous-algèbre de Lie nilpotente de $\mathfrak{g}$, f en est un caractère et on note N le sous-groupe de G égal à $\exp n$. On note $\mathrm{filt}^{\mathrm{nat}}$ la filtration naturelle de $U(\mathfrak{g})$ et suivant L on munit $U(\mathfrak{g})$ de la filtration décroissante, indéxée par $1/2\mathbf{Z}$, notée filt_T, suivante:

$$\forall z \in 1/2\mathbf{Z} \quad U(\mathfrak{g})_{\mathrm{filt}_T \geq z} = \oplus_{m \in 1/2\mathbf{Z}} U(\mathfrak{g})^{[m]}_{\mathrm{filt}^{\mathrm{nat}} \leq m-z}$$

où $U(\mathfrak{g})^{[m]}$ est l'espace propre pour l'action de T dans $U(\mathfrak{g})$ correspondant à la valeur propre m. On dit que I admet un modèle de Whittaker, noté M, relativement à (f,N) si l'on a:

Reçu le 2 Octobre 1986.

. M est un quotient irréductible de $U(\mathfrak{g})/I+\{X-f(X)\}_{X\in\mathfrak{n}}U(\mathfrak{g})$ d'annulateur I

. M pour la filtration quotient de filt_T a son gradué associé N-isomorphe à $A(N\cap G(f)\backslash N)$. (Isomorphisme d'algèbres où par définition $(\mathrm{gr}m)(\mathrm{gr}m')$ coïncide avec $\mathrm{gr}mu$ où u est un élément de $U(\mathfrak{g})$ de même filt_T que m' et relevant m' dans $U(\mathfrak{g})$).

J'ai démontré dans [11] que si I admet un modèle de Whittaker alors $U(\mathfrak{g})/I$ possède une filtration G-stable finie, notée Filt, ayant les propriétés suivantes:

($\dagger$) . Filt est équivalente à la filtration naturelle, $\mathrm{filt}^{\mathrm{nat}}$, et son gradué associé est commutatif et intègre (cela entraine que Filt $\leqq$ $\mathrm{fil}^{\mathrm{nat}}$, (cf. Paragraphe 8(1)).
. Il existe un G-homorphisme injectif du gradué associé, noté $\mathrm{Gr}U(\mathfrak{g})/I$, dans $A(G(f)^\circ\backslash G)$ rendant commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gr}U(\mathfrak{g})/I \arrow[r, hook] & A(G(f)^\circ\backslash G) \\ S(\mathfrak{g}) \arrow[u, "\beta"] \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

où β est l'application naturelle résultant de Filt $\leqq$ $\mathrm{filt}^{\mathrm{nat}}$, i est le comorphisme de l'application qui à $G(f)^\circ\gamma\in G(f)^\circ\backslash G$ associé $\gamma^{-1}f\in\mathfrak{g}^*$ et où $A(G(f)^\circ\backslash G)$ est graduée par les poids de $-T$ agissant par la représentation régulière gauche. (En particulier β passe au quotient par J, l'idéal des fonctions nulles sur $\overline{G.f}$.)

Le but de ce travail est de prouver (cf. Paragraphe 13) la réciproque en supposant que (T',f) appartiennent à un sl_2-triplet. (Dans ce cas $\mathfrak{n}\cap\mathfrak{g}(f)=0$.) Et de prouver ensuite (cf. Paragraphe 15) que si M est un modèle de Whittaker de I (relativement à (N,f)) et si l'on note L l'algèbre des endomorphismes G-finis de M, alors à isomorphismes près respectant toutes les structures, L contient toutes les algèbres, notées A, ayant les propriétés suivantes:

. A contient $U(\mathfrak{g})/I$ et est munie d'une action rationelle de G dont la différentielle est l'action de $\mathfrak{g}$ dans A,

. A est un $U(\mathfrak{g})/I$-module de type fini pour la multiplication à gauche de $U(\mathfrak{g})/I$ dans A,

. A est munie d'une filtration G-stable finie induisant sur $U(\mathfrak{g})/I$ une filtration équivalente à la filtration naturelle et de gradué associé commutatif, intègre et isomorphe à une sous-algèbre de $A(G(f)^\circ\backslash G)$, G-isomorphisme rendant commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gr}A \arrow[r, hook] & A(G(f)^{\circ}\backslash G) \\ S(\mathfrak{g}) \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(avec les même propriétés qu'en (†)).

On note $\mathscr{E}_I$ l'ensemble des algèbres ayant ces propriétés. L'introduction de cet ensemble d'algèbres a été faite par Vogan [14], mais dans [14] il n'y a pas d'hypothèses aussi fortes sur l'existence de filtration. Toutefois dans le cas de Sl(n, C), je vérifie à la fin de ce travail, grâce aux modèles de Whittaker, que cela revient presque au même (cf. Paragraphe 27).

En particulier L est indépendant du modèle de Whittaker choisi, à isomorphisme près. On note $\mathscr{G}$ le groupe des automorphismes de L dont la restriction à $G(\mathfrak{g})/I$ est l'identité; c'est un groupe fini (comme me l'a montré Rentschler) qui s'identifie par passage au gradué à un sous-quotient de $G(f)/G(f)^{\circ}$ (cf. Paragraphe 17). Les classes de conjuguaisons des sous-groupes de $\mathscr{G}$ classifient les éléments de $\mathscr{E}_I$, notés A, qui ont la propriété supplémentaire suivante:

. A coïncide avec la plus grande sous-algèbre du corps des fractions de A sur laquelle G opère rationnellement.

Cela permet de démontrer que des algèbres d'opérateurs différentiels tordus (cf. Paragraphe 22) $\mathscr{D}_\lambda(P\backslash G)$ et $\mathscr{D}_{\lambda'}(P'\backslash G)$ sont, si G est un groupe classique, isomorphes si (P, λ) et (P', λ') sont associés (cf. Paragraphe 21). L'hypothèse G classique est sûrement superflue et cette condition est vraisemblablement aussi nécessaire; je le démonstrerai au moins pur Sp($2n$, C) dans un travail ultérieur.

A la fin de ce travail, je montre que les idéaux primitifs dont le gradué est génériquement réduit (cf. Paragraphe 24), sont complétement premiers et du type que je considère ici, c'est-à-dire admette une filtration ayant les propriétés écrites en (*). Cela motive l'hypothèse que j'ai émise en [11] suivant laquelle tout les idéaux primitifs complètement premiers de $U(\mathfrak{g})$ aurait une filtration ayant les propriétés écrites en (*), puisqu'il est raisonable de penser qu'au moins pour les groupes classiques, tous les idéaux primitifs complètement premiers sont obtenus par induction à partir d'idéaux primitifs à gradué génériquement réduit; or les modèles de Whittaker ont l'air de bien se construire dans une situation d'induction. C'est ce que j'exploiterai dans mon travail suivant pour finir de démontrer les résulats annoncés dans [11].

Je tiens à remercier A. Bouazis, T. Levasseur et R. Rentschler pour l'ensemble des discussions que nous avons eu sur ces sujets et tout spécialement J. L. Waldspurger qui m'a entre autre fait remerquer, qu'avec le choix de $\mathfrak{n}$ fait plus haut, on a $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}(f) = 0$; cela a permis de simplifier et de généraliser mes démonstrations.

1.

On choisit une forme bilinéaire G-invariante sur $\mathfrak{g}$ d'où une identification $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$. Dans toute la suite on fixe les notations suivantes. Soit $f \in \mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ un élément nilpotent et T' un élément semi-simple de $\mathfrak{g}$ vérifiant: $[T', f] = -2f$ et (T', f) appartiennent à un sl_2-triplet. On pose $T = 1/2T'$. On choisit $\mathfrak{n}, N$ comme dans l'introduction. On note J l'idéal de $S(\mathfrak{g})$ ensemble des fonctions nulles sur $\overline{G.f}$ et $\mathscr{M}$ l'espace vectoriel engendré par les éléments $x - f(x)$ où x décrit $\mathfrak{n}$; on considèrera $\mathscr{M}$ soit comme un sous-espace vectoriel de $S(\mathfrak{g})$ soit comme un sous-espace vectoriel de $U(\mathfrak{g})$.

On fixe un idéal primitif I de $U(\mathfrak{g})$ admettant $G.f$ comme orbite associée et, sauf de 24 à 27, admettant une filtration ayant les propriétés (†) de l'introduction. On adopte aussi la notation $\mathscr{E}_I$ de l'introduction.

On note Γ la représentation régulière gauche de G dans son algèbre de fonctions régulières, $A(G)$, et encore $\Gamma(-T)$ l'action de $-T$ dans $A(G)$ (où dans $A(H \backslash G)$ quand H est un sous-groupe fermé de G normalisé par le sous-groupe à un paramètre de générateur infinitésimal T'), obtenue par différentiation. On identifie $S(\mathfrak{g})/J$ à une sous-algèbre de $A(G(f)^\circ \backslash G)$ grâce au comorphisme de l'application qui à $G(f)^\circ \gamma \in G(f)^\circ \backslash G$ associé $\gamma^{-1} f \in \mathfrak{g}^*$. Comme f est un élément nilpotent J est un idéal gradué de $S(\mathfrak{g})$. Remarquons que l'on *a*:

La graduation de $A(G(f)^\circ \backslash G)$ définie par les poids de $\Gamma(-T)$ est l'unique graduation de $A(G(f)^\circ \backslash G)$ qui induise sur $S(\mathfrak{g})/J$ la graduation naturelle par le degré. Cette filtration est indéxée par $1/2\mathbf{N}$.

En effet, on a vèrifié en [11] que la graduation de $A(G(f)^\circ \backslash G)$ par les poids de $\Gamma(-T)$ induit sur $S(\mathfrak{g})/J$ la graduation par le degré. Le reste de la remarque résulte de l'interprétation d'une graduation comme une dérivation et du résultat de Kostant [9] suivant:

$A(G(f)^\circ \backslash G)$ est la clôture intégrale de $S(\mathfrak{g})/J$ dans le corps des fonctions rationnelles sur l'espace $G(f)^\circ \backslash G$.

Ce résultat *a* en plus la conséquence importante pour nous que l'on *a*:

$A(G(f)^\circ \backslash G)$ est un $S(\mathfrak{g})/J$ de type fini.

On note filt la filtration naturelle de $U(\mathfrak{g})$ ainsi que les filtrations quotient pour tous les quotients. On définit filt_T comme dans l'introduction. Plus généralement soit A une algèbre sur laquelle T opère de façon semi-simple munie d'une filtration T-stable, notée Filt^A. On suppose pour simplifier que les valeurs propres de T sont dans $1/2\mathbf{Z}$ et que Filt^A est croissante finie à valeurs dans $1/2\mathbf{N}$. Alors on munit A d'une filtration décroissante à valeurs dans $1/2\mathbf{Z}$, notée Filt_T^A par la formule suivante:

$$\forall z \in 1/2\mathbf{Z} \quad A_{\mathrm{Filt}_T^A \geqq z} = \bigoplus_{m \in 1/2\mathbf{Z}} A^{[m]}_{\mathrm{Filt}^A \leqq m - z}$$

où $A^{[m]}$ est l'espace propre pour l'action de T dans A correspondant à la valeur propre m.

Si au lieu d'avoir une filtration, on a une graduation, notée Gr^A, on définit de façon similaire une autre graduation qui tient compte des valeurs propres de T, notée Gr_T^A. Dans la situation précédente, on a:

L'algèbre graduée associée à Fil_T^A *"coïncide" avec l'algèbre graduée associée à* Filt^A *comme algèbre non graduée; la graduation a été perturbée comme expliquer ci-dessus.* Filt_T^A *est séparée,* i.e. $\mathrm{Gr}_{\mathrm{Filt}_T^A} A = \mathrm{Gr}_T \mathrm{Filt}^A A$.

2.

Dans ce paragraphe, on fait des remarques qui serviront plusieurs fois dans la suite.

2 – (1). *Soit y un élément de $S(\mathfrak{g})$ homogène de degré noté d et T-vecteur propre de valeur propre notée m. Alors on a*:

(i) *si $m > d$, $y \in \mathcal{M}S(g)$.*
(ii) *si $m = d$, $y - \langle y, f \rangle \in \mathcal{M}S(g)$.*
(iii) *si $\langle y, f \rangle \neq 0$ alors $m = d$.*

(i) et (ii) résultent immédiatement de la définition de $\mathfrak{n}$. Quant à (iii), cela résulte de ce que l'on a:

Soit x un élément de $\mathfrak{g}$, T-vecteur propre de valeur propre m'; alors

$$T.f(x) = -f(x) = \bar{f}(-[T, x]) = -m' f(x).$$

D'où, $f(x) = 0$ si $m' \neq 1$.

2 – (2). *Soit u un élément de $U(\mathfrak{g})$ de filtration inférieure ou égale à d et T-vecteur propre de valeur notée m. Alors on a*:

(i) *si $m > d$, alors $u \in \mathcal{M}U(\mathfrak{g})$.*
(ii) *si $m = d$, alors $u - \langle \mathrm{gr}_d u, f \rangle \in \mathcal{M}U(g)$ où $\mathrm{gr}_d u$ est l'image de u dans* $S(\mathfrak{g})_{\leqq d}/S(\mathfrak{g})_{<d}$. (Ici $S(\mathfrak{g})$ est filtrée par le degré usuel.)

On utilise le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt.

2–(3). *Soit A une algèbre intègre contenant $U(\mathfrak{g})/I$ et qui est un $U(\mathfrak{g})/I$-module à gauche de type fini. Soit I' un sous-espace vectoriel de A vérifiant*

$(U(\mathfrak{g})/I)I'A = I'$, *alors on a:*

$$I' \neq 0 \Leftrightarrow I' \cap U(\mathfrak{g})/I \neq 0.$$

En effet supposons $I' \neq 0$ et soit $a \in I' - \{0\}$. La finitude de A sur $U(\mathfrak{g})/I$ assure qu'il existe $m \in \mathbb{N}$, $u_0, \ldots, u_m \in U(\mathfrak{g})/I$ tels que l'on ait dans A:

$$u_m a^m + \ldots + u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_m \neq 0.$$

L'intégrité de A assure que l'on peut supposer $u_0 \neq 0$. Il est alors clair que $u_0 \in (I' \cap U(\mathfrak{g})/I) - \{0\}$.

3.

Lemme. *Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_D$ des éléments T-vecteurs propres de* $\mathfrak{n}$ *engendrant un sous-espace vectoriel ne coupant pas* $\mathfrak{g}(f)$. *Alors il existe un élément noté y_0 de $S(\mathcal{G})$ homogène et T-vecteur propre vérifiant:*

$\forall \lambda \in \mathfrak{g}^*$ *tel que* $\langle y_0, \lambda \rangle \neq 0$, *l'espace vectoriel engendré par* $\alpha_1, \ldots \alpha_D$ ne coupe pas $\mathfrak{g}(\lambda)$,

$$\langle y_0, f \rangle \neq 0, \quad \langle y_0, \lambda \rangle = 0 \quad si \quad \lambda \in \overline{G.f} - G.f.$$

En particulier $\alpha'_1 := \alpha_1 - f(\alpha_1), \ldots, \alpha'_D := \alpha_D - f(\alpha_D)$ *forme une suite régulière dans le localisé* $(S(\mathfrak{g})/J)_{y_0}$.

On note $\mathfrak{g}'$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}^*$, notés λ, pour lesquels $\mathfrak{g}(\lambda)$ coupe l'espace vectoriel engendré par $\alpha_1, \ldots, \alpha_D$. Comme le complémentaire de $\mathfrak{g}'$ est un ouvert de $\mathfrak{g}^*$, il est clair que $\mathfrak{g}'$ est un fermé de $\mathfrak{g}^*$ et qu'il en est de même de $\mathfrak{g}' \cup (\overline{G.f} - G.f) := \mathfrak{g}''$. En outre $\mathfrak{g}''$ est stable par homothéties est par l'action adjointe du sous-groupe à un paramètre de générateur infinitésimal T'. Comme $\mathfrak{g}''$ ne contient pas f la première partie du lemme est claire. Les propriétés de y_0 assurent que l'ouvert de $G.f$ défini par $y_0 \neq 0$ est un ouvert lisse. La deuxième partie du lemme résulte du critère différentiel pour les systèmes de paramètres.

4.

Lemme. *On fixe une base $\alpha_1, \ldots, \alpha_Q$ d'un supplémentaire de* $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}(f)$ *dans* $\mathfrak{n}$ *formée de T-vecteurs propres. On suppose que l'on a:*

$$T\text{-poids } \alpha_i \geqq T\text{-poids } \alpha_{i+1} \quad pour \quad 1 \leqq i < Q.$$

Alors il existe des T-vecteurs propres notés $\beta_1, \ldots, \beta_Q$ de $\mathfrak{g}$ *vérifiant:*

$$T\text{-poids } \beta_i = -T\text{-poids } \alpha_i + 1 \quad \textit{pour} \quad 1 \leqq i \leqq Q,$$

$$([\beta_i, \alpha_j]) - \delta_{i,j} \in \mathcal{M} \quad \textit{où} \quad 1 \leqq j \leqq i \leqq Q$$

et où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker.

En outre l'espace vectoriel engendré par les $\alpha_1, \ldots, \alpha_Q$, $\beta_1, \ldots, \beta_Q$ est un supplémentaire de $\mathfrak{g}(f)$ dans $\mathfrak{g}$.

Pour la forme bilinéaire antisymétrique $(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto f([x, y])$, $\mathfrak{g}^{[i]}$ s'identifie à l'orthogonal de $g^{[-i+1]}$. Utilisant en plus l'hypothèse sur $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}^{1/2}$, on en déduit qu'il existe des éléments notés $\beta_1, \ldots, \beta_Q$ de $\mathfrak{g}$ vérifiant:

T-poids $\beta_i = -T$-poids $\alpha_i + 1$,

$f([\beta_i, \alpha_j]) - \delta_{i,j} = 0$

si $1 \leqq i \leqq Q$ et si T-poids $\beta_i = -T$-poids $\alpha_j + 1$.

La première partie du lemme résulte alors de la définition de $\mathfrak{n}$ et de l'ordre imposé aux α_i (c.f. 2−(1)). La deuxième résulte de la dualité, déjà utilisée, entre $\mathfrak{g}^{[i]}$ et $\mathfrak{g}^{[-i+1]}$ et de la définition de $\mathfrak{n}$.

5.

LEMME. *On a* $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}(f) = 0$.

On sait que $\mathfrak{g}(f)$ est le commutant de f identifié à un élément de $\mathfrak{g}$. On complète (T', f) en un sl_2-triplet et on décompose $\mathfrak{g}$ sous l'action de ce sl_2-triplet. Let commutant de f est engendré comme expace par l'ensemble des vecteurs de plus bas poids; le lemme résulte alors de ce que tous ces vecteurs ont des valeurs propres inférieures ou égales à 0 et de la définition de $\mathfrak{n}$.

6.

LEMME. *Soit x un T-vecteur propre inclus dans $\mathfrak{g}(f)$ de poids noté z. Alors il existe un élément noté y de J et un élément y' de $S(\mathfrak{g})$ tels que l'on ait:*

. $x + y' - y \in \mathcal{M}S(\mathfrak{g})$.

. *y' appartient à la sous-algèbre de $S(\mathfrak{g})$ engendrée par l'ensemble des T-vecteurs propres de g de poids strictement plus grand que z.*

Ici, pour tout élément s de $S(\mathfrak{g})$, on note ds la différentielle de s, i.e. $ds \in \mathfrak{g} \otimes S(\mathfrak{g})$ et $d_f s \in \mathfrak{g}$ la différentielle au point f. Comme f est un point lisse de $G.f$, l'ensemble des éléments $d_f s$ où s parcourt J coïncide avec $\mathfrak{g}(f)$. Comme J est un idéal homogène T-stable, on peut choisir des éléments $s_1, \ldots, s_t$ de J homogènes et T-vecteurs propres tels que $d_f s_1, \ldots, d_f s_t$ soit une base de $\mathfrak{g}(f)$. On fixe une base $x_1, \ldots, x_m$ de $\mathfrak{g}$ et on écrit à l'aide de cette base

$$ds_i = \sum_{1 \leq j \leq m} x_j \otimes s_{ij} \quad \text{où} \quad s_{ij} \in S(\mathfrak{g}).$$

Les éléments s_{ij} sont homogènes de degré un de moins que le degré de s et sont des T-vecteurs propres de T-poids égal à T-poids $s_i - T$-poids x_j. On a:

$$d_f s_i = \sum_{1 \leq j \leq m} x_j \langle s_{ij}, f \rangle.$$

Or si $\langle s_{ij}, f \rangle \neq 0$, d'après $2-(1)$(iii), le degré de s_{ij} coïncide avec son T-poids. Ainsi $d_f s_i$ est un T-vecteur propre vérifiant:

$$T\text{-poids } d_f s_i = T\text{-poids } s_i - d^\circ s_i + 1 = \operatorname{filt}_T s_i + 1.$$

On pose $y_i = d_f s_i$. Clairement il suffit alors de démontrer que l'on a pour tout indice i:

il existe y_i' un élément de la sous-algèbre de $S(\mathfrak{g})$ engendrée par les éléments de $\mathfrak{g}$ de T-poids strictement supérieurs au T-poids de y_i tels que:

$$y_i + y_i' - s_i \in \mathcal{M}S(\mathfrak{g}).$$

On fixe i et on supprime les indices; on pose $z' = T$-poids $y - 1 = \operatorname{filt}_T y$. On écrit s comme polynome en $x_1, \ldots, x_m$; on suppose ici que $y = x_1$. Et on calcule s modulo $\mathcal{M}S(\mathfrak{g})$. Comme $\operatorname{filt}_T s = z'$, d'après ce que l'on a vu précédemment, tous les monomes intervenant sont de filt_T égale à z'. Soit s' un tel monome;

1^e^ Cas. s' s'écrit $s' = x_j s''$ où T-poids $x_j < T$-poids $y = z' + 1$. On a alors $\operatorname{filt}_T s'' > 0$ et d'après Paragraphe 2(1)(i), cela entraine que $s'' \in \mathcal{M}S(\mathfrak{g})$, donc aussi s'.

2^e^ Cas. s' s'écrit $s' = x_j s''$ où T-poids $x_j = T$-poids y. Il résulte de $2-(1)$(ii) que $s' - x_j \langle s'', f \rangle \in \mathcal{M}S(\mathfrak{g})$. De plus si l'on $a \langle s'', f \rangle \neq 0$ et si s'' s'écrit $s'' = x_r s'''$, on a T-poids $x_r = 1$.

3^e^ Cas. s' est dans la sous-algèbre de $S(\mathfrak{g})$ engendrée par les T-vecteurs propres de $\mathfrak{g}$ de T-poids strictement supérieurs au T-poids de y.

On calcule $d_f s'$ dans les différentes cas. En utilisant le fait que $\langle x_j, f \rangle = 0$ si T-poids $x_j \neq 1$ et que d'après, 5, y étant dans $\mathfrak{g}(f)$, T-poids $y < 1$, on a dans les deux premiers cas:

$$d_f s' = x_j \langle s'', f \rangle + (d_f s'') \langle x_j, f \rangle = x_j \langle s'', f \rangle.$$

Dans le troisième cas $d_f s'$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ engendré par les T-vecteurs propres de T-poids $> z'+1$. Puisque $d_f s = x_1$ par hypothèse, on voit alors que la somme des monomes qui sont dans le 2e cas et non dans le premier est congrue à $x_1 = y$ modulo $\mathcal{M}S(\mathfrak{g})$. Notant $\bar{s}$ la somme des monomes du troisième cas, on a donc:

$$s-(y+\bar{s}) \in \mathcal{M}S(\mathfrak{g}),$$

ce qui est le résulat cherché.

7.

Proposition. *$S(\mathfrak{g})/J+\mathcal{M}S(\mathfrak{g})$ est l'algèbre des fonctions régulières sur $N.f = N$.*

On reprend les notations de 4. On remarque que pour tout i compris entre 1 et Q, le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{n}$ engendré par $\alpha_1,\ldots,\alpha_i$ est un idéal de $\mathfrak{n}$. Utilisant ([4, 4.7.5]), on démontre progressivement sur i que l'on a:

$S(\mathfrak{g})/J+\mathcal{M}S(\mathfrak{g})$ est une algèbre de polynomes en $\beta_1,\ldots,\beta_i$ à coefficients dans la sous-algèbre formée des éléments invariants par $\operatorname{ad}\alpha_1,\ldots,\operatorname{ad}\alpha_i$. En particulier, on a:

$$S(\mathfrak{g})/J+\mathcal{M}S(\mathfrak{g}) = (S(\mathfrak{g})/J+\mathcal{M}S(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{n}}[\beta_1,\ldots,\beta_Q].$$

Il reste à démontrer que $(S(\mathfrak{g})/J+\mathcal{M}S(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{n}}$ est réduit à $\mathbb{C}$, puisqu'alors $S(\mathfrak{g})/J+\mathcal{M}S(\mathfrak{g})$ sera une algèbre intégre ensemble des fonctions régulières sur une unique N-orbite, nécessairement celle de f.

Pour cela on note, ici, S la sous-algèbre $\mathbb{C}[\beta_1,\ldots,\beta_Q]$ de $S(\mathfrak{g})/J+\mathcal{M}S(\mathfrak{g})$ et il faut démontrer qu'elle contient l'image de $\mathfrak{g}$. Utilisant la décomposition de $\mathfrak{g}$ sous l'action d'un sl_2-triplet contenant T' et f et la définition des β_i, on voit qu'il suffit de démontrer que S contient l'image de $\mathfrak{g}(f)$. En raisonnant par récurrence (décroissante) sur le T-valeur propres intervenant dans $\mathfrak{g}(f)$, cela résulte immédiatement de 6.

8.

Dans ce parapgraphe, on fait quelques remarques importantes pour la suite.

(1) *Soit A une algèbre contenant $U(\mathfrak{g})/I$ et munie d'une filtration induisant sur $U(\mathfrak{g})/I$ une filtration équivalente à la filtration naturelle, et dont le gradué associé est intègre. Alors, cette filtration étant notée* Filt^A, *on* a:

$$\forall u \in U(\mathfrak{g})/I, \quad \mathrm{Filt}^A u \leqq \mathrm{Filt}\, u.$$

Cette propriéte est essentiellement dans ([2] Paragraphe 5). Soit $u \in U(\mathfrak{g})/I$;

on pose $z = \mathrm{Filt}^A u - \mathrm{filt}\, u$. Il existe un entier noté d, indépendant de u, tel que z soit inférieur à d. Et pout tout entier m, on a:

$$mz = m\mathrm{Filt}^A u - m\mathrm{filt}\, u = \mathrm{Filt}^A u^m - m\mathrm{filt}\, u \leqq \mathrm{Filt}^A u^m - \mathrm{filt}\, u^m.$$

Puisque mz doit être inférieur à d, il faut que z soit négatif ou nul; d'où l'assertion cherchée.

De la même façon, on démontre l'assertion suivante:

(2) (*Hypothèses de* (1)) *Si en outre le gradué de A est un $S(g)$-module de type fini, alors la filtration est unique avec ces propriétés.*

On va maintenant utiliser la propriété suivante, démontrée par exemple dans ([13, I.29, 3^e^ étape]): soit Q un sous-corps G-stable du corps des fonctions rationnelles sur G, alors il existe un (unique) sous-groupe fermé de G, noté H, tel que Q coïncide avec le corps des fonctions rationnelles sur l'espace homogène $H \backslash G$. Ce résultat et le fait qu'une fonction rationnelle sur G appartenant à un sous-espace vectoriel de dimension finie, G-stable est nécessairement globalement définie, on obtient immédiatement le résultat suivant: soit C une sous-algèbre de $A(G)$ stable G, alors il existe un (unique) sous-groupe fermé de G, noté H, tel que C soit incluse dans $A(H \backslash G)$ avec égalité après passage aux corps des fractions. En particulier $H \backslash G$ est une variété quasi-affine.

Dans ce qui suit on identifie $S(\mathfrak{g})/J$ à une sous-algèbre de $A(G(f)^\circ \backslash G)$ grâce au comorphisme, noté i, de l'application: $\gamma G(f)^\circ \mapsto \gamma^{-1} f \in G.f$.

(3) *Soit A un élément de $\mathscr{E}_I$. On note* Filt^A *la filtration* (cf. *plus haut pour l'unicité*) *ayant les bonnes propriétés souhaitées et* Gr^A *la graduation associée. Alors* $\mathrm{Gr}^A A$ *est naturellement un $S(\mathfrak{g})/J$-module et on choisit un homomorphisme, noté α, injectif compatible aux actions de G, qui rende commutatif le diagramme suivant:*

$$(*)\qquad \begin{array}{ccccc} \mathrm{Gr}^A A & \xhookrightarrow{\ \alpha\ } & A(H_A \backslash G) & \hookrightarrow & A(G) \\ \uparrow & & \downarrow & \nearrow & \\ S(\mathfrak{g})/J & \xhookrightarrow{\ i\ } & A(G(f)^\circ \backslash G) & & \end{array}$$

où H_A est l'unique sous-groupe fermé de G tel que $(\mathrm{Gr}^A A) \hookrightarrow A(H_A G)$ *avec égalité des corps fractions et où necessairement $H_A \subset G(f)$* (*puisque $S(\mathfrak{g})/J$ est inclus dans $A(G(f) \backslash G)$ avec égalité de corps de fraction*).

Montrons que l'on a:

(4) *H_A contient $G(f)^\circ$* (ce qui complète (*)).

(Pour les algèbres non commutatives la dimension utilisée est la dimension de Gelfand-Kirilov.) On a, par finitude de A sur $U(\mathfrak{g})/I$:

$$\dim A = \dim U(\mathfrak{g})/I = \dim \mathrm{Gr}^A A = \dim \mathrm{gr}\, U(\mathfrak{g})/I = \dim S(\mathfrak{g})/J.$$

D'où, $\dim H_A \backslash G = \dim G(f) \backslash G$, et le résultat est clair.

(5) *Remarquons, de plus, que le changement de α en un autre morphisme ayant les mêmes propriétés change H_A en un autre sous-groupe de $G(f)$ conjugué de H_A dans $G(f)$* (cela se voit en passant aux comorphismes).

En particulier si G est un groupe classique, où plus généralement si $G(f)^\circ \backslash G(f)$ est un groupe commutatif, H_A est indépendant du choix de α.
A Filt^A on associé la filtration décroissante, notée Filt_T^A, définie en 1.

9.

Soit $A \in \mathscr{E}_I$ comme en 8. Rappelons que $A(G(f)^\circ \backslash G)$ est un $S(\mathfrak{g})/J$-module de type fini et qu'il en est donc de même de $\mathrm{Gr}^A A$. En outre, on aura aussi besoin du résultat suivant:

Soit y un élément de $S(\mathfrak{g})/J$ nul sur $\overline{G.f} - G.f$, non nul en f; alors on a:

$$(\mathrm{Gr}^A A)_y = (A(H_A \backslash G))_y.$$

En effet, $\mathrm{Gr}^A A$ est l'algèbre des fonctions régulières sur une variété algèbrique affine, notée X, munie d'une action algèbrique de G et d'un morphisme fini G-équivariant sur $\overline{G.f}$, noté π. De plus X admet une unique G-orbite ouverte, dont un point, noté x_0, a H_A pour stabilisateur et vérifie $\pi(x_0) = \mathrm{f}$. Ainsi l'ouvert π^{-1} $(y \neq 0)$ est inclus dans $G.x_0$. Et le résultat est clair et on a même:

π est non ramifié au dessus de $G.f$.

En particulier si $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_D$ sont des éléments de $S(\mathfrak{g})/J$ formant une suite régulière dans $(S(\mathfrak{g})/J)_y$ il en forme aussi une dans $(\mathrm{Gr}^A A)_y$.

10.

Proposition. *Soit $A \in \mathscr{E}_I$ (par exemple $A = U(\mathfrak{g})/I$). On munit $A/\mathscr{M}A$ de la filtration quotient de* Filt_T^A, *stable par l'action adjointe de N, et on a*:

$A/\mathscr{M}A$ est propre d'annulateur 0 *et* Filt_T^A *est finie, le gradué associé étant N-isomorphe à $A(H_A \backslash G(f)N)$* (isomorphisme d'algèbres).

Montrons d'abord que Filt_T^A est finie:
Soit d un entier tel que l'on ait:

$$\forall u \in U(\mathfrak{g})/I, \quad \mathrm{Filt}^A u \geqq \mathrm{filt}\, u - d.$$

Soient $a_1, \ldots, a_r$ des éléments de A, T-vecteurs propres tels que l'image de de $a_1, \ldots, a_r$ dans $\mathrm{Gr}^A A$ soient des générateurs de $\mathrm{Gr}^A A$ comme $S(\mathfrak{g})/J$-module. On pose

$$z = \sup_{1 \leq i \leq r} T\text{-poids } a_i - \mathrm{Filt}^A a_i.$$

Il suffit de vérifier que tout T-vecteur propre de A, noté a, vérifiant $\mathrm{Filt}_T^A a > z+d$ appartient à $\mathscr{M}A$. Pour cela, on écrit: $a = \sum u_i a_i + a'$, où l'on $a: u_i \in U(\mathfrak{g})/I$ avec $u_i = 0$ où $\mathrm{Filt}^A u_i + \mathrm{Filt}^A a_i = \mathrm{Filt}^A a$ et T-poids $u_i +$ $+ T$-poids $a_i = T$-poids a, et où a' est un T-vecteur propre de A nul où vérifiant: T-poids $a' = T$-poids a et $\mathrm{Filt}^A a' < \mathrm{Filt}^A a$. Les hypothèses entrainent que l'on a pour tout i:

$$\mathrm{Filt}_T^A u_i > d, \quad \text{d'où } T\text{-poids } u_i - \mathrm{filt}\, u_i > 0.$$

Le résultat cherché résulte alors de $2-(2)$(i).

On choisit $\alpha_1, \ldots, \alpha_D$ une base de $\mathfrak{n}$ formée de T-vecteurs propres et, tenant compte de 5, y_0 ayant les propriétés de 3. On prouve progressivement sur i que l'on a (ici $\alpha_i' := \alpha_i - f(\alpha_i)$):

$$\sum_{j \leq i} \alpha_j' \mathrm{Gr}_T^A A \subset \mathrm{Gr}_T^A \Bigl(\sum_{j \leq i} \alpha_j' A \Bigr) \subset \Bigl\{ x \in \mathrm{Gr}_T^A A \mid \exists Q \in \mathbf{N},\ y_0^Q x \in \sum_{j \leq i} \alpha_j' \mathrm{Gr}_T^A A \Bigr\}.$$

(Rappelons que $\mathrm{Gr}_T^A A = \mathrm{Gr}^A A$.) On l'admet pour $(i-1)$ et on le prouve pour i.

Soit $a = u + \alpha_i v$ où $u \in (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})A$ et $v \in A$. On choisit Y_0 dans A, un T-vecteur propre de même poids que y_0 et de Gr_T^A égal à y_0. On distingue les cas suivants:

1^e^ Cas. $\mathrm{Gr}_T^A u \neq -\mathrm{Gr}_T^A(\alpha_i v)$.

Alors on a:

$$\mathrm{Gr}_T^A a = \mathrm{Gr}_T^A u + \alpha_i' \mathrm{Gr}_T^A v \quad \text{où} \quad \mathrm{Gr}_T^A a = \mathrm{Gr}_T^A u \quad \text{où} \quad \mathrm{Gr}_T^A a = \alpha_i' \mathrm{Gr}_T^A v,$$

et le résultat est clair, dans ce cas, grâce à l'hypothèse de récurrence.

2^e^ Cas. $\mathrm{Gr}_T^A u = -\mathrm{Gr}_T^A(\alpha_i' v)$.

Il résulté de 3 et 9 ci-dessus, qu'il existe $S \in \mathbf{N}$, tel que l'on ait:

$$(\mathrm{Gr}_T^A v) y_0^S \in (\alpha_1', \ldots, \alpha_{i-1}') \mathrm{Gr}_T^A A.$$

Utilisant le fait que α_i normalise $(\alpha_i', \ldots, \alpha_{i-1}')A$, on voit qu'il existe $u' \in (\alpha_1', \ldots, \alpha_{i-1}')A$ et $v' \in A$ vérifiant:

$$a Y_0^S = u' + \alpha_i v' \quad \text{et} \quad \mathrm{Filt}_T^A v' < \mathrm{Filt}_T^A (v Y_0^S).$$

Or $\mathrm{Filt}_T^A(a Y_0^S) = \mathrm{Filt}_T^A a + S d^\circ y_0$, où d° est la graduation de y_0 dans $S(\mathfrak{g})/J$

tordu par les poids de T comme expliqué en 1 (i.e. dans $\mathrm{Gr}_T S(\mathfrak{g})/J$) grâce à l'intégrité de $\mathrm{Gr}^A A$. On a aussi:

$$\mathrm{Filt}_T^A a Y_0^S - \mathrm{Filt}_T^A \alpha_i' v' < \mathrm{Filt}_T^A a - \mathrm{Filt}_T^A(\alpha_i' v).$$

Si $\mathrm{Filt}_T^A a Y_0^S < \mathrm{Filt}_T^A \alpha_i v$, on a terminé puisqu'alors $(\mathrm{Gr}_T^A a) y_0^S = \mathrm{Gr}_T^A u'$ et que l'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Sinon on recommence. Grâce à l'inégalité stricte précédente la procédure s'arrête, en tout état de causes, au bout d'un nombre fini de pas. D'où le résultat.

Quand $i = D$, on obtient:

$$\mathscr{M}\mathrm{Gr}_T^A A \subset \mathrm{Gr}_T^A(\mathscr{M}A) \subset \{x \in \mathrm{Gr}_T^A A \mid \exists S \in \mathrm{N},\, x y_0^S \in \mathscr{M}\mathrm{Gr}_T^A A\}.$$

Grâce à $2-(1)$(ii) et (iii), il résulte des hypothèses sur y_0 que l'on a:

$$y_0 - \langle y_0, f\rangle \in \mathscr{M}S(\mathfrak{g})/J \subset \mathscr{M}\mathrm{Gr}_T^A A.$$

Il est alors clair que l'on a:

$$\mathrm{Gr}_T^A(\mathscr{M}A) = \mathscr{M}\mathrm{Gr}_T^A A.$$

On a donc démontré que $A/\mathscr{M}A$ est propre de gradué, pour $\overline{\mathrm{Filt}}_T^A$, égal à:

$$\mathrm{Gr}^A A/\mathscr{M}\mathrm{Gr}^A A = \mathrm{Gr}^A A)_{y_0}/\mathscr{M}\mathrm{Gr}^A)_{y_0} = A(H_A \backslash G)/\mathscr{M}A(H_A \backslash G),$$

d'après 9, pour la dernière égalité. Utilisant encore 9 et ses notations, la non-ramification de π au dessus de l'ouvert $G.f$ de $\overline{G.f}$ et 7 assurent que $A(H_A \backslash G)/\mathscr{M}A(H_A \backslash G)$ est l'algèbre des fonctions régulières sur $\pi^{-1}N.f$ et donc coïncide avec $A(H_A \backslash G(f)N)$. Le reste du lemme est clair.

11.

Lemme. *Soit $A \in \mathscr{E}_I$ alors $(A/\mathscr{M}A)^N$ est une algèbre commutative, sans éléments nilpotents, de dimension finie, formée d'éléments de $\overline{\mathrm{Filt}}_T^A$ égale à 0 et isomorphe (par passage au gradué) à $A(H_A \backslash G(f))$.*

On a:

$$A(H_A \backslash G(f)) = (A(H_A \backslash G)/\mathscr{M}A(H_A \backslash G))^N = (\mathrm{Gr}_T^A(A/\mathscr{M}A))^N.$$

Comme $A(H_A \backslash G(f))$ est une algèbre produit fini de corps, graduée comme sous-algèbre de $\mathrm{Gr}_T^A A/\mathscr{M}\mathrm{Gr}_T^A A$, elle est nécessairement formée d'éléments homogènes de degré 0. Cela montre que

$$(A/\mathscr{M}A)^N_{\overline{\mathrm{Filt}}_T^A > 0} = 0 \quad \text{et} \quad (A/\mathscr{M}A)^N = (A/\mathscr{M}A)^N_{\overline{\mathrm{Filt}}_T^A \geq 0}.$$

Par commutativité du gradué, il en résulte que $(A/\mathscr{M}A)^N$ est une algèbre commutative. Elle est sans éléments nilpotents et de dimension finie puisqu'il en est de même de son gradué. Ainsi $(A/\mathscr{M}A)^N$ est un produit fini de corps inclus (par passage au gradué) dans $A(H_A \backslash G(f))$. Il reste à prouver que:

$$\mathrm{Gr}_T^A((A/\mathcal{M}A)^N) = (\mathrm{Gr}_T^A A/\mathcal{M}A)^N.$$

Soit $x \in (\mathrm{Gr}_T^A A/\mathcal{M}A)^N$ et $\bar{x}$ un élément de $A/\mathcal{M}A$ ayant x pour gradué, en particulier de $\overline{\mathrm{Filt}_T^A}$ égale à 0. Supposons que $\mathfrak{n}.x \neq 0$; comme $\mathfrak{n}$ agit de façon localement nilpotente par des dérivations qui augmentent strictement la $\overline{\mathrm{Filt}_T^A}$, il existe $x' \in \mathrm{ad}_{A/\mathcal{M}A} U(\mathfrak{n})(x)$ qui est N-invariant, non nul, et qui vérifie $\overline{\mathrm{Filt}_T^A} x' > 0$. Cela contredit le fait que $(A/\mathcal{M}A)^N_{\overline{\mathrm{Filt}_T^A} > 0} = 0$. Cela termine la démonstration.

12.

Soit $A \in \mathscr{E}_I$; on note $\mathscr{P}_A$ l'ensemble des projecteurs minimaux de $(A/\mathcal{M}A)^N$. On a:

$$(*) \qquad A/\mathcal{M}A = \oplus_{e \in \mathscr{P}_A} eA/\mathcal{M}A.$$

On identifie par passage au gradué $\mathscr{P}_A$ et l'ensemble des projecteurs minimaux de $A(H_A \backslash G(f))$, c'est à dire l'ensemble des fonctions sur $H_A \backslash G(f)N$ valant 1 sur une des N-orbites et 0 ailleurs. Dans cette identification, on a: (isomorphismes gradués)

$$\mathrm{Gr}^A eA/\mathcal{M}A = e\mathrm{Gr}^A A/\mathcal{M}A = eA(H_A \backslash G(f)N) = S(\mathfrak{g})/J + \mathcal{M}S(\mathfrak{g}),$$

où le dernier isomorphisme est le comorphisme de la restriction de π (c.f. Paragraphe 9) à la N-orbite déterminée par e.

LEMME. *Soit A, A' est éléments de $\mathscr{E}_I$ et on suppose qu'il existe un G-homomorphisme injectif de A dans A' qui est l'identité sur $U(\mathfrak{g})/I$. Alors on a:*

(i) *$(A/\mathcal{M}A)$ est naturellement un sous-espace vectoriel de $(A'/\mathcal{M}A')$.*

(ii) *Soient $\varepsilon \in \mathscr{P}_{A'}$ et $e \in \mathscr{P}_A$ tels que $\varepsilon e = \varepsilon$ (dans $(A'/\mathcal{M}A')^N$); alors la multiplication à gauche par ε définit un isomorphisme de $eA/\mathcal{M}A$ sur $\varepsilon A'/\mathcal{M}A'$, isomorphisme de modules filtrés.*

(iii) *Soit $e \in \mathscr{P}_A$, alors le A-module $eA/\mathcal{M}A$ est irrédictible d'annulateur* 0.

(i) On identifie A à une sous-algèbre de A'. La filtration sur A induite par celle de A' coïncide avec de A (cf. Paragraphe 8) et l'on a donc une application naturelle d'espaces vectoriels et de A-modules filtrés. Pour prouver (i), il suffit de vérifier que l'application qui s'en déduit entre les gradués associés est injective. On choisit un homorphisme injectif, noté α, de $\mathrm{Gr}^A A'$ dans $A(G(f)^\circ \backslash G)$ rendant commutatif le diagramme (cf. Paragraphe 8 (*)):

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}^A A' & & \\ \Uparrow & \overset{\alpha}{\searrow} & \\ S(\mathfrak{g})/J & \hookrightarrow & A(G(f)^\circ\backslash G). \end{array}$$

Cela défini H_A, et en restreignant α à $\mathrm{Gr}^A A$, on obtient un homomorphisme de $\mathrm{Gr}^A A$ dans $A(G(f)^\circ\backslash G)$ qui permet de définir H_A. On a évidemment $H_A \supset H_{A'}$. Et avec ces choix, on a d'après 10:

$$\mathrm{Gr}_T^A A/\mathcal{M}A = A(H_A\backslash G(f)N) \hookrightarrow A(H_{A'}\backslash G(f)N) = \mathrm{Gr}_T^{A'} A'/\mathcal{M}A',$$

où la flèche est l'inclusion naturelle, comorphisme du morphisme de projection $H_{A'}\backslash G(f)N \to H_A\backslash G(f)N$. D'où (i).

(ii) L'interprétation géométrique de $\varepsilon e = \varepsilon$ est que la N-orbite dans $H_{A'}\backslash G(f)N$ correspondant à ε (cf. ce qui prédède le lemme) se projette sur la N-orbite correspondant à e dans $H_A\backslash G(f)N$. D'après ce que l'on *a* vu avant le lemme l'analogue de (ii) est vrai si l'on travaille avec les gradués et donc, par finitude des filtrations, (ii) est vrai.

(iii) L'irréductibilité de $eA/\mathcal{M}A$ résulte de l'absence d'éléments N-invariants autres que $\mathbb{C}e$ grâce à:

$$(A/\mathcal{M}A)^N = \oplus_{e\in\mathcal{P}_A}(eA/\mathcal{M}A)^N = \oplus_{e\in\mathcal{P}_A}\mathbb{C}e.$$

Soit I' l'annulateur du A-module $eA/\mathcal{M}A$. On a $\mathrm{Gr}^A I' = \mathrm{Gr}_T^A I'$ et l'inclusion de $\mathrm{Gr}_T^A I'$ dans $\mathrm{Gr}_T^A(\mathrm{ann}_A e)$. Or $\mathrm{Gr}_T^A(\mathrm{ann}_A e)$ est inclus dans l'idéal de $A(H_A\backslash G)$ annulant $e(\in A(H_A\backslash G)/\mathcal{M}A(H_A\backslash G) = A(H_A\backslash G(f)N))$, c'est à dire dans l'idéal de $A(H_A\backslash G)$ ensemble des fonctions nulles sur la N-orbite d'un point de $H_A\backslash G(f)$ (défini par e). Par G-invariance de $\mathrm{Gr}^A I'$, on *a* que $(\mathrm{Gr}^A I')A(H_A\backslash G)$ est dans l'idéal des fonctions nulles sur la G-orbite ouverte de la variété affine associée au spectre maximal de $A(H_A\backslash G)$. D'où $(\mathrm{Gr}^A I')A(H_A\backslash G)$ est nul, et il en est de même de $\mathrm{Gr}^A I'$ et de I', par finitude de la filtration.

13.

PROPOSITION. *I admet un modèle de Whittaker, noté M. On note L l'algèbre des endomorphismes G-finis de M. Alors L est un élément de* $\mathscr{E}_I$.

Soit $e\in\mathcal{P}_{U(\mathfrak{g})/I}$; on pose $M = eU(\mathfrak{g})/I + \mathcal{M}U(\mathfrak{g})$. Pour montrer que M est un modèle de Whittaker pour I, il reste à prouver que $\overline{\mathrm{Filt}_T^{U(\mathfrak{g})/I}}$ coïncide, après passage au quotient, avec filt_T (où filt est la filtration naturelle cf. Paragraphe 1). Or on *a*, d'après ce qui a été vu avant le lemme 12, un isomorphisme gradué de $S(\mathfrak{g})/J + \mathcal{M}S(\mathfrak{g})$ avec $\mathrm{Gr}_T^{U(\mathfrak{g})/I}M$. L'assertion résulte alors, de ce que la graduation sur $S(\mathfrak{g})/J + \mathcal{M}S(\mathfrak{g})$ provient de la graduation naturelle perturbée par les poids de T.

J'ai esquissé dans [11], la démonstration du fait que $L \in \mathscr{E}_I$, mais je vais détailler cette démonstration ici. On note μ: $L \to M \otimes A(G)$ l'application qui à $D \in L$ associé la fonction sur G à valeur dans M (cf. aussi [5]) définie par $\gamma \mapsto (\gamma . D)(\bar{1})$ où $\bar{1}$ est l'image de 1 dans M (c'est-à-dire, ici, e). On pose:

$$\forall z \in 1/2\mathbf{Z}, \quad (M \otimes A(G))_{\mathrm{Filt} \leqq z} = \oplus_{m \in 1/2\mathbf{Z}} M_{\mathrm{filt}_T \geqq -m-z} \otimes {}^{[m]}A(G),$$

où ${}^{[m]}A(g)$ est l'expace propre pour T agissant par la réprésentation régulière gauche (notée Γ) correcpondant à la valeur propre m. On filtre L en transportant par μ^{-1} et on note cette filtration, à priori d'espace vectoriel, par Filt^L. Pour voir que l'on a une filtration d'algèbre, il faut calculer $\mu(DD')$ quand D et $D' \in L$. On pose:

$$\mu(D) = \sum m_i \otimes f_i \in M \otimes A(G), \quad \text{somme finie,}$$

$$\mu(D') = \sum m'^j \otimes f'_j \in M \otimes A(G), \quad \text{somme finie.}$$

On note c la comultiplication de $U(\mathfrak{g})$, c'est-à-dire l'unique homorphisme d'algèbres de $U(\mathfrak{g})$ dans $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ qui prolonge l'application qui à $x \in U(\mathfrak{g})$ associe $x \otimes 1 + 1 \otimes x$. On choisit des éléments, notés u_i, de $U(\mathfrak{g})$ relevant m_i, i.e. $\bar{1}u_i = m_i$, et on pose:

$$c(u_i) = \sum u_{ik} \otimes u'_{ik} \in U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}).$$

On note $\check{}$ l'antiautomorphisme principal de $U(\mathfrak{g})$, caractérisé par $\check{x} = -x$, si $x \in \mathfrak{g}$, et Γ la représentation régulière gauche. Grâce à la formule suivante:

$$\forall x \in \mathfrak{g}, \ \forall D \in L, \ \forall m \in M, \quad (x.D)(m) = D(mx) - D(m)x,$$

on obtient:

$$\mu(DD') = \sum_{i,j,k} m'_j u_{ik} \otimes (\Gamma(\check{u}'_{ik}) f'_j) f_i.$$

C'est évidemment indépendant des choix faits. Prouvons que Filt^L est une filtration d'algèbre. On garde les notations précédentes, mais on suppose (ce qui ne nuit pas à la généralité) que f_i et f'_i sont des vecteurs propres pour $\Gamma(T)$ et que $\mathrm{filt}_T m_i$ (respectivement $\mathrm{filt}_T m'_j$) est supérieur où égal à $\mathrm{Filt}^L D - T\text{-poids} f_i$ (respectivement $\mathrm{Filt}^L D' - T\text{-poids} f'_j$). En outre, on choisit les u_i de tel sorte que l'on ait $\mathrm{filt}_T u_i = \mathrm{filt}_T m_i$. On peut évidemment supposer dans l'écriture de $c(u_i)$ que u_{ik} et u'_{ik} sont des T-vecteurs propres et que l'on a:

$$T\text{-poids} u_{ik} + T\text{-poids} u'_{ik} - \mathrm{filt} u_{ik} - \mathrm{filt} u'_{ik} \geqq \mathrm{filt}_T m_i \quad (\mathrm{filt} = \text{filt. nat.}).$$

$$u_{i0} = u_i; \ u'_{i0} = 1; \ \mathrm{filt} u'_{ik} \neq 0 \quad \text{si} \quad k > 0$$

On a:

$(\Gamma(\check{u}'_{ik})f'_j)f_i$ est un $\Gamma(T)$-vecteur propre de poids $T\text{-poids}\, u_{ik} + T\text{-poids} f'_j +$ $+ T\text{-poids} f_i$,

$\mathrm{filt}_T(m'_j u_{ik}) \geqq (\mathrm{filt}_T m'_j) + T\text{-poids}\, u_{ik} - \mathrm{filt}\, u_{ik} \geqq \mathrm{filt}_T m'_j + \mathrm{filt}_T m_i - T\text{-poids}\, u'_{ik}$, la 2^e^ inégalité étant stricte si $\mathrm{filt}\, u'_{ik} \neq 0$.

D'où finalement, en posant $z := \mathrm{Filt}^L D + \mathrm{Filt}^L D'$:

$$\begin{aligned} &-\Gamma(T)\text{-poids}(\Gamma(\check{u}'_{ik})f'_j)f_i - \mathrm{filt}_T(m'_j u_{ik}) \\ &\leqq -\Gamma(T)\text{-poids} f'_j - \mathrm{filt}_T m'_j - \Gamma(T)\text{-poids} f_i - \mathrm{filt}_T m_i \leqq z, \end{aligned}$$

la première inégalité étant stricte si $\mathrm{filt}\, u'_{ik} \neq 0$. D'où :

$$\mu(DD') - \sum m'_j u_i \otimes f'_j f_i \in (M \otimes A(G))_{\mathrm{Filt} < z}.$$

On a donc prouvé que Filt^L est une filtration d'algèbre et que l'image de DD' dans $(M \otimes A(G))_{\leqq z}/(M \otimes A(G))_{< z}$ est $\sum \mathrm{gr}_T m'_j \mathrm{gr}_T m_i \otimes f'_j f_i$, où la somme est limitée aux indices j tels que $\mathrm{filt}_T m'_j + \Gamma(T)\text{-poids} f'_j = -\mathrm{Filt}^L D'$ et même restriction sur les indices i. Il faut prouver que cet élément est non nul pour prouver que le gradué associé à Filt^L est intègre. Pour cela il suffit d'évaluer en un point γ de G où $\sum \mathrm{gr}_T m'_j f'_j(\gamma)$ et $\sum \mathrm{gr}_T m_i f_i(\gamma)$, sommes sur les mêmes indices que prédédemment, sont non nuls et d'utiliser l'intégrité de $\mathrm{gr}_T M \simeq A(N)$.

Prouvons maintenant que l'on a :

$$\forall u \in U(\mathfrak{g}),\ \textit{notant } u \textit{ l'image de } u \textit{ dans } L,\ \mathrm{Filt}^L u \leqq \mathrm{filt}\, u.$$

On définit $\mu_G : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes A(G)$ par

$$\mu_G(u) = \sum u_i \otimes f_i \Leftrightarrow \forall \gamma \in G,\quad \sum u_i f_i(\gamma) = \gamma . u.$$

On vérifie que l'on a :

$$\mu_G(U(\mathfrak{g})) \subset (U(\mathfrak{g}) \otimes A(G))^{(\mathrm{ad} \otimes \Gamma)(G)}.$$

Ainsi, si $\mu_G(u) = \sum u_i \otimes f_i$, on peut imposer en plus à u_i et f_i d'être des T-vecteurs propres vérifiant :

$$\begin{aligned} &T\text{-poids}\, u_i + \Gamma(T)\text{-poids} f_i = 0 \\ &\mathrm{filt}\, u_i \leqq \mathrm{filt}\, u. \end{aligned}$$

Il résulte des définitions que $\mu(u) = \sum \bar{1} u_i \otimes f_i$, d'où $\mathrm{Filt}^L u \leqq \mathrm{filt}\, u$. Il reste à prouver l'existence d'un G-homomorphisme de $\mathrm{Gr}^L L$ dans $A(G(f)^\circ \backslash G)$ rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gr}^L L \arrow[dr, hook] & \\ S(\mathfrak{g})/J \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & A(G(f)^\circ G). \end{tikzcd}$$

D'après ce qui précède, on a naturellement:

$$S(g)/\mathrm{gr}I \to \mathrm{Gr}^L L \to (\mathrm{gr}_T M \otimes A(G))^{(\mathrm{ad}\otimes\Gamma)(N)} \simeq (A(N)\otimes A(G))^{\mathrm{ad}\otimes\Gamma(N)} = A(G),$$

toutes les flèches étant des morphismes d'algèbres graduées, $A(G)$ étant graduée par les poids de $\Gamma(-T)$. L'intégrité de Gr^L assure que la première flèche se factorise par J et la description geométrique de $\mathrm{gr}_T M$ (cf. Paragraphe 12) assure que le composé de toutes ces flèches est le comorphisme de l'application $\gamma \in G \mapsto \gamma^{-1} f$. On conclut par les mêmes aguments qu'en 8(4).

14.

Remarque. *Soit M un modèle de Whittaker de I, alors il existe $e \in \mathscr{P}_{U(\mathfrak{g})/I}$ tel que M soit isomorphe comme $U(\mathfrak{g})$ module filtré à $eU(\mathfrak{g})/I + \mathscr{M}U(\mathfrak{g})$.*

Par hypothèse, on a $(M)^N \simeq \mathbb{C}$. On choisit $\varepsilon \in (M)^N - \{0\}$ et on pose $\mathscr{M}'$ l'annulateur dans $U(\mathfrak{g})$ de ε. On a:

$$\mathscr{M}' \supset I + \mathscr{M}U(\mathfrak{g}).$$

On pose $\bar{\mathscr{M}}' = \mathscr{M}'/I + \mathscr{M}U(\mathfrak{g})$, et l'on a:

$\bar{\mathscr{M}}' \hookrightarrow (U(\mathfrak{g})/I + \mathscr{M}U(\mathfrak{g}))^N$ est un idéal maximal de $(U(\mathfrak{g})/I + \mathscr{M}U(\mathfrak{g}))^N$; Il existe donc un unique projecteur minimal tel que $e \notin \mathscr{M}'$ et l'image de e dans M est un générateur de M^N. Ainsi on a $\mathrm{ann}_{U(\mathfrak{g})}\varepsilon \supset \mathrm{ann}_{U(\mathfrak{g})}e$ et l'égalité par maximalité de $\mathrm{ann}_{U(\mathfrak{g})}e$.

15.

Théorème. *Soit I un idéal primitif admettant un modèle de Whittaker, noté M. On note L l'algèbre des endomorphismes G-finis de M. Alors L est indépendant du choix du modèle et l'ensemble des sous-algèbres G-stables de L contenant $U(g)/I$ coïncide à isomorphismes près avec l'ensemble des éléments de $\mathscr{E}_I$.*

Remarquons que 2 sous-algèbres G-stable de L contenant $U(\mathfrak{g})/I$ peuvent être isomorphes par un G-isomorphisme dont la restriction à $U(\mathfrak{g})/I$ est l'identité.

Soit $A \in \mathscr{E}_I$. On utilise le lemme 12 où l'on fait $A = U(\mathfrak{g})/I$ et $A' = A$. On choisit $e \in \mathscr{P}_{U(\mathfrak{g})/I}$ tel que $M = eU(\mathfrak{g})/I + \mathscr{M}U(\mathfrak{g})$ et on choisit $\varepsilon \in \mathscr{P}_A$ tel que $\varepsilon e = \varepsilon$ (c'est possible grâce à ce qui précède le lemme 12 et à 12(i). Grâce à 12(ii) on voit que A s'envoit naturellement dans L, par un homorphisme d'algèbres qui coïncide sur $U(\mathfrak{g})/I$ avec l'inclusion naturelle. On note I' le noyau de cet homomorphisme et on a:

$$I' \cap U(\mathfrak{g})/I = 0.$$

Avec 2 – (3), on tire $I' = 0$. Ainsi A s'identifie à une sous-algèbre de L, G-stable contenant $U(\mathfrak{g})/I$. Appliquant cela à l'algèbre des endomorphismes G-finis d'un autre modèle de Whittaker de I (cf. Paragraphes 14 et 13), noté L', on voit que $L' \hookrightarrow L$ et par symétrie $L \hookrightarrow L'$. Les multiplicités des sous-G-modules simples de L et L' étant finies ces flèches qui sont compatibles à l'action de G, sont nécessairement des isomorphismes. Cela termine la prevue du théoréme.

16.

Pour la suite on fixe un modèle de Whittaker, noté M (i.e. on fixe $e \in \mathscr{P}_{U(\mathfrak{g})/I}$) et on garde la notation L. On munit L de Filt^L (cf. Paragraphe 13) et on fixe un G-homomorphisme de $\mathrm{Gr}^L L$ dans $A(G(f)^\circ \backslash G)$ compatible aux structures de $S(\mathfrak{g})$-modules. Cela (cf. Paragraphe 8(3) et (4)) fixe un sous-groupe fermé, noté H_L, de $G(f)$ contenant $G(f)^\circ$ et par restriction à $U(\mathfrak{g})/I$ un sous-groupe, noté H au lieu de $H_{U(\mathfrak{g})/I}$, tel que $H_L \subset H \subset G(f)$. On note $\mathscr{G}$ le groupe des automorphismes de L dont la restriction à $U(\mathfrak{g})/I$ est l'identité. Comme les G-modules simples de dimension finie sont caractérisés par la représentation de $\mathfrak{g}$ qui s'en déduit. $\mathscr{G}$ est formé de G-automorphismes. En outre on utilisera la remarque suivante:

Remarque.

(i) (R. Rentschler). *$\mathscr{G}$ est un groupe fini.*

(ii) *Les éléments de $\mathscr{G}$ respectent la filtration de L.*

(iii) *Par passage au gradué les éléments de G définissent des G-automorphismes de $\mathrm{Gr}^L L$. Ces éléments se prolongent en des G-automorphismes de $A(H_L \backslash G)$ triviaux sur $A(H \backslash G)$. Et l'application, qui s'en déduit de $\mathscr{G}$ dans $\mathrm{Norm}_H H_L/H_L$ est injective.*

(i) On vérifie d'abord que $\mathscr{G}$ est un groupe algèbrique en utilisant le fait que L est engendrée comme algèbre par $U(\mathfrak{g})/I$ et les composants isotypiques d'un nombre fini de G-modules simples de dimension finie. Ensuite on montre que l'algèbre de Lie de $\mathscr{G}$ est nulle. Pour cela, il suffit de vérifier que L n'admet pas de dérivations semi-simples où nilpotents, non nulles, qui soient nulles sur $U(\mathfrak{g})/I$. Distinguons les 2 cas:

1[e] Cas. Soit D une dérivation semi-simple de L nulle sur $U(\mathfrak{g})/I$, et soit a un D-vecteur propre. On choisit une relation minimale:

$a^m u_m + \ldots + u_0 = 0$, où u_i, pour i compris entre o et m est un élément de $U(\mathfrak{g})/I$.

Par minimalité, on a $u_m u_o \neq 0$. On note z la D-valeur propre de a et on applique D à cette égalité. D'où:

$$z(ma^m u_m + \ldots + au_1) = 0,$$

la minimalité et l'intégrité de L, entrainent que l'on doit avoir $z = 0$.

2ᵉ Cas. Soit D une dérivation nilpotente de L nulle sur $U(\mathfrak{g})/I$ et supposons que D soit non nulle. On choisit $a' \in L$ tel que $D(a') \neq 0$ et $D(D(a')) = 0$. On pose $a = D(a')^{-1}a'$, dans fract L. On prolonge canoniquement D en une dérivation de fract L et l'on a: $D(a) = 1$. On obtient ensuite une contradiction en procédant comme dans le 1ᵉ cas (en travaillant dans fract L au lieu de L).

(ii) résulte de l'unicité de 8(2).

(iii) On peut passer au gradué grâce à (ii). Après ce passage les éléments de $\mathscr{G}$ se prolongent en des automorphismes de fract $\mathrm{Gr}^L L$, qui est identifié au corps des fonctions rationnelles sur $H_L \backslash G$. Ces éléments commutant à l'action de G, laissent stable l'algèbre des éléments G-finis, i.e. $A(H_L \backslash G)$, et sont triviaux sur $A(H \backslash G)$. D'où une application de $\mathscr{G}$ dans $\mathrm{Norm}_H H_L/H_L$. Il faut voir qu'elle est injective. Soit γ un élément de $\mathscr{G}$ qui agit trivialement par passage au gradué dans $\mathrm{Gr}^L L$. Soit $a \in L$; on pose:

$$a' = \gamma a - a \in L_{< \mathrm{Filt}} L_a.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on obtient:

$$\gamma^m a - a - ma' \in L_{< \mathrm{Filt}} L_{a'}.$$

Comme $\mathscr{G}$ est un groupe fini, d'après (i), cela nécessite que $a' = 0$ et donc que γ est l'identité.

17.

Proposition. *Par passage au gradué $\mathscr{G}$ s'identifie à H/H_L, en particulier H_L est un sous-groupe distingué de H.*

Tenant compte de 16(iii), il reste à prouver la surjectivité, c'est-à-dire que les cardinaux de $\mathscr{G}$ et de $H_L \backslash H$ sont les mêmes. Pour cela, on va donner une autre interprétation des éléments de $\mathscr{G}$. On pose:

$$\mathscr{M}' = \mathrm{ann}_L\, e \quad \text{(cf. Paragraphe 16).}$$

On a:

$$L = \mathscr{M}' + U(\mathfrak{g})/I.$$

On pose:

$\mathscr{X} = \{\mathscr{M}''$ idéal à droite de $L \mid L = \mathscr{M}'' + U(\mathfrak{g})/I$, $\mathscr{M}'' \cap U(\mathfrak{g})/I = \mathrm{ann}_{U(\mathfrak{g})/I} e\}$.

Montrons que l'on a:

$$\forall \mathscr{M}'' \in \mathscr{X}, \text{ il existe } \gamma \in \mathscr{G} \text{ tel que } \gamma(\mathscr{M}'') = \mathscr{M}'.$$

En effet, soit $\mathscr{M}'' \in \mathscr{X}$; on a un isomorphisme naturel:

$$M \simeq (U(\mathfrak{g})/I/\mathrm{ann}_{U(\mathfrak{g})/I} e \simeq L/\mathscr{M}''.$$

En particulier $\mathscr{M}''$ est un idéal à droite maximal de L. On définit γ un homomorphisme, à priori, d'espaces vectoriels de L dans L par la propriété suivante:

$$\forall D \in L,\ \forall m \in M, \quad (\gamma(D))(m) = (mD + \mathscr{M}'')/\mathscr{M}'' \in L/\mathscr{M}'' \simeq M.$$

Il est clair que γ est un homomorphisme d'algèbres qui est l'identité sur $U(\mathfrak{g})/I$. D'après $2-(3)$, γ est injectif et nécessairement surjectif, puisque γ commute à l'action de G; d'où $\gamma \in \mathscr{G}$. Par définition, on a $\gamma(\mathscr{M}'') \subset \mathscr{M}'$. Comme $\mathscr{M}''$ est un idéal à droite maximal de L, on a l'égalité. D'où l'assertion cherchée.

Cette assertion prouve que $\# \mathscr{G} \geqq \# \mathscr{X}$ (il est facile de vérifier directement que l'on a l'égalité mais nous n'en avons pas besoin ici). Utilisant 12 appliqué à $A' = L$ et $A = U(\mathfrak{g})/I$, on voit que l'on a:

$$\# \mathscr{X} \geqq \# \{\varepsilon \in \mathscr{P}_L \mid \varepsilon e = \varepsilon\}.$$

Et avec l'interprétation géometrique de $\mathscr{P}_L$ et de $\mathscr{P}_{U(\mathfrak{g})/I}$ ce dernier ensemble a pour cardinal le cardinal de $H_L \backslash H$. C'est l'assertion voulue.

18.

Proposition. (i) *Soit $A \in \mathscr{E}_I$; l'algèbre ensemble des éléments G-finis de* fract$A$, *est encore un élément de $\mathscr{E}_I$; noté A_{rat}.*

(ii) *Les classes de conjuguaisons dans $H_L \backslash H$ des sous-groupes de $H_L \backslash H$ classifient les éléments de $\mathscr{E}_I$ qui coïncident avec la plus grande sous-algèbre de leur corps de fraction sur laquelle G opère rationellement,* i.e. *soit H' un sous-groupe de H contenant H_L on lui associe la souse-algèbre de L ensemble des éléments invariants par $H_L \backslash H$ ($\hookrightarrow \mathscr{G}$) à isomorphisme près algèbre ne dépendant que de la classe de conjuguaison de H' dans H et on obtient tous les éléments de $\mathscr{E}_I$ avec la propriété supplémentaire précisée plus haut.*

Pour faciliter l'écriture, si A appartient à $\mathscr{E}_I$ on note A_{rat} la plus grande sous-algèbre de fract$A$ sur laquelle G opère rationnellement, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de fract A qui sont G-finis (cf. par exemple ([13, I.22])).

(i) Grâce à 15, on identifie A à une sous-algèbre de L. On a:

$$A \hookrightarrow A_{\text{rat}} \hookrightarrow L_{\text{rat}} = L, \text{ d'après ([14, 6.5]) et ([8, 2.5]).}$$

(i) est alors clair en munissant A_{rat} de la filtration induite par Filt^L.

(ii) La seule chose à démontrer est que si A est un élément de $\mathscr{E}_I$ tel que $A = A_{\text{rat}}$, alors il existe un sous-groupe de H, noté H', contenant H_L et un isomorphisme, respectant toutes les structures, de A avec les éléments $H_L \backslash H'$-invariants de L (l'unicité se voit en passant au gradué). Grâce à 15, on identifie A à une sous-algèbre de L et on définit H_A en restreignant l'homomorphisme choisi de $\text{Gr}^L L$ à $\text{Gr}^L A = \text{Gr}^A A$ (cf. Paragraphe 8(2)). On note $\mathscr{G}_A$ le sous-groupe de $\mathscr{G}$ ensemble des éléments dont la restriction à A est l'identité. En passant au gradué, on obtient une inclusion de $\mathscr{G}_A$ dans $H_L \backslash H_A$. On démontre l'égalité de ces deux groupes exactement comme dans la démonstration de 17. Utilisant le fait que $\mathscr{G}_A$ est un groupe fini, on obtient:

$$\text{Gr}^L A \hookrightarrow \text{Gr}^L(L^{\mathscr{G}_A}) = (\text{Gr}^L L)^{\mathscr{G}_A} \hookrightarrow A(H_A \backslash G).$$

D'où $\text{fract}\,\text{Gr}^L A = \text{fract}\,\text{Gr}^L(L^{\mathscr{G}_A})$, c'est-à-dire A et $L^{\mathscr{G}_A}$ ont même multiplicité au sens de ([2, 5.9]) et donc même corps de fraction (cf. [6, Paragraphe 4]). L'hypothèse $A = A_{\text{rat}}$ entraine l'égalité.

19.

REMARQUE. *Soient A et A' des sous-algèbres G-stables de L contenant $U(\mathfrak{g})/I$. On note $\mathscr{G}_A$ (respectivement $\mathscr{G}_{A'}$) le sous-groupe de $\mathscr{G}$ formé des automorphismes dont la restriction à A (respectivement A') est l'identité; il s'identifie, par passage au gradué, au groupe des G-automorphismes de* $\text{fract}\,\text{Gr}^L L$ *trviaux sur* $\text{fract}\,\text{Gr}^L A$ *(respectivement* $\text{Gr}^L A'$*). De plus A_{rat} est isomorphe à A'_{rat} , par un G-isomorphisme dont la restriction à $U(\mathfrak{g})/I$ est l'identité si et seulement si $\mathscr{G}_A$ et $\mathscr{G}_{A'}$ sont conjugués dans $\mathscr{G}$.*

La première partie de la remarque a été prouvée en 18 et, clairement il reste à prouver que si $\mathscr{G}_A$ et $\mathscr{G}_{A'}$ sont conjugés dans $\mathscr{G}$ alors A_{rat} et A'_{rat} sont isomorphes. Mais en conjuguant A' par un élément de $\mathscr{G}$ bien choisi, on peut supposer que $\mathscr{G}_A$ est égal à $\mathscr{G}^{A'}$; et l'assertion résulte de $A_{\text{rat}} = L^{\mathscr{G}_A}$.

20.

PROPOSITION. *Soit A une sous-algèbre de L, stable par G et contenant $U(\mathfrak{g})/I$. Alors tout automorphisme de A dont la restriction à $U(\mathfrak{g})/I$ est l'identité se prolonge en un élément de $\mathscr{G}$. Supposons de plus que l'on a: $A = A_{\text{rat}}$; alors un élément de $\mathscr{G}$ laisse stable A si et seulement si il normalise H_A.*

Soit γ un automorphisme de A dont la restriction à $U(\mathfrak{g})/I$ est l'identité. L'unicité de 8(2) assure que γ est un automorphisme d'algèbre filtrée et défini donc par passage au gradué un automorphisme de $A(H_A \backslash G)$ trivial sur $A(H \backslash G)$, compatible à l'action de G, i.e. s'identifie à un élément de $\mathrm{Norm}_H H_A/H_A$. On pose $A' = A_{\mathrm{rat}}$ et on choisit un élément noté $\bar{\gamma}$ de $\mathscr{G}$ relevant γ par l'application naturelle de $\mathscr{G}$ sur H/H_A. On étend canoniquement γ en un automorphisme de A' et on remarque grâce à 19 que $\bar{\gamma}$ laisse stable A'. On pose $\gamma' = \gamma\bar{\gamma}_{|A'}^{-1}$ et il suffit de démontrer que γ' est l'identité. γ' définit canoniquement un automorphisme du A'-module filtré $A'/\mathscr{M}A'$. Montrons que l'on a:

(*) $A'/\mathscr{M}A'$ est engendré comme $U(\mathfrak{g})/I$-module à droite par $(A'/\mathscr{M}A')^N$.

D'après le début de 12, c'est vrai quand on passe au gradué; par finitude de la filtration, on en déduit (*).

Ainsi γ' en tant qu'automorphisme de $A'/\mathscr{M}A'$ est déterminé par son action sur $(A'/\mathscr{M}A')^N$; grâce à 11 et au fait que $\gamma' \in H_A$, on voit que c'est l'identité. On choisit $\varepsilon \in \mathscr{P}_{A'}$ telque $\varepsilon e = \varepsilon$; on pose $\mathscr{M}' = \mathrm{ann}_{A'}\varepsilon$. D'après 12(ii) appliqué à A' et $A = U(\mathfrak{g})/I$, on a $A = \mathscr{M}' + U(\mathfrak{g})/I$. De plus γ' vérifie $\mathscr{M}' = \gamma'\mathscr{M}'$. On pose:

$$\mathscr{X} = \{a - \gamma'(a), \text{ où } a \in A'\}.$$

D'après ce qui précède, $\mathscr{X}$ est inclus dans $\mathscr{M}'$ et donc aussi $\mathscr{X}A'$. En outre, on $a(U(\mathfrak{g})/I)\ \mathscr{X} = \mathscr{X}$, et $\mathscr{X}A' \cap U(\mathfrak{g})/I$ est un idéal bilatère de $U(\mathfrak{g})/I$ inclus dans $\mathrm{ann}_{U(\mathfrak{g})/I}e$. D'après 12(iii) et $2-(3)$, cela entraine que $\mathscr{X}$ est nul et donc que γ' est identité de A'. Cela prouve la première partie de la remarque et la fin est un corollaire immédiat de 19.

21.

Soit P un sous-groupe parabolique de G dont on note $\mathfrak{p}$ l'algèbre de Lie. Soit λ un caractère de p. On note $\varrho_{\mathfrak{p}}$ le caractère de $\mathfrak{p}$ égal à $1/2 tr\, \mathrm{ad}_{\mathfrak{p}}$ et $\mathbf{C}_\lambda$ l'espace vectoriel de dimension 1 sur lequel $\mathfrak{p}$ opère par le caractère $\lambda + \varrho_p$. On note $I(\mathfrak{p}, \lambda)$ l'annulateur du $U(\mathfrak{g})$-module à droite $\mathbf{C}_\lambda \otimes_{U(\mathfrak{p})} U(\mathfrak{g})$. Alors $I(\mathfrak{p}, \lambda)$ est un idéal primitif complétement premier de $U(\mathfrak{g})$ et $U(\mathfrak{g})/I(\mathfrak{p}, \lambda)$ s'envoie dans l'algèbre des opérateurs différentiels tordus globalement définis, notée $\mathscr{D}_\lambda(P \backslash G)$ (c.f. [14, 2.12]). Cette algèbre d'opérateurs différentiels tordus est filtrée par le degré des opérateurs et son gradué associé est isomorphe à l'algèbre des fonctions globalement définies sur le fibré cotangent $\mathfrak{p}^I \times^P G$ (cf. [14, 2.15]). Les résultats de Kostant [9] assurent alors que ce gradué est isomorphe à $A(P \cap G(f') \backslash G)$, où f' est un élément de l'orbite de Richardson définie par P admettant $\mathfrak{p}$ comme polarisation. Ainsi $I(\mathfrak{p}, \lambda)$ vérifie les hypothèses de 1.

Soit $\mathfrak{m}$ une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{p}$, alors λ est déterminé par sa restriction à m; soient P' un autre sous-groupe parabolique de G et λ' un caractère de $\mathfrak{p}'$ $(= Lie\, P')$. On dit que (P, λ) et (P', λ') sont associés si il existe un élément de G, noté γ, et des sous-algèbres de Levi de $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$, notées $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$, tels que $\gamma m = m'$ et $\gamma^{\lambda}_{|m} = \lambda'_{|m'}$. On a alors le résultat suivant:

si (P, λ) et (P', λ') sont associés, alors $I(\mathfrak{p}, \lambda) = I(\mathfrak{p}', \lambda')$.

Si $G = Sl(n, C)$, ce résultat a été démontré par [1] et il est équivalent à la définition de l'application de Dixmier pour $g = sl(n, C)$. On va démontrer ce résultat en utilisant la théorie des caractères pour les représentations induites de $G(\mathbf{R})$. Je remercie A. Bouazis pour m'avoit donné les indications utiles.

Comme le corps de base est $\mathbf{C}$, on peut supposer que G, P, P' sont définis sur $\mathbf{R}$ et que leurs points réels sont denses dans l'ensemble de leurs points complexes. On choisit Λ, Λ' des caractères de P et P' dont les différentielles sont λ et λ'. On fixe un compact maximal de $G(\mathbf{R})$, noté K, et on forme les $(\mathfrak{g}, K)$-modules induits (à droite) tordus, notés W et W'. Ils sont de longueur finie et ont même semi-simplifié (cela se voit sur leurs caractères).

De plus leurs annulateurs dans $U(g)$ sont $I(\mathfrak{p}', \lambda')$ respectivement. Comme $I(\mathfrak{p}, \lambda)$ est idéal premier de $U(\mathfrak{g})$, il est aussi l'annulateur d'un sous-quotient irréductible de W et donc d'un sous-quotient de W'. Ainsi $I(\mathfrak{p}', \lambda')$ est inclus dans $I(\mathfrak{p}, \lambda)$ et par symétrie, on a l'égalité cherchée.

22.

Proposition. (Notations de 21). *On suppose que G est un groupe classique et que (P, λ) et (P', λ') sont associés, alors $\mathscr{D}_{\lambda}(P \backslash G)$ est G-isomorphe à $\mathscr{D}_{\lambda'}(P' \backslash G)$ par un isomorphisme de $U(\mathfrak{g})$-modules.*

L'hypothèse "G est un groupe classique" est sûrement inutile, mais la démonstration ci-dessous ne s'applique pas en toute généralité. Toutefois elle est valable sous des hypothèses plus générales que celles de l'énoncé; plus précisément, on note $I = I(\mathfrak{p}, \lambda) = I(\mathfrak{p}', \lambda)$ et on peut évidemment supposer que f est (après identification à un élément de $\mathfrak{g}$) dans le radical nilpotent de $\mathfrak{p}$ et de $\mathfrak{p}'$. On sait alors par [10] que $G(f) \cap P$ et $G(f) \cap P'$ sont conjugués dans $G(f)$. En outre $G(f) \cap P \cap P'$ contient $G(f)^{\circ}$. Grâce à l'isomorphisme des gradués de $\mathscr{D}_{\lambda}(P \backslash G)$ et de $\mathscr{D}_{\lambda'}(P' \backslash G)$ avec $A(G(f) \cap P \backslash G)$ et $A(G(f) \cap P' \backslash G)$, on définit des sous-groupes de $G(f) \cap P$ et $G(f) \cap P'$, notés H et H', tels que par restrictions le gradué de $U(\mathfrak{g})/I$ s'envoit dans $A(H \backslash G)$ et $A(H' \backslash G)$ respectivement avec égalité après passage aux corps des fractions (cf. Paragraphe 8). Nous avons besoin de la propriété suivante:

(*) *il existe γ dans $G(f)$ qui envoit $G(f) \cap P$ sur $G(f) \cap P'$ et H sur H'.*

En tout état de cause, H et H' sont conjugués dans $G(f)$. Ainsi (*) est vraie dans les cas suivants:

$G(f) \cap P$ est un sous-groupe distingué de $G(f)$ (c'est toujours le cas si $G(f)/G(f)^\circ$ est commutatif),

$H = G(f)$ (c'est-à-dire I est à gradué génériquement réduit, cf. Paragraphe 24 et 25 plus loin),

$H = G(f) \cap P$ (mais ce cas est immédiat car $(U(\mathfrak{g})/I)_{\text{rat}} = \mathscr{D}_\lambda(P \backslash G)$).

Comme la proposition peut aussi se démontrer par induction à partir de cas élémentaires, il n'est pas exclu que de la démontrer avec les hypothèses précédentes soit suffisant. Evidemment il serait plus intéressant de prouver (*), qui doit être vrai pour avoit isomorphisme, en interprétant correctement H et H'.

On fait la démonstration en supposant que (*) est vérifiée. En conjuguant éventuellement P', on suppose que $H = H'$ et $G(f) \cap P = G(f) \cap P'$. On fixe un modèle de Whittaker de I comme en 16; on suppose aussi que l'homomorphisme de $\mathrm{Gr}^L L$ dans $A(H_L \backslash G)$ induit par restriction un homorphisme de $\mathrm{Gr}^L U(\mathfrak{g})/I$ dans $A(H \backslash G)$. On identifie $\mathscr{D}_\lambda(P \backslash G)$ et $\mathscr{D}_{\lambda'}(P' \backslash G)$ à des sous-algèbres de L (cf. Paragraphe 15) et on définit H_P *et* $H_{P'}$ comme en 8 en restreignant l'homorphisme de $\mathrm{Gr}^L L$ dans $A(H_L \backslash G)$ à $\mathrm{Gr}^L \mathscr{D}_\lambda(P \backslash G)$ et $\mathrm{Gr}^L \mathscr{D}_{\lambda'}(P' \backslash G)$. Il est clair que H_P et $H_{P'}$ sont conjugués dans H. Montrons que l'on:

(**) $\mathscr{D}_\lambda(P \backslash G) = L^{H_L \backslash H_P}$, en particulier $\mathscr{D}_\lambda(P \backslash G) = \mathscr{D}_\lambda(P \backslash G)_{\text{rat}}$ (mais cela était sans doute déjà connu).

Comme le gradué de $\mathscr{D}_\lambda(P \backslash G)$ est isomorphe à $A(G(f) \cap P \backslash G)$ (cf. Paragraphe 21), on a aussi $\mathrm{Gr}^L \mathscr{D}_\lambda(P \backslash G) = A(H_P \backslash G)$. De 19, il résulte que l'on $a \mathscr{D}_\lambda(P \backslash G)_{\text{rat}} = L^{H_L \backslash H_P}$ et $\mathrm{Gr}^L \mathscr{D}_\lambda(P \backslash G)_{\text{rat}}$ est inclus dans $A(H_p \backslash G)$. D'où:

$$\mathscr{D}_\lambda(P \backslash G) \hookrightarrow L^{H_L \backslash H_P} \text{ avec égalité pour les gradués.}$$

La finitude de la graduation, prouve (**).

On *a* évidemment l'analogue de (**) pour $\mathscr{D}_{\lambda'}(P' \backslash G)$. Soit γ un élément de H qui conjugue H_p et $H_{p'}$, on note encore γ l'image de γ and $\mathscr{G}$ (cf. Paragraphe 17). On *a* dans L:

$$\gamma L^{H_L \setminus H_P} = L^{H_L \setminus H_{P'}},$$

d'où la proposition grâce à (**).

23.

REMARQUE. (Notation de 21). *On suppose que G est un groupe classique ou (plus généralement) que $G(f) \cap P$ est un sous-groupe distingué de $G(f)$, alors $U(\mathfrak{g})/I_{\mathrm{rat}}$ (où $I = I(\mathfrak{p}, \lambda)$) est la sous-algèbre de $\mathscr{D}_\lambda(P \setminus G)$ ensemble des points fixes pour le groupe des G-automorphismes de $\mathscr{D}_\lambda(P \setminus G)$ dont la restriction à $U(\mathfrak{g})/I$ est l'identité.*

Tenant compte de 22(**), c'est un corollaire de 20 et de 19.

24.

Ici on fixe un idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$, noté encore I et on suppose, et c'est la seule hypothèse, que $G.f$ est l'orbite nilpotente associée à I. On dit, suivant ([2, 5.8 et 5.12]) que $U(\mathfrak{g})/I$ est génériquement réduit si pour la filtration usuelle $S(\mathfrak{g})/\mathrm{gr}\, I$ et $S(\mathfrak{g})/\sqrt{\mathrm{gr}\, I}$ ont même multiplicité; ou encore (même référence que prédédemment) que $S(\mathfrak{g})/\mathrm{gr}\, I$ localisé en n'importe quel élément de $S(\mathfrak{g})$ nul sur $\overline{G.f} - G.f$ et non nul sur $G.f$ est isomorphe au localisé par le même élément de $S(\mathfrak{g})/\sqrt{\mathrm{gr}\, I}$ (rappelons que l'on a posé $\sqrt{\mathrm{gr}\, I} = J$).

PROPOSITION. *Soit I un idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$ tel que le gradué de $U(\mathfrak{g})/I$ soit génériquement réduit. Alors I est complétement premier et il existe une filtration G-stable (finie) tel que le gradué associé soit G-isomorphe à une sous-algèbre de $A(G(f) \setminus G)$ (homomorphisme de $S(\mathfrak{g})$-modules), graduée par les poids de $\Gamma(-T)$.*

On munit $U(\mathfrak{g})$ de sa filtration naturelle et on définit filt_T comme en 1. On note gr_T le gradué associé et l'on va prouver que l'on a:

$$\mathrm{gr}\, I + \mathscr{M}S(\mathfrak{g}) = \mathrm{gr}_T(I + \mathscr{M}U(\mathfrak{g})) = J + \mathscr{M}S(\mathfrak{g}).$$

Démontrons d'abord que l'on a: $\mathrm{gr}\, I + \mathscr{M}S(\mathfrak{g}) = J + \mathscr{M}S(\mathfrak{g})$.

Soit y un élément de $S(\mathfrak{g})$ nul sur $\overline{G.f} - G.f$ et non nul en f. On suppose, ce qui est loisible, que y est un T-vecteur propre de poids z et est homogène de degré d. Il résulte de $2-(1)$(iii) que $z = d$ et avec $2-(1)$(ii) que $y - \langle y, f \rangle$ est un élément de $\mathscr{M}S(\mathfrak{g})$. Par hypothèse, on a aussi:

$$\forall x \in J,\ \exists S \in \mathbf{N} \text{ telle que } xy^S \in \mathrm{gr}\, I.$$

L'assertion cherchée est alors claire.

Montrons que l'on a: $\operatorname{gr}_T(I + \mathcal{M}U(\mathfrak{g})) \subset J + \mathcal{M}S(\mathfrak{g})$.

On adopte les notations $y_0, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_D$ de la démonstration de 10. On remarque qu'ici aussi $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_D$ est une suite régulière de

$$(S(\mathfrak{g})/J)_{y_0} = (S(\mathfrak{g})/\operatorname{gr} \mathrm{I})_{y_0} = (\operatorname{gr} U(\mathfrak{g})/I)_{y_0}.$$

On obtient l'assertion cherchée de la même façon qu'en 10.

Ainsi pour la filtration de filt_T le gradué de $M := U(\mathfrak{g})/I + \mathcal{M}U(\mathfrak{g})$ est isomorphe à $S(\mathfrak{g})/J + \mathcal{M}S(\mathfrak{g}) = A(N)$. Pout démontrer que M est un modèle de Whittaker de I, il ne reste plus qu'à démontrer que M est irréductible d'annulateur I. L'irréductibilité résulte de ce que $M^N = \mathbf{C}$. Notons I' l'annulateur de M; évidemment I' contient I et $\operatorname{gr} I' = \operatorname{gr}_T I'$ est inclus dans $J + \mathcal{M}S(\mathfrak{g})$. Par G-invariance, on a $\operatorname{gr} I' \subset J$. Cela entraine que les dimensions de Gelfand-Kirilov de $U(\mathfrak{g})/I$ et de $U(\mathfrak{g})/I'$ coïncident et donc que I et I' sont égaux (cf. [3]). On *a* démontré dans [11] que $U(\mathfrak{g})/I$ possède alors une filtration avec les propriétés souhaitées (la démonstration est celle qui a été faite dans 13), sauf l'inclusion du gradué dans $A(G(f)\backslash G)$, propriété qui résulte, elle, de 11 et de l'irréductibilité de M.

25.

REMARQUE. Grâce à 24 et 11 (appliqué à $A = U(\mathfrak{g})/I$), on *a*: *Soit I un idéal primitif, $U(\mathfrak{g})/I$ a son gradué génériquement réduit si et seulement si $U(\mathfrak{g})/I + \mathcal{M}U(\mathfrak{g})$ est l'unique modèle de Whittaker de I.*

Si $G.f$ est une sous-variété normale de $\mathfrak{g}^*$, alors $U(\mathfrak{g})/I$ est à gradué génériquement réduit si et seulement il est à gradué (pour la filtration naturelle) réduit. (La première partie de la remarque est alors un critère simple.)

26.

LEMME. *Soit C une $\mathbf{C}$-algèbre et $\mathcal{G}$ un groupe d'automorphismes de C fini et cyclique. On suppose que l'algèbre des points fixes est réduite à $\mathbf{C}$. Alors il existe un idéal bilatère, noté J' de C tel que $C/J' = \mathbf{C}$.*

On note $\mathcal{G}^*$ le groupe des caractères de $\mathcal{G}$ et pour tout élément ν de $\mathcal{G}^*$, on note C_ν l'espace propre correspondant pour l'action de $\mathcal{G}$ dans C.

On pose:

$$\mathcal{X} = \{\nu \in \mathcal{G}^* \mid C_\nu \neq 0\}.$$

On raisonne par récurrence sur le cardinal de $\mathcal{X}$. Si ce cardinal vaut 1 l'ensemble $\mathcal{X}$ est réduit au caractère trivial et C est réduite à $\mathbf{C}$. L'idéal

$J' = 0$ convient. Sinon, on distingue deux cas:

1^e^ CAS. $\forall \nu \in \mathscr{X}$, $CC_\nu C = C$.

Cela veut dire que quelque soit $\nu \in \mathscr{X}$, il existe des éléments, notés a, b, c, de C et $\mu \in \mathscr{X}$ tels que l'on ait:

$$a \in C_\mu,\ b \in C_\nu,\ c \in C_{(\mu\nu)^{-1}} \quad \text{et} \quad abc = 1.$$

Il est clair que bca et cab sont des éléments de $C_{\mathrm{id}} - \{0\}$ $(= \mathbf{C}^*)$ et donc que b est inversible à gauche et à droite. Cela entraine que $\mathscr{X}$ est un sous-groupe de $\bar{\mathscr{G}}^*$ et donc que $\mathscr{X}$ est un groupe cyclique. On choisit ν_0 un générateur de $\mathscr{X}$ et $b_0 \in C_{\nu_0}$ un élément inversible. Avec l'hypothèse $C^{\mathscr{G}} = \mathbf{C}$, on voit immédiatement que l'on a:

$$C = \sum_{m \in \mathbf{N}} C b_0^m;$$

en particulier C est commutative et de dimmension finie. Le lemme est alors clair dans ce cas.

2^e^ CAS. $\exists \nu \in \mathscr{X} tq \quad CC_\nu C \neq C$.

On pose $J'' = CC_\nu C$; c'est un idéal bilatère propre et $\bar{\mathscr{G}}$-stable de C. On pose $C' = C/C'$ et on définit C'_ν, $\mathscr{X}'$ de la même façon que C_ν et $\mathscr{X}$. Comme $\bar{\mathscr{G}}$ est un groupe fini, pour tout $\nu \in \bar{\mathscr{G}}^*$, l'application naturelle de C_ν dans C'_ν est surjective. Ainsi on a sûrement:

$$C'^{\mathscr{G}} = \mathbf{C} \quad \text{et} \quad \# \mathscr{X}' \leqq \# \mathscr{X} - 1.$$

On obtient alors le lemme en utilisant l'hypothèse de récurrence.

27.

LE CAS DE $\mathrm{Sl}(n, \mathbf{C}) =: G$.
On not $\bar{\mathscr{G}}$ le centre de $\mathrm{Sl}(n, \mathbf{C})$.

PROPOSITION. *Soit I un idéal primitif complétement premier de $U(\mathfrak{g})$ où $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(n, \mathbf{C})$ et A une algèbre intègre contenant $U(\mathfrak{g})/I$ sur laquelle G-opère rationnellement (avec comme différentielle l'action adjointe de $\mathfrak{g}$ dans A). On suppose que A est un $U(\mathfrak{g})/I$-module à gauche de type fini et que A possède une filtration G-stable compatible à la filtration naturelle de $U(\mathfrak{g})/I$ et dont le gradué associé est un $S(\mathfrak{g})$-module de type fini. On note L l'algèbre des endomorphismes G-finis de $M := U(\mathfrak{g})/I + \mathscr{M}U(\mathfrak{g})$* (cf. *Paragraphe* 1 *pour la notation $\mathscr{M}$). Alors on a: M est un $U(\mathfrak{g})$-module irréductible d'annulateur I et à isomorphisme près, respectant toutes les structures, A est inclus dans L $(A \in \mathscr{E}_I)$.*

Le résultat important pour la preuve est due à Joseph et peut s'exprimmimer comme suit:

THÉORÈME ([7, 2.3]). *Soit A comme dans la proposition mais sans hypothèses de filtration remplacée par l'hypothèse que A est un $U(\mathfrak{g})/I$-module de type fini à gauche, alors $\mathscr{G}$ opère dans A et l'on a*:

$$U(\mathfrak{g})/I \underset{\sim}{\hookrightarrow} A^{\mathscr{G}}.$$

De plus d'après ([12]), on sait que I est un idéal induit au sens de 21. On peut donc appliquer à I ce qui a été fait dans ce papier. Tenant compte de 25 et de ([1, 5.6]), on voit que M est irréductible d'annulateur I. Montrons que l'on a:

(1) *l'application naturelle de M dans $A/\mathscr{M}A$ est injective.*

Pour cela, il suffit de prouver que $A/\mathscr{M}A \neq 0$. Supposons le contraire, i.e. $A = \mathscr{M}A$. Par finitude de $\bar{\mathscr{G}}$, on a immédiatement $A^{\mathscr{G}} = \mathscr{M}A^{\mathscr{G}}$, ce qui contredit la propriété de $\mathscr{M}U(\mathfrak{g})/I$, grâce au résultat de Joseph.

On pose $C = (A/\mathscr{M}A)^N$. En utilisant toujours la finitude de $\bar{\mathscr{G}}$, le résultat de Joseph et le fait que $(U(\mathfrak{g})/I + \mathscr{M}U(\mathfrak{g}))^N = C$ (cf. Paragraphe 25), on a:

(2) $C^{\mathscr{G}} = C$.

On aura aussi besoin de l'assertion suivante:

(3) *$A/\mathscr{M}A$ est un C-module à gauche libre et un $U(\mathfrak{g})$-module à droite admettant $C(\hookrightarrow A/\mathscr{M}A)$ comme système de générateurs.*

On choisit $\alpha_1, \ldots, \alpha_Q$ et $\beta_1, \ldots, \beta_Q$ comme en 4. Rappelons que $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}(f) = 0$ (cf. Paragraphe 5). On va montrer que l'ensemble des éléments ($\bar{1}$ est l'unité de $C \hookrightarrow A/\mathscr{M}A$) $\bar{1}\beta_1^{m_1} \ldots \beta_Q^{m_Q}$ où $m_1, \ldots, m_Q \in \mathbb{N}^Q$ forment une base comme C-module à gauche de $A/\mathscr{M}A$. On munit A de la filtration dont l'existence est assurée par les hypothèses, notée Filt^A. Il faut remarquer, ici, que le gradué associé est un $S(\mathfrak{g})/\mathrm{gr}\, I (= S(\mathfrak{g})/J$, cf. Paragraphe 25)-module de type fini et, pour des raisons de dimension, nécessairement fidèle; c'est-à-dire Filt^A induit sur $U(\mathfrak{g})/I$ la filtration naturelle. A partir de Filt^A, on construit la filtration décroissante, notée Filt_T^A, comme en 1, et on note $\overline{\mathrm{Filt}_T^A}$ la filtration quotient sur $A/\mathscr{M}A$. Utilisant l'hypothèse de finitude de $\mathrm{Gr}^A A$ sur $S(\mathfrak{g})/J$ et tenant compte de $2-(2)(\mathrm{i})$, on voit, comme dans la démonstration de 10, que $\overline{\mathrm{Filt}_T^A}$ est une filtration finie. On note Gr_T^A le gradué associé et on pose:

$$C' = (\mathrm{Gr}_T^A A/\mathscr{M}A)^N.$$

On a un morphisme d'algèbres graduées non nul et N-equivariant, de $\mathrm{gr}_T M$ dans $\mathrm{Gr}_T^A A/\mathscr{M}A$. Comme $\mathrm{gr}_T M \simeq A(N)$ ce morphisme est nécessairement injectif et utilisant les relations de 4, on voit, comme dans la démonstration de 7, que l'on a:

$\mathrm{Gr}_T^A A/\mathcal{M}A$ est un C'-module libre de base $\bar{\beta}_1^{m_A} \ldots \bar{\beta}_Q^{m_Q}$ (où les $^-$ indiquent les images dans le gradué).

Montrons que l'on a:

l'application de passage au gradué de C dans C′ est surjective.

Pour cela, on utilise le résultat suivant (qui résulte de la commutativité de Gr^A et du fait que l'espace vectoriel engendré par $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$ est, pour tout $1 \leqq j \leqq Q$, un idéal de $\mathfrak{n}$):

Soit $x \in A/\mathcal{M}A$; on pose $m = \inf_{1 \leq i \leq Q} \overline{\mathrm{Filt}_T^A}[\alpha_i, x]$ et j le plus petit indice pour lequel cet inf est atteint; alors

$$x' := x + \sum_{w \geq 1} (-1)^w (\mathrm{ad}\, \alpha_j)^w . x \beta_j^w$$

vérifie:

$$\inf_{1 \leq i \leq j} \overline{\mathrm{Filt}_T^A}[\alpha_i, x] > m,$$

$$\inf_{j < i \leq Q} \overline{\mathrm{Filt}_T^A}[\alpha_i, x] \geqq m,$$

si $m > \overline{\mathrm{Filt}_T^A} x$ alors x' et x ont même gradué.

L'assertion cherchée est alors à peu près immédiate puisque $\overline{\mathrm{Filt}_T^A}$ est finie. Utilisant encore la finitude de Filt_T^A et un raisonnement standard de passage au gradué, on obtient (2).

On choisit J', un idéal bilatère de C ayant les propriétés de 26. Grâce à (2), on sait que $M' := (A/\mathcal{M}A)/J'(A/\mathcal{M}A)$ est propre et que l'application naturelle de M dans M' est surjective et non nulle; d'où $M \simeq M'$. Ainsi A s'envoie naturellement dans L; la finitude de A sur $U(\mathfrak{g})/\mathrm{I}$ (qui résulte de la même assertion sur les gradués) et l'intégrité de A assurent (cf. Paragraphe $2-(3)$) que ce morphisme est injectif. Cela termine la démonstration de la proposition.

BIBLIOGRAPHIE

1. W. Borho, *Definition einer Dixmier-Abbildung für* sl(n, C), Invent. Math. 40 (1977), 143–169.
2. W. Borho and J. L. Brylinski, *Differential operators on homogeneous spaces*, Invent. Math. 69 (1982), 437–476.
3. W. Borho and H. Kraft, *Über die Gelfand-Kririllov-Dimension*, Math. Ann. 220 (1976), 1–24.
4. J. Dixmier, *Algèbres Enveloppantes* (Cahiers Sci. 37), Gauthier-Villars, Paris, 1974.
5. F. Du Cloux, *Une approche géométrique de problème de Kostant*, préprint, École Polytechnique, Paris, 1984.

6. A. Joseph, *Kostant's problem, Goldie rank and the Gelfand-Kirillov conjecture*, Invent. Math. 56 (1980), 191–213.
7. A. Joseph, *Kostant's problem and Goldie rank*, in *Non Commutative Harmonic Analysis and Lie Groups*, (Proc., Marseille-Luminy, 1980) eds. J. Carmona and M. Vergne. (Lecture Notes in Math. 880), pp. 249–266. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1981.
8. A. Joseph and J. T. Stafford, *Modules of $\mathfrak{k}$-finite vectors over semi-simple Lie algebras*, Proc. London Math. Soc.(3), 49 (1984), 361–384.
9. B. Kostant, *Lie group representations on polynomial rings*, Amer. J. Math. 85 (1963), 327–404.
10. G. Lusztig and N. Spaltenstein, *Induced unipotent classes*, J. London Math. Soc. 19 (1979), 41–52.
11. C. Mœglin, *Modèles de Whittaker et idéaux primitifs complètement premiers dans ls algèbres enveloppantes*, préprint, Paris, 1986.
12. C. Mœglin, *Idéaux primitifs complètement premiers dans l'algèbre enveloppante de* $\mathrm{gl}(n, \mathbf{C})$, à paraitre au J. Algebra.
13. C. Mœglin and R. Rentschler, *Sous-corps commutatifs* ad-*stables dans les anneaux de fractions des quotients primitifs des algèbres enveloppantes, expaces homogènes et induction de Mackey*, à paraitre au J. Funt Anal.
14. D. Vogan, *Orbit method and primitive ideals for semisimple Lie algebras*, préprint, M.I.T., 1984.

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
U.E.R. 48, AILE 45–46, 3e ÉTAGE
4, PLACE JUSSIEU
75230 PARIS CEDEX 05