MATH. SCAND. 63 (1988), 196–211

ÜBER KOASSOZIIERTE PRIMIDEALE

HELMUT ZÖSCHINGER

Einleitung.

Sei R ein kommutativer noetherscher Ring und M ein R-Modul. Ein Primideal $\mathfrak{p}$ heißt *koassoziiert* zu M, wenn es einen Untermodul B von M gibt, so daß M/B artinsch und $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(M/B)$ ist. Die Menge $\mathrm{Koass}(M)$ aller zu M koassoziierten Primideale ist vor allem zur Beschreibung von Teilbarkeitseigenschaften des Moduls M geeignet: Es ist $\bigcup \mathrm{Koass}(M) = \{x \in R \mid xM \neq M\}$, für das Ideal $\mathfrak{a} = \bigcap \mathrm{Koass}(M)$ gilt $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i M = 0$, außerdem ist $\mathfrak{a}$ das größte Ideal von R, so daß jeder $\mathfrak{a}$-teilbare Faktormodul von M verschwindet (siehe [8] p. 129). Für einen artinschen Modul M wurden koassoziierte Primideale zum ersten Mal von MacDonald in [4] im Rahmen einer "Sekundärdarstellung" von M untersucht, für den n-ten lokalen Kohomologiemodul $M = H^n_{\mathfrak{m}}(R)$ von Sharp in [5]. Für einen linear-kompakten Modul M führte in [8] das Zusammenspiel zwischen $\mathrm{Koass}(M)$ und $\mathrm{Ass}(M)$ zur Strukturbestimmung von M, und in einem beliebigen Modul M hängen die Kettenbedingungen für radikalvolle Untermoduln nach [9] wesentlich von der Menge $\mathrm{Koass}(M)$ ab.

Ist R zusätzlich lokal, E die injektive Hülle des Restklassenkörpers und $M^\circ = \mathrm{Hom}_R(M, E)$, so gilt $\mathrm{Koass}(M) = \mathrm{Ass}(M^\circ)$. Auf Grund der speziellen Struktur von M° besitzen die Menge $\mathrm{Koass}(M)$ und das Ideal $\mathfrak{a} = \bigcap \mathrm{Koass}(M)$ zusätzliche Eigenschaften:

(1.2) Es gibt ein $e \geqq 1$, sodaß $\mathfrak{a}^e M$ endlich erzeugt ist.

(1.6) Ist Y eine abzählbar unendliche, diskrete Teilmenge von $\mathrm{Spec}(R)$, so gibt es keinen R-Modul M mit $\mathrm{Koass}(M) = Y$.

(2.6) Für jede Familie $(M_i \mid i \in I)$ von R-Moduln gilt $\mathrm{Koass}\left(\prod_{i \in I} M_i\right) = \mathrm{Koass}\left(\coprod_{i \in I} M_i\right)$.

Eingegangen am 22. Mai 1987

Keine dieser drei Eigenschaften gilt entsprechend für assoziierte Primideale: Ist $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Integritätsring, $0 \neq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$ und M die injektive Hülle von $R/\mathfrak{p}$, so ist $\mathrm{Ass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$, aber $M/\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{p}^e)$ für kein $e \geqq 1$ artinsch, außerdem $\mathrm{Ass}(M^{\mathbf{N}}) \supsetneq \mathrm{Ass}(M^{(\mathbf{N})})$; und bekanntlich gibt es zu jeder Teilmenge Y von $\mathrm{Spec}(R)$ einen R-Modul N mit $\mathrm{Ass}(N) = Y$.

Der Beweis der Aussage (1.6) sowie alle in der Arbeit auftretenden Beispiele für $\mathrm{Koass}(M)$ legen folgende Vermutung nahe: *Ist R lokal, so hat für jeden R-Modul M die Menge* $\mathrm{Koass}(M)$ *eine endliche finale Teilmenge.* Wir können sie beweisen, falls $\mathrm{Koass}(M)$ abzählbar ist (1.5), falls M halbartinsch ist (2.9) oder falls M eine Zerlegung $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ besitzt, in der alle $\mathrm{Koass}(M_i)$ endlich sind (3.2).
Im vierten Abschnitt bestimmen wir für gewisse multiplikative Teilmengen S von R – auch wenn R nicht lokal ist – die koassoziierten Primideale des R-Moduls R_S. Insbesondere gilt (4.7): *Ist R ein noetherscher Integritätsring und* $\mathfrak{q}$ *ein Primideal von R, aber kein maximales Ideal, so ist*

$$\mathrm{Koass}(R_{\mathfrak{q}}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}\}.$$

1. Das Ideal $\bigcap$ Koass (M).

Stets sei in dieser Arbeit R ein kommutativer, noetherscher Ring. Falls R zusätzlich lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ ist, sei $\hat{R}$ die $\mathfrak{m}$-adische Vervollständigung von R, E die injektive Hülle des Restklassenkörpers $R/\mathfrak{m}$ und $M^\circ = \mathrm{Hom}_R(M, E)$. Nach [9, Lemma 3.1] ist dann $\mathrm{Koass}(M) = \mathrm{Ass}(M^\circ)$.

LEMMA 1.1. *Sei R lokal, M ein R-Modul und* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots$ *eine Folge von Idealen, so daß jedes* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(M)$ *über einem* $\mathfrak{a}_i$ *liegt. Dann gibt es natürliche Zahlen k und e, so daß* $(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_k)^e M$ *endlich erzeugt ist.*

BEWEIS. Sei $\mathfrak{G}$ die von den $\mathfrak{a}_i$ erzeugte Gabriel-Topologie auf R, d.h.

$$\mathfrak{G} = \{\mathfrak{a} \subset R \mid \text{es gibt natürliche Zahlen } k, e \text{ mit } (\mathfrak{a}_1 \cdot \ldots \mathfrak{a}_k)^e \subset \mathfrak{a}\}$$

(siehe [6] p. 150). Unsere Voraussetzung an M ist dann äquivalent damit, daß $\mathrm{Ass}(M^\circ) \subset \mathfrak{G}$, d.h. M° $\mathfrak{G}$-torsion ist. Weil $\mathfrak{G}$ eine abzählbare Basis hat, sagen wir $\mathfrak{b}_1 \supset \mathfrak{b}_2 \supset \mathfrak{b}_3 \supset \ldots$, heißt das mit $\mathrm{Ann}_{M^\circ}(\mathfrak{b}_i) = M^\circ[\mathfrak{b}_i]$, daß $M^\circ = \sum_{i=1}^{\infty} M^\circ[\mathfrak{b}_i]$ ist.

1. *Schritt* Zu jeder aufsteigenden Folge $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \ldots \subset M$ gibt es natürliche Zahlen m, n mit $b_m U_i \subset U_n$ für alle i. Zum Beweis bilde man $N = \sum_{i=1}^{\infty} U_i$, so daß N° durch die Filtrierung $N^\circ \supset \mathrm{Ann}_{N^\circ}(U_1) \supset \mathrm{Ann}_{N^\circ}(U_2) \supset \ldots$ eine vollständige Metrik erhält, bzgl. der alle $N^\circ[b_i]$ abgeschlossen sind. Aus

$N^\circ = \sum_{i=1}^{\infty} N^\circ[b_i]$ folgt nach dem Satz von Baire $\mathrm{Ann}_{N^\circ}(U_n) \subset N^\circ[b_m]$ für geeignete m, n, wegen $\mathrm{Ann}_{N^\circ}(U_n) \cong (N/U_n)^\circ$ also $b_m N \subset U_n$ wie behauptet.

2. *Schritt.* Weil insbesondere in jeder aufsteigenden Folge $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \ldots \subset M$ fast alle Faktoren U_{i+1}/U_i $\mathfrak{G}$-torsion sind, ist M $\mathfrak{G}$-noethersch, d.h. es existiert ein endlich erzeugter Untermodul M' von M, so daß M/M' $\mathfrak{G}$-torsion ist (siehe [6], p. 263). Bleibt zu zeigen, daß $\bar{M} = M/M'$ durch ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}$ annulliert wird: Zu $\bar{M} = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{M}[b_i]$ gibt es wieder nach dem ersten Schritt natürliche Zahlen m, n mit $b_m \bar{M} \subset \bar{M}[b_n]$, so daß $\mathfrak{a} = b_n b_m$ das Gewünschte leistet.

Setzt man speziell $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2 = \ldots = \bigcap \mathrm{Koass}(M)$, so erhält man:

SATZ 1.2. *Sei R lokal, M ein R-Modul und* $\mathfrak{a} = \bigcap \mathrm{Koass}(M)$. *Dann gibt es ein $e \geqq 1$, so daß $\mathfrak{a}^e M$ endlich erzeugt ist.*

War M zusätzlich radikalvoll, d.h. $\mathfrak{m}M = M$, so ist auch $\mathfrak{a}^e M$ radikalvoll, d.h. Null:

FOLGERUNG 1.3. *Ist R lokal, so gilt für jeden radikalvollen R-Modul M, daß* $\bigcap \mathrm{Koass}(M) = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$ *ist.*

BEMERKUNG. Ein R-Modul M heißt bekanntlich *koatomar*, wenn jeder echte Untermodul von M in einem maximalen Untermodul enthalten ist. Das ist, falls R lokal und $M \neq 0$ ist, äquivalent mit $\mathrm{Koass}(M) = \{\mathfrak{m}\}$, so daß (1.2) einen neuen (und kürzeren) Beweis für das Hauptergebnis von [7] liefert: Über einem lokalen Ring $(R, \mathfrak{m})$ ist ein Modul M genau dann koatomar, wenn $\mathfrak{m}^e M$ endlich erzeugt ist für ein $e \geqq 1$.

Setzt man mit den Bezeichnungen des Lemmas $U = (\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_k)^e M$, so folgt aus $\mathrm{Koass}(M) \subset \mathrm{Koass}(U) \cup \mathrm{Koass}(M/U)$ für jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(M)$, daß entweder $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ ist oder $(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_k)^e \subset \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{a}_j \subset \mathfrak{p}$ für ein $j \in \{1, \ldots k\}$:

SATZ 1.4. *Sei R lokal, M ein R-Modul und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots$ eine Folge von Idealen, so daß jedes* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(M)$ *über einem $\mathfrak{a}_i$ liegt. Dann gibt es ein $k \geqq 1$, so daß jedes* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(M)$ *über einem der $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$ liegt.*

FOLGERUNG 1.5. *Ist R lokal und* Koass (M) *abzählbar, so hat* Koass (M) *eine endliche finale Teilmenge.*

FOLGERUNG 1.6. *Ist R lokal und Y eine abzählbar unendliche, diskrete Teilmenge von* $\mathrm{Spec}(R)$, *so gibt es keinen R-Modul M* mit $\mathrm{Koass}(M) = Y$.

BEMERKUNG 1. Die Aussagen (1.1) bis (1.6) gelten auch dann, wenn R semilokal ist. Falls aber das Maximalspektrum Ω von R unendlich ist, können sowohl (1.3) als auch (1.6) verletzt sein (also auch die übrigen Punkte): In $R = \mathbf{Z}[[X, Y]]$

gibt es paarweise verschiedene maximale Ideale $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \ldots$ und dazu Primideale $\mathfrak{q}_i \subsetneqq \mathfrak{m}_i$, so daß $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{q}_i \neq 0$, aber $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{q}_i^{(i)} = 0$ ist. Ist Q_i die injektive Hülle von R/m_i und $M_i = Q_i[\mathfrak{q}_i^{(i)}]$, so ist M_i $\mathfrak{m}_i$-primär und radikalvoll, $\mathrm{Koass}(M_i) = \{\mathfrak{q}_i\}$ nach [9, Folgerung 3.3] und $\mathrm{Ann}_R(M_i) = \mathfrak{q}_i^{(i)}$. Für den halbartinschen, radikalvollen R-Modul $M = \coprod_{i=1}^{\infty} M_i$ ist dann $\mathrm{Koass}(M) = \{\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\}$ und $\mathrm{Ann}_R(M) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{q}_i^{(i)} = 0$, also $\bigcap \mathrm{Koass}(M) \supsetneqq \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$. Schließlich hat für die abzählbar unendliche, diskrete Teilmenge $Y = \{\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots\}$ der R-Modul $N = \coprod_{i=1}^{\infty} R/\mathfrak{m}_i$ die Eigenschaft $\mathrm{Koass}(N) = Y$.

Bemerkung 2. Über beliebigem R gilt für einen radikalvollen R-Modul M immerhin $\bigcap \mathrm{Koass}(M) \subset \bigcap \mathrm{Ass}(M)$. Zum Beweis sei $\mathfrak{a} = \bigcap \mathrm{Koass}(M)$ und $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$. Wählt man zu $R/\mathfrak{p} \cong U \subset M$ in der Menge $\{V \subset M \mid V \cap U = 0\}$ ein maximales Element V_0, wird $\bar{M} = M/V_0$ wesentliche Erweiterung von $R/\mathfrak{p}$, insbesondere $\mathrm{Ass}(\bar{M}) = \{\mathfrak{p}\}$. Nun ist $\mathfrak{a}\bar{M}$ klein in $\bar{M}$, für irgendein $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m} \in \Omega$ also auch $(\mathfrak{a}\bar{M})_{\mathfrak{m}}$ klein in $\bar{M}_{\mathfrak{m}}$ nach [7, Lemma 4.1], also $(\mathfrak{a}^e \bar{M})_{\mathfrak{m}} = 0$ für ein $e \geqq 1$ nach (1.3). Es folgt $\mathfrak{a}^e \bar{M} = 0$, $\mathfrak{a}^e(R/\mathfrak{p}) = 0$, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ wie behauptet.

2. Attachierte Primideale.

Zur Berechnung von $\mathrm{Koass}(\bigoplus_{i \in I} M_i)$ benötigen wir eine Verallgemeinerung des Begriffes "koassoziiert". Ein Primideal $\mathfrak{p}$ von R heißt *attachiert* zum R-Modul M, wenn es einen Untermodul U von M gibt mit $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(M/U)$. Weil dann schon $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(M/\mathfrak{p}M)$ ist, verhält sich die Menge $\mathrm{Att}(M)$ aller attachierten Primideale bei direkten Summen und Produkten ganz einfach: Es ist $\mathrm{Att}(M^{(I)}) = \mathrm{Att}(M^I) = \mathrm{Att}(M)$ für jede nichtleere Indexmenge I. Auch lassen sich, im Unterschied zu $\mathrm{Koass}(M)$, leicht Elemente von $\mathrm{Att}(M)$ angeben: Nach [10, p. 592] gehört jeder Primdivisor von $\mathrm{Ann}_R(M)$ zu $\mathrm{Att}(M)$. Insbesondere ist $\bigcap \mathrm{Att}(M) = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$. Wir untersuchen im folgenden für gewisse Moduln M, wann in $\mathrm{Koass}(M) \subset \mathrm{Att}(M)$ schon Gleichheit gilt. Das Hauptergebnis (2.9) lautet, daß das über lokalen Ringen für jeden halbartinschen Modul zutrifft.

Beispiel 1. Ist M endlich erzeugt, so gilt $\mathrm{Att}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \supset \mathrm{Ann}_R(M)\}$.

Beweis. Für jeden Modul M und jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}(M)$ gilt $\mathfrak{p} \supset \mathrm{Ann}_R(M)$. Ist aber M endlich erzeugt, gilt für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ nach [2, chap. II, §4, Prop. 18, Cor.] $\sqrt{\mathrm{Ann}_R(M/\mathfrak{p}M)} = \sqrt{\mathfrak{p} + \mathrm{Ann}_R(M)}$, bei $\mathfrak{p} \supset \mathrm{Ann}_R(M)$ also $\mathrm{Ann}_R(M/\mathfrak{p}M) \subset \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}(M)$. – Natürlich ist, wenn M endlich erzeugt ist, $\mathrm{Koass}(M) = \{\mathfrak{m} \in \Omega \mid \mathfrak{m} \supset \mathrm{Ann}_R(M)\}$, also $\mathrm{Koass}(M) = \mathrm{Att}(M)$ nur dann, wenn M von endlicher Länge ist.

BEISPIEL 2. Ist M flach, so gilt $\mathrm{Att}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid M/\mathfrak{p}M \neq 0\}$.

BEWEIS. Nur "$\supset$" ist zu zeigen, und weil $M/\mathfrak{p}M$ über dem Integritätsring $R/\mathfrak{p}$ ein torsionsfreier Modul $\neq 0$ ist, gilt $\mathrm{Ann}_{R/\mathfrak{p}}(M/\mathfrak{p}M) = 0$, d.h. $\mathrm{Ann}_R(M/\mathfrak{p}M) = \mathfrak{p}$. – Wir wissen nicht, unter welchen Zusatzbedingungen an einen flachen Modul M schon $\mathrm{Koass}(M) = \mathrm{Att}(M)$ ist.

BEISPIEL 3. Ist M injektiv, so gilt $\mathrm{Att}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R) \mid M[\mathfrak{p}] \neq 0\} = \mathrm{Koass}(M)$.

BEWEIS. Für jeden endlich erzeugten R-Modul A wurde in [9, Folgerung 3.3] gezeigt, daß

$$\mathrm{Att}(\mathrm{Hom}_R(A, M)) \subset \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A) \mid M[\mathfrak{p}] \neq 0\} \subset \mathrm{Koass}(\mathrm{Hom}_R(A, M))$$

ist, so daß $A = R$ die Behauptung liefert.

BEISPIEL 4. Ist R lokal und M radikalvoll, so ist jedes attachierte Primideal Durchschnitt von koassoziierten.

BEWEIS. Zu $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}(M)$ ist der $R/\mathfrak{p}$-Modul $\bar{M} = M/\mathfrak{p}M$ treu, also nach (1.3) $\bigcap \mathrm{Koass}_{R/\mathfrak{p}}(\bar{M}) = 0$, so daß mit $\mathrm{Koass}(M/\mathfrak{p}M) = \{\mathfrak{p}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ gilt $\mathfrak{p} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{p}_\lambda$, alle $\mathfrak{p}_\lambda \in \mathrm{Koass}(M)$. – Falls zusätzlich $\mathrm{Koass}(M)$ abzählbar war, zeigt derselbe Beweis und (1.5), daß sogar $\mathrm{Koass}(M) = \mathrm{Att}(M)$ ist.

Unser erstes Resultat (2.4) über $\mathrm{Koass}(M^{\mathbb{N}})$ beruht allein auf dem Ergebnis von Bass [1, Theorem 1.1], daß in einem endlich erzeugten Modul A jede totalgeordnete Menge von Untermoduln abzählbar ist. Aus ihm folgt nämlich:

LEMMA 2.1. *Ist A ein endlich erzeugter R-Modul, so gibt es zu jeder Menge Y von Untermoduln von A eine abzählbare Teilmenge Y_0 mit $\bigcap Y = \bigcap Y_0$.*

BEWEIS. Ein Untermodul U von A heiße – nur für diesen Beweis – zulässig, wenn es eine abzählbare Teilmenge Y' von Y gibt mit $U = \bigcap Y'$. Die Menge Z aller zulässigen Untermoduln enthält z.B. A und alle Elemente von Y. Sind U_1, U_2, $U_3, \ldots$ aus Z, so auch $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$. Jede totalgeordnete Teilmenge von Z ist nun nach Bass abzählbar, hat also eine untere Schranke in Z. Damit ist Z nach unten induktiv geordnet und hat nach Zorn ein minimales Element U_0. Für jeden Untermodul $V \in Y$ ist $U_0 \cap V \in Z$, also wegen der Minimalität $U_0 \cap V = U_0$, d.h. $U_0 \subset V$: Wir haben $\bigcap Y = U_0$ gezeigt.

FOLGERUNG 2.2. *Jeder R-Modul M besitzt einen abzählbar erzeugten Untermodul M_0 mit* $\mathrm{Ann}_R(M) = \mathrm{Ann}_R(M_0)$.

BEWEIS. Setzt man im Lemma $A = R$ und $Y = \{\mathrm{Ann}_R(x) \mid x \in M\}$, folgt mit

$$Y_0 = \{\mathrm{Ann}_R(x_i) \mid i = 1, 2, 3, \ldots\} \text{ und } M_0 = \sum_{i=1}^{\infty} Rx_i,$$

daß $\mathrm{Ann}_R(M) = \mathrm{Ann}_R(M_0)$ ist. Zusätzlich liefern diese x_i ein Element $u = (x_i) \in M^{\mathbf{N}}$ mit $\mathrm{Ann}_R(u) = \mathrm{Ann}_R(M)$, d.h. einen Monomorphismus $R/\mathrm{Ann}_R(M) \to M^{\mathbf{N}}$.

FOLGERUNG 2.3. *Ist R ein Integritätsring, so sind für einen R-Modul M äquivalent:*

(i) *Jeder teilbare Faktormodul von $M^{\mathbf{N}}$* ist Null.

(ii) *$M^{\mathbf{N}}$ ist ein Torsionsmodul.*

(iii) *M ist beschränkt.*

BEWEIS. Klar ist (iii → i), denn dann ist auch $M^{\mathbf{N}}$ beschränkt. Wäre bei (i → ii) $M^{\mathbf{N}}$ kein Torsionsmodul, gäbe es sogar einen Monomorphismus $R^{\mathbf{N}} \to M^{\mathbf{N}}$. Mit irgendeinem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ ist aber die injektive Hülle Q von $R/\mathfrak{m}$ abzählbar erzeugt, so daß es einen Epimorphimus $R^{(\mathbf{N})} \to Q$ gibt. Der läßt sich zu einem Epimorphismus $M^{\mathbf{N}} \to Q$ hochheben, so daß Q ein teilbarer Faktormodul $\neq 0$ von $M^{\mathbf{N}}$ wird entgegen der Voraussetzung. (ii → iii) wird in [3, Theorem 2.3] bewiesen, folgt aber unmittelbar mittels der Einbettung $R/\mathrm{Ann}_R(M) \to M^{\mathbf{N}}$ aus (2.2), denn mit ihr ist auch $R/\mathrm{Ann}_R(M)$ ein Torsionsmodul, d.h. $\mathrm{Ann}_R(M) \neq 0$.

SATZ 2.4. *Für jeden R-Modul M gilt* $\mathrm{Koass}(M^{\mathbf{N}}) = \mathrm{Att}(M)$.

BEWEIS. Klar ist $\mathrm{Koass}(M^{\mathbf{N}}) \subset A(M^{\mathbf{N}}) = \mathrm{Att}(M)$. Umgekehrt folgt aus $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(M/U)$, daß $\bar{M} = M/U$ als $R/\mathfrak{p}$-Modul nicht beschränkt ist, es also nach (2.3) einen Epimorphismus $\bar{M}^{\mathbf{N}} \to D$ gibt, so daß D als $R/\mathfrak{p}$-Modul teilbar $\neq 0$ ist. Es folgt $\mathrm{Koass}_{R/\mathfrak{p}}(D) = \{0\}$, d.h. $\mathrm{Koass}(D) = \{\mathfrak{p}\}$, und daraus $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(M^{\mathbf{N}})$.

BEMERKUNG. Für jede unendliche Indexmenge I läßt sich ebenso $\mathrm{Koass}(M^I) = \mathrm{Att}(M)$ zeigen und (wieder mit (2.3)) entsprechend $\mathrm{Ass}(M^I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(U)$ für einen Untermodul U von $M\}$.

Die Berechnung von $\mathrm{Koass}\left(\prod_{i \in I} M_i\right)$ für nichtisomorphe M_i gelingt uns im lokalen Fall mit Hilfe der Ergebnisse von Goodearl und Zimmermann-Huisgen in [3] über direkte Produkte von Torsionsmoduln. Eine Teilmenge J von I heiße koendlich in I, wenn $I \setminus J$ endlich ist.

Lemma 2.5. *Ist R lokal und $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, so sind für ein Primideal* $\mathfrak{p}$ *äquivalent:*

(i) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(M)$.

(ii) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(M_j)$ *für ein* $j \in I$, *oder* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}\left(\bigoplus_{i\in J} M_i\right)$ *für jede koendliche Teilmenge J von I.*

Beweis. (i → ii) Ist $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(M)$, aber $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Koass}(M_i)$ für alle $i \in I$, so folgt für jede koendliche Teilmenge J von I aus $M = \left(\bigoplus_{i\in I\setminus J} M_i\right) \oplus \left(\bigoplus_{i\in J} M_i\right)$ sogar $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}\left(\bigoplus_{i\in J} M_i\right)$.

(ii → i) Sei im ersten Schritt R zusätzlich ein lokaler Integritätsring und $\mathfrak{p} = 0$. Wäre $0 \notin \mathrm{Koass}(M)$, d.h. $M^\circ \cong \prod_{i\in I}(M_i^\circ)$ ein Torsionsmodul, wären erst recht alle M_i° Torsionsmoduln, und nach [3, Corollary 5.6] gäbe es eine koendliche Teilmenge J von I mit $\mathrm{Ann}_R\left(\prod_{i\in J}(M_i^\circ)\right) \neq 0$. Es folgte $0 \notin \mathrm{Koass}(M_i)$ für alle $i \in I$ und $\mathrm{Ann}_R\left(\bigoplus_{i\in J} M_i\right) \neq 0$ entgegen der Voraussetzung. Sei im zweiten Schritt R nur lokal und $\mathfrak{p}$ wie in (ii) verlangt. Wäre $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Koass}(M)$, d.h. $0 \notin \mathrm{Koass}_{R/\mathfrak{p}}(M/\mathfrak{p}M)$, folgte nach dem ersten Schritt $0 \notin \mathrm{Koass}_{R/\mathfrak{p}}(M_i/\mathfrak{p}M_i)$ für alle $i \in I$ und $\mathrm{Ann}_{R/\mathfrak{p}}\left(\coprod_{i\in J}(M_i/\mathfrak{p}M_i)\right) \neq 0$ für eine koendliche Teilmenge J von I. Aber $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Koass}(M_i)$ für alle $i \in I$ und $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Att}\left(\bigoplus_{i\in J} M_i\right)$ widerspricht der Voraussetzung.

Für jede Familie $(M_i \mid i \in I)$ von R-Moduln und jedes Primideal $\mathfrak{p}$ ist offenbar $\mathrm{Ann}_R((\prod M_i) \otimes_R R/\mathfrak{p}) = \mathrm{Ann}_R((\coprod M_i) \otimes_R R/\mathfrak{p})$, und deshalb $\mathrm{Att}(\prod M_i) = \mathrm{Att}(\coprod M_i)$. Mit Hilfe des Lemmas läßt sich das auf $\mathrm{Koass}(M)$ übertragen:

Satz 2.6. *Ist R lokal und $(M_i \mid i \in I)$ eine Familie von R-Moduln, so gilt* $\mathrm{Koas}(\prod M_i) = \mathrm{Koass}(\coprod M_i)$.

Beweis. Weil die direkte Summe ein reiner Untermodul des direkten Produktes ist, gilt $\mathrm{Koass}(\coprod M_i) \subset \mathrm{Koass}(\prod M_i)$ (siehe [8], Lemma 2.1). Ist umgekehrt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(\prod M_i)$ und $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Koass}(M_i)$ für alle $i \in I$ (sonst fertig), folgt für jede koendliche Teilmenge J von I aus $\prod_{i\in I} M_i = \left(\prod_{i\in I\setminus J} M_i\right) \times \left(\prod_{i\in J} M_i\right)$, daß $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}\left(\prod_{i\in J} M_i\right) \subset \mathrm{Att}\left(\coprod_{i\in J} M_i\right)$ ist, also nach dem Lemma $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(\coprod M_i)$.

BEMERKUNG 1. Ein Spezialfall des Satzes lautet: Ist R lokal, so gilt Koass $(M^{(\mathbb{N})}) = \operatorname{Att}(M)$ für jeden R-Modul M. Ist R nicht lokal, kann aber Koass $(M^{(\mathbb{N})}) \subsetneqq \operatorname{Att}(M)$ sein (so daß auch (ii $\to$ i) in (2.5) nicht mehr gilt): Sind $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \ldots$ paarweise verschiedene maximale Ideale von R, so daß $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}_i = \mathfrak{p}$ ein Primideal ist, folgt für $M = \coprod_{i=1}^{\infty} R/\mathfrak{m}_i$, daß $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Koass}(M^{(\mathbb{N})}) = \{\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots\}$ ist, aber $\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}(M)$.

BEMERKUNG 2. Über beliebigem R kann für gewisse Moduln M dennoch Koass $(M^{(\mathbb{N})}) = \operatorname{Att}(M)$ sein. Ist etwa M endlich erzeugt oder flach, gilt für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}(M)$ sogar $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M/\mathfrak{p}M)$, und weil dann $(M/\mathfrak{p}M)^{(\mathbb{N})}$ einen freien $R/\mathfrak{p}$-Untermodul von unendlichem Rang hat, hat es auch einen teilbaren $R/\mathfrak{p}$-Faktormodul $\neq 0$, so daß $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M^{(\mathbb{N})})$ folgt. Wir haben gezeigt: Ist M endlich erzeugt oder flach, so gilt $\operatorname{Koass}(M^{(\mathbb{N})}) = \operatorname{Att}(M)$.

Die Eigenschaft "$\operatorname{Koass}(M) = \operatorname{Att}(M)$" vererbt sich nicht auf direkte Summanden, denn nach (2.4) gilt stets $\operatorname{Koass}(M^{\mathbb{N}}) = \operatorname{Att}(M^{\mathbb{N}})$. Umgekehrt läßt sich aber mit (2.5) im lokalen Fall für jede direkte Zerlegung $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ zeigen: Gilt $\operatorname{Koass}(M_i) = \operatorname{Att}(M_i)$ für alle $i \in I$, so folgt $\operatorname{Koass}(M) = \operatorname{Att}(M)$. Das ist nämlich ein Spezialfall der

FOLGERUNG 2.7. *Ist R lokal, $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}(M)$ und $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Att}(M_i)$ für alle $i \in I$, so folgt bereits $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M)$.*

BEWEIS. Ist $\mathfrak{p}$ wie angegeben, folgt für jede koendliche Teilmenge J von I aus $M = \left(\bigoplus_{i \in I \setminus J} M_i\right) \oplus \left(\bigoplus_{i \in J} M_i\right)$, daß $\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}\left(\bigoplus_{i \in J} M_i\right)$ ist, also nach (2.5) $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M)$.

BEISPIEL 5. Ist R lokal und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots$ eine Folge von Idealen $\neq R$, so gilt

$$\operatorname{Koass}\left(\coprod_{i=1}^{\infty} R/\mathfrak{a}_i\right) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid \bigcap_{i=n}^{\infty} (\mathfrak{p} + \mathfrak{a}_i) = \mathfrak{p} \text{ für alle } n \geqq 1\}.$$

BEWEIS. Ein Spezialfall von (2.5) lautet: Ist R lokal, $M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} M_i$ und $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Koass}(M_i)$ für alle i, so ist $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M)$ äquivalent mit $\bigcap_{i=n}^{\infty} \operatorname{Ann}_R(M_i/\mathfrak{p}M_i) = \mathfrak{p}$ für alle $n \geqq 1$. Für $M_i = R/\mathfrak{a}_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ und $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ ist das die Behauptung, und $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ liegt sowohl in $\{\ \}$ als auch in Koass $(\coprod R/\mathfrak{a}_i)$.

BEISPIEL 6. Ist R lokal, $(\mathfrak{p}_i \mid i \in I)$ eine Familie von Primidealen und $M = \coprod_{i \in I} E[\mathfrak{p}_i]$, so gilt

$$\operatorname{Koass}(M) = \operatorname{Att}(M) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} = \bigcap_{i \in I'} \mathfrak{p}_i \text{ für eine Teilmenge } I' \text{ von } I\}.$$

BEWEIS. Weil M direkte Summe von artinschen Moduln ist, gilt nach (2.7) $\operatorname{Koass}(M) = \operatorname{Att}(M)$. Weil für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ und jedes Primideal $\mathfrak{p}$ bekanntlich $E[\mathfrak{p}] \otimes_R R/\mathfrak{a} \cong ((R/\mathfrak{p})[\mathfrak{a}])^\circ$ ist, also

$$\operatorname{Ann}_R(E[\mathfrak{p}] \otimes_R R/\mathfrak{a}) = \begin{cases} \mathfrak{p} & \text{falls } \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \\ R & \phantom{\text{falls }} \mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p} \end{cases},$$

folgt mit unseren $\mathfrak{p}_i$ und $I_\mathfrak{a} = \{i \in I \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_i\}$ sofort $\operatorname{Ann}_R(M/\mathfrak{a}M) = \bigcap_{i \in I_\mathfrak{a}} \mathfrak{p}_i$. Damit ist $\operatorname{Att}(M) \subset \{\ \}$ klar, und bei der Umkehrung, d.h. $\mathfrak{p} = \bigcap_{i \in I'} \mathfrak{p}_i$, wird $M' = \coprod_{i \in I'} E[\mathfrak{p}_i]$ ein direkter Summand von M mit $\operatorname{Ann}_R(M') = \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}(M)$.

Sogar für jeden halbartinschen Modul M gilt über einem lokalen Ring Koass $(M) = \operatorname{Att}(M)$. Zum Beweis dieses Satzes brauchen wir als Hilfsmittel:

LEMMA 2.8. *Sei $(R, \mathfrak{m})$ lokal und vollständig, M ein R-Modul.*

(a) *Ist* $\operatorname{Ann}_R(M) \subset \mathfrak{m}^e$ *für ein* $e \geqq 1$, *so gibt es einen endlich erzeugten Untermodul U von M mit* $\operatorname{Ann}_R(U) \subset \mathfrak{m}^e$.

(b) *Ist* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}(M)$, *so gibt es einen irreduziblen Faktormodul M/B mit* $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(M/B)$.

BEWEIS. (a) Nach (2.2) gibt es endlich erzeugte Untermoduln $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \ldots$ von M mit $\operatorname{Ann}_R(M) = \operatorname{Ann}_R\left(\sum_{i=1}^{\infty} U_i\right)$, so daß $\operatorname{Ann}_R(U_1) \supset \operatorname{Ann}_R(U_2) \supset \ldots$ eine absteigende Folge von Idealen wird mit $\bigcap_{i=1}^{\infty} \operatorname{Ann}_R(U_i) \subset \mathfrak{m}^e$. Das Theorem von Chevalley (siehe [2] chap. III, §2, Prop. 8) liefert ein $n \geqq 1$ mit $\operatorname{Ann}_R(U_n) \subset \mathfrak{m}^e$ wie gewünscht.

(b) Durch Übergang zu $R/\mathfrak{p}$ genügt es offenbar zu zeigen: Ist R ein lokaler, vollständiger Integritätsring und M ein treuer R-Modul, so hat M einen irreduziblen treuen Faktormodul.

1. *Schritt.* M hat einen treuen Faktormodul von endlicher Goldie-Dimension. Andernfalls wähle man einen zyklischen Untermodul $U_1 \neq 0$ von M, dazu in der Menge $\{V \subset M \mid U_1 \cap V = 0\}$ ein maximales Element V_1, und weil dann M/V_1 endlichdimensional sowie $\mathrm{Ann}_R(M/V_1) \cap \mathrm{Ann}_R(V_1) = 0$ ist, muß nach Annahme $\mathrm{Ann}_R(V_1) = 0$ sein. Nach (a) gibt es einen endlich erzeugten Untermodul U_2 von V_1 mit $\mathrm{Ann}_R(U_2) \subset \mathfrak{m}^2$, und für ein maximales Element V_2 in der Menge $\{V \subset M \mid (U_1 + U_2) \cap V = 0\}$ folgt wieder nach Annahme $\mathrm{Ann}_R(V_2) = 0$. Induktiv erhält man so endlich erzeugte Untermoduln $U_1, U_2, U_3, \ldots$ von M mit $(U_1 + \ldots + U_{m-1}) \cap U_m = 0$ und $\mathrm{Ann}_R(U_m) \subset \mathfrak{m}^m$ für alle $m \geqq 2$. Es folgt $\bigcap_{i=n}^{\infty} \mathrm{Ann}_R(U_i) = 0$ für alle $n \geqq 1$, nach (2.5) also $0 \in \mathrm{Koass}\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} U_i\right)$, insbesondere $0 \in \mathrm{Koass}(M)$. Entgegen der Annahme besitzt also M sogar einen artinschen treuen Faktormodul.

2. *Schritt.* Sei jetzt M/B ein endlichdimensionaler treuer Faktormodul von M. Dann gibt es Untermoduln $B_1, \ldots, B_k$ von M mit $B = \bigcap_{j=1}^{k} B_j$, alle M/B_j irreduzibel. Offenbar ist dann auch $\prod_{j=1}^{k} M/B_j$ treu, also schon ein M/B_{j_0} treu wie gewünscht.

Satz 2.9. *Ist R lokal und M ein halbartinscher R-Modul, so gilt* $\mathrm{Koass}(M) = \mathrm{Att}(M)$.

Beweis durch Zurückführung auf den vollständigen Fall und (2.8, b), denn mit den dortigen Bezeichnungen ist dann M/B irreduzibel und halbartinsch, also artinsch.

1. *Schritt.* Für jeden halbartinschen R-Modul M ist

$\mathrm{Koass}(M) = \{\mathscr{P} \cap R \mid \mathscr{P} \in \mathrm{Koass}_{\hat{R}}(M)\}$. Hierin ist M mit der natürlichen $\hat{R}$-Struktur $\{r_n\} \cdot x = r_e x$ versehen ($r_{n+1} - r_n \in \mathfrak{m}^n$ für alle n, $x \in M\,[\mathfrak{m}^e]$), und weil dabei die R-Untermoduln mit den $\hat{R}$-Untermoduln übereinstimmen, folgt für jedes $\mathscr{P} \in \mathrm{Koass}_{\hat{R}}(M)$ sofort $\mathscr{P} \cap R \in \mathrm{Koass}(M)$. Umgekehrt kann man jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(M)$ in der Form $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(M/B)$ schreiben, so daß M/B artinsch und zusätzlich unzerlegbar ist (d.h. die Summe von zwei echten Untermoduln wieder echt ist): Mit $\mathrm{Koass}_{\hat{R}}(M/B) = \{\mathscr{P}\}$ folgt dann $\mathscr{P} \cap R \in \mathrm{Koass}(M/B) = \{\mathfrak{p}\}$, also $\mathfrak{p} = \mathscr{P} \cap R$ wie verlangt. (Für artinsche Moduln wurde diese Formel in ([5] Lemma 2.1) gezeigt).

2. *Schritt.* Sei nun M halbartinsch und $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}(M)$. Wir können $\mathfrak{p} = 0$ annehmen und müssen dann zeigen, daß M einen treuen, artinschen Faktormodul hat. Sind $\mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_n$ die minimalen Primdivisoren von $\mathrm{Ann}_{\hat{R}}(M)$ in $\hat{R}$, folgt aus $\mathscr{P}_i \in \mathrm{Att}_{\hat{R}}(M)$ nach (2.8,b) sogar $\mathscr{P}_i \in \mathrm{Koass}_{\hat{R}}(M)$, so daß die $\mathfrak{p}_i = \mathscr{P}_i \cap R$ ($1 \leqq i \leqq n$) nach dem ersten Schritt eine finale Teilmenge von $\mathrm{Koass}(M)$ bilden. Nach

(1.2) ist aber $\bigcap \mathrm{Koass}(M) = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M)}$, d.h. $\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_n = 0$, und damit $0 \in \mathrm{Koass}(M)$ wie behauptet.

BEMERKUNG. Ist R nicht lokal und M halbartinsch, kann sogar $\bigcap \mathrm{Koass}(M) \neq \bigcap \mathrm{Att}(M)$ sein (siehe das Beispiel nach (1.6)). Aber folgende Verallgemeinerung erhält man leicht aus dem Satz: Ist R beliebig, M halbartinsch und $\mathrm{Ass}(M)$ endlich, so gilt $\mathrm{Koass}(M) = \mathrm{Att}(M)$.

3. Wann hat Koass (M) eine endliche finale Teilmenge?

Die Bedingung $\mathrm{Koass}(M) = \mathrm{Att}(M)$ aus dem letzten Abschnitt ist offenbar hinreichend: Ist $M \neq 0$ und sind $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ die minimalen Primdivisoren von $\mathrm{Ann}_R(M)$, so ist $\{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n\}$ eine finale Teilmenge von $\mathrm{Koass}(M)$. Aber die angeführte Bedingung ist nicht notwendig: Bei einem endlich erzeugten Modul M hat $\mathrm{Koass}(M)$ genau dann eine endliche finale Teilmenge, wenn der Ring $R/\mathrm{Ann}_R(M)$ semilokal ist, und dabei kann $\mathrm{Koass}(M) \neq \mathrm{Att}(M)$ sein (siehe Beispiel 1 in Abschnitt 2). Das Hauptergebnis (3.2) liefert über lokalen Ringen ein hinreichendes Kriterium für die Existenz einer endlichen finalen Teilmenge von $\mathrm{Koass}(M)$, während die beiden anschließenden Propositionen das Problem auf den vollständigen Fall bzw. das Matlis-Duale M° über einem lokalen Integritätsring zurückführen.

LEMMA 3.1. *Betrachten wir für einen R-Modul $M \neq 0$ folgende Bedingungen:*
(a) $\mathrm{Koass}(M) = \mathrm{Att}(M)$.
(b) $\mathfrak{p} = \bigcap \mathfrak{p}_\lambda$ *und alle* $\mathfrak{p}_\lambda \in \mathrm{Koass}(M) \Rightarrow \mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(M)$.
(c) *Jeder minimale Primdivisor von* $\bigcap \mathrm{Koass}(M)$ *gehört zu* $\mathrm{Koass}(M)$.
(d) $\mathrm{Koass}(M)$ *besitzt eine endliche finale Teilmenge.*
Dann gelten die Implikationen a $\to$ b $\to$ c $\leftrightarrow$ d.

BEWEIS. (a $\to$ b) Allgemeiner gilt für jeden R-Modul N: $\mathfrak{p} = \bigcap \mathfrak{p}_\lambda$ und alle $\mathfrak{p}_\lambda \in \mathrm{Att}(N) \Rightarrow \mathfrak{p} \in \mathrm{Att}(N)$.

(b $\to$ c) Allgemeiner gilt für jede nichtleere Teilmenge Y von $\mathrm{Spec}(R)$: Ist $\mathfrak{q}$ ein minimaler Primdivisor von $\bigcap Y$, so gibt es eine Teilmenge Y' von Y mit $\mathfrak{q} = \bigcap Y'$.

Zum Beweis definiere man den R-Modul $N = \coprod_{\mathfrak{p} \in Y} R/\mathfrak{p}$, und weil dann $\mathfrak{q}$ minimal über $\bigcap Y = \mathrm{Ann}_R(N)$ ist, gibt es (siehe [10] p. 592) einen Untermodul V von N mit $\mathfrak{q} = \mathrm{Ann}_R(V)$. Mit $Y' = \{\mathfrak{p} \in Y \mid \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}\}$ folgt

$$\mathfrak{q} = \mathrm{Ann}_R(N[\mathfrak{q}]) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} \mathrm{Ann}_R((R/\mathfrak{p})[\mathfrak{q}]) = \bigcap Y'.$$

(c $\to$ d) Sind $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ die minimalen Primdivisoren von $\bigcap \mathrm{Koass}(M)$, so ist $\{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n\}$ eine endliche finale Teilmenge von $\mathrm{Koass}(M)$ wie gewünscht.

(d → c) Ist $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m\}$ eine finale Teilmenge von Koass (M), so gilt für jeden minimalen Primdivisor $\mathfrak{q}$ von $\bigcap$ Koass $(M) = \bigcap_{i=1}^{m} \mathfrak{p}_i$, daß $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_j$ ist für ein j, also $\mathfrak{q} \in$ Koass (M).

BEMERKUNG. Erfüllen alle Faktormoduln $\neq 0$ von M die Bedingung (d), so gilt auch (b): Aus $\mathfrak{p} = \bigcap \mathfrak{p}_\lambda$, alle $\mathfrak{p}_\lambda \in$ Koass (M), folgt nämlich $\mathfrak{p} = \bigcap$ Koass $(M/\mathfrak{p}M)$, mit einer finalen Teilmenge $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k\}$ von Koass $(M/\mathfrak{p}M)$ also $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_j$ für ein j, $\mathfrak{p} \in$ Koass (M).

SATZ 3.2. *Ist R lokal und sind in $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ alle* Koass (M_i) *endlich, so hat* Koass (M) *eine endliche finale Teilmenge.*

BEWEIS. Zeigen wir Punkt (b) des Lemmas, und sei dazu im *1. Schritt* $\mathfrak{p} = 0$, d.h. R ein lokaler Integritätsring und $\bigcap$ Koass $(M) = 0$. Wäre $0 \notin$ Koass (M), d.h. $M^\circ \cong \prod_{i \in I} (M_i^\circ)$ ein Torsionsmodul, gäbe es nach [3, Corollary 5.6] eine koendliche Teilmenge J von I mit $\operatorname{Ann}_R\left(\prod_{i \in J} M_i^\circ\right) \neq 0$. Mit $A = \bigoplus_{i \in I \setminus J} M_i$ und $B = \bigoplus_{i \in J} M_i$ folgt $M = A \oplus B$ und $rB = 0$ für ein $r \neq 0$, und nach Voraussetzung ist Koass (A) endlich. Wäre $\bigcap$ Koass $(A) \neq 0$, folgte mit $0 \neq s \in \bigcap$ Koass (A) auch $0 \neq r\, s \in \bigcap$ Koass (M) entgegen der Annahme. Also ist $\bigcap$ Koass $(A) = 0$, $0 \in$ Koass (A), und $0 \in$ Koass (M) ist der gewünschte Widerspruch.
Sei im *2. Schritt* nur $\mathfrak{p} = \bigcap \mathfrak{p}_\lambda$, alle $\mathfrak{p}_\lambda \in$ Koass (M). Aus $\mathfrak{p} = \bigcap$ Koass $(M/\mathfrak{p}\, M)$ folgt $\bigcap \operatorname{Koass}_{R/\mathfrak{p}} (M/\mathfrak{p}\, M) = 0$, und weil alle $M_i/\mathfrak{p}\, M_i$ auch als $R/\mathfrak{p}$-Moduln nur endlich viele koassoziierte Primideale haben, gilt nach dem ersten Schritt $0 \in \operatorname{Koass}_{R/\mathfrak{p}} (M/\mathfrak{p}\, M)$, d.h. $\mathfrak{p} \in$ Koass (M).

Das Problem, ob Koass (M) über einem lokalen Ring R stets eine endliche finale Teilmenge hat, läßt sich im folgenden Sinn auf die Vervollständigung $\hat{R}$ zurückführen: Hat $\operatorname{Koass}_{\hat{R}} (\hat{R} \otimes_R M)$ eine endliche finale Teilmenge, so auch Koass (M). Das folgt unmittelbar aus der

PROPOSITION 3.3. *Ist R lokal und M ein R-Modul, so gilt*

$$\operatorname{Koass}(M) = \{\mathscr{P} \cap R \mid \mathscr{P} \in \operatorname{Koass}_{\hat{R}} (\hat{R} \otimes_R M)\}.$$

BEWEIS. Ist $\mathfrak{p} \in$ Koass (M), also $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R (M/B)$ und M/B artinsch, zeigten wir im ersten Beweisschritt von (2.9), daß $\mathfrak{p} = \mathscr{P} \cap R$ ist mit $\mathscr{P} \in \operatorname{Koass}_{\hat{R}} (M/B)$, und weil ${}_{\hat{R}}(M/B) \cong \hat{R} \otimes_R M/B$ epimorphes Bild von $\hat{R} \otimes_R M$ ist, folgt $\mathscr{P} \in \operatorname{Koass}_{\hat{R}}$

$(\hat{R} \underset{R}{\otimes} M)$. Umgekehrt gibt es zu jedem $\mathscr{P} \in \mathrm{Koass}_{\hat{R}}(\hat{R} \underset{R}{\otimes} M) = \mathrm{Ass}_{\hat{R}}(\mathrm{Hom}_{\hat{R}}(\hat{R} \underset{R}{\otimes} M, E)) = \mathrm{Ass}_{\hat{R}}(M^\circ)$ ein $f \in M^\circ$ mit $\mathscr{P} = \mathrm{Ann}_{\hat{R}}(f)$, so daß $\mathscr{P} \cap R = \mathrm{Ann}_R(f)$ ist, also $\mathscr{P} \cap R \in \mathrm{Ass}(M^\circ) = \mathrm{Koass}(M)$.

Andererseits hängt die Frage, wann $\mathrm{Koass}(M)$ eine endliche finale Teilmenge hat, eng mit dem Problem zusammen, wann über einen *lokalen Integritätsring* R das Matlis-Duale M° ein Torsionsmodul ist. (Es ist leicht zu sehen, daß letzteres äquivalent damit ist, daß jeder teilbare Faktormodul von M verschwindet, oder auch damit, daß jeder artinsche Faktormodul von M beschränkt ist). Ist nämlich M° ein Torsionsmodul und hat zusätzlich $\mathrm{Koass}(M)$ eine endliche finale Teilmenge, gibt es nach (1.2) ein $0 \neq r \in R$, so daß rM endlich erzeugt ist. Falls also M und M° Torsionsmoduln sind, muß – unter derselben Zusatzbedingung an $\mathrm{Koass}(M)$ – M bereits beschränkt sein. Im folgenden Sinn ist diese Zusatzbedingung sogar notwendig:

PROPOSITION 3.4. *Für einen lokalen Ring R sind äquivalent:*

(i) *Für jeden Integritätsring A, der epimorphes Bild von R ist, gilt: Ist X ein A-Modul, so daß X und X° Torsionsmoduln sind, so ist X bereits beschränkt.*
(ii) *Für jeden R-Modul M hat* $\mathrm{Koass}(M)$ *eine endliche finale Teilmenge.*

BEWEIS. (i → ii) Nach (3.1) ist zu zeigen, daß aus $\mathfrak{p} = \bigcap \mathfrak{p}_\lambda$, alle $\mathfrak{p}_\lambda \in \mathrm{Koass}(M)$, folgt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(M)$. Die erste Gleichung bedeutet über dem Faktorring $A = R/\mathfrak{p}$ für den A-Modul $\bar{M} = M/\mathfrak{p}M$, daß $\bigcap \mathrm{Koass}_A(\bar{M}) = 0$ ist. Angenommen $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Koass}(M)$, so ist $0 \notin \mathrm{Koass}_A(\bar{M})$, d.h. $(\bar{M})^\circ$ ein Torsionsmodul. Wählt man einen freien A-Untermodul F von $\bar{M}$, so daß $X = \bar{M}/F$ torsionsvoll ist, sind auch F° und X° Torsionsmoduln. Das erste bedeutet, daß F keine teilbaren Faktormoduln hat, also endlich erzeugt ist, das zweite nach Voraussetzung, daß X beschränkt ist, d.h. $a\bar{M} \subset F$ für ein $0 \neq a \in A$. Weil $\mathrm{Koass}_A(\bar{M})$ nicht nur aus dem maximalen Ideal besteht, folgt $\bigcap \mathrm{Koass}_A(\bar{M}) = \bigcap \mathrm{Koass}_A(\bar{M}/a\bar{M}) \neq 0$, und das ist unmöglich.

(ii → i) Sind A und X wie angegeben, hat auch $\mathrm{Koass}_A(X)$ eine endliche finale Teilmenge, so daß nach den Vorbemerkungen X beschränkt sein muß.

4. Die koassoziierten Primideale des R-Moduls R_S.

Ist R ein (wie stets noetherscher) Integritätsring und S eine multiplikative Teilmenge von $R \setminus \{0\}$, so ist $M = R_S$ ein flacher R-Modul, also nach Beispiel 2 oben

$$\mathrm{Att}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

Die maximalen Elemente von $\mathrm{Att}(M)$ gehören natürlich (bei jedem R-Modul) zu $\mathrm{Koass}(M)$, aber es kann noch weitere Elemente in $\mathrm{Koass}(M)$ geben. Deren

Bestimmung führt auf die Frage, wann der R-Modul $M = R_S$ im Quotientenkörper K von R klein ist (d.h. aus $W + M = K$ stets folgt $W = K$). Für den Fall, daß R_S semilokal ist, können wir das in (4.3) entscheiden und damit auch $\operatorname{Koass}(R_S)$ in (4.5) berechnen.

In den beiden folgenden Hilfssätzen sei A ein Integritätsring, für den keine Kettenbedingungen vorausgesetzt werden, und K sein Quotientenkörper. Da die Beweise völlig elementar sind, überlassen sie wir dem Leser.

HILFSSATZ 4.1. *Seien S_1, S_2 zwei multiplikative Teilmengen von $A \setminus \{0\}$ und sei $S = S_1 \cap S_2$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es ist $A_{S_1} + A_{S_2}$ ein Unterring von K und $A_{S_1} \cap A_{S_2} = A_S$.*
(ii) *Ist $\mathfrak{q}$ ein Primideal von A mit $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$, so folgt $\mathfrak{q} \cap S_1 = \emptyset$ oder $\mathfrak{q} \cap S_2 = \emptyset$.*
(iii) *Je zwei $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$ erzeugen im Ring A_S das Einheitsideal.*

HILFSSATZ 4.2. *Seien S_1, S_2 zwei multiplikative Teilmengen von $A \setminus \{0\}$, so daß die Ringe A_{S_1} und A_{S_2} semilokal sind. Dann gilt:*

(a) *$A_{S_1} + A_{S_2}$ ist ein Unterring von K.*
(b) *Genau dann ist $A_{S_1} + A_{S_2} = K$, wenn jedes Primideal $\neq 0$ von A entweder S_1 oder S_2 trifft.*

BEMERKUNG. Ist einer der beiden Ringe A_{S_1}, A_{S_2} nicht semilokal, braucht (4.2, a) nicht mehr zu gelten. Ist z.B. $x \in A$ ein Primelement, so daß der Ring $A/(x)$ nicht lokal ist, gilt für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ mit $x \in \mathfrak{p}$, daß $A_{\mathfrak{p}} + A_x$ kein Unterring von K ist.

LEMMA 4.3. *Sei R ein Integritätsring mit Quotientenkörper K und sei S eine multiplikative Teilmenge von $R \setminus \{0\}$, so daß R_S semilokal ist. Falls dann R_S als R-Modul klein in K ist, folgt bereits $R = R_S$.*

BEWEIS. Es ist zu zeigen, daß jedes $x \in S$ Einheit ist. Wäre $(x) \neq R$, folgte für einen minimalen Primdivisor $\mathfrak{p}$ von (x) nach dem Krull'schen Hauptidealsatz $h(\mathfrak{p}) = 1$, so daß jedes Primideal $\neq 0$ entweder $R \setminus \mathfrak{p}$ oder S trifft. Nach (4.2, b) ist dann $R_{\mathfrak{p}} + R_S = K$, wegen der Kleinheit also $R_{\mathfrak{p}} = K$, und das ist unmöglich.

FOLGERUNG 4.4. *Sei R ein Integritätsring, N ein torsionsfreier R-Modul und M ein kleiner Untermodul von N, so daß M radikalvoll und* $\operatorname{Koass}(M)$ *endlich ist. Dann folgt bereits $M = 0$.*

BEWEIS. Die injektive Hülle von N hat die Form $K^{(I)}$, und wäre $M \neq 0$, gäbe es eine Projektion $K^{(I)} \xrightarrow{\pi} K$ mit $\pi(M) \neq 0$. Wir können also gleich $R \subset M$ und M klein in K annehmen (und müssen das zum Widerspruch führen). Mit $S = R \setminus \bigcup \operatorname{Koass}(M)$ ist $R_S \subset M$, also nach dem Lemma $R = R_S$. Das bedeutet

$\mathfrak{m} \cap S = \emptyset$ für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$, d.h. $\Omega \subset \mathrm{Koass}(M)$. Andererseits war M radikalvoll, also $\Omega \cap \mathrm{Koass}(M) = \emptyset$, und beides zusammen ist unmöglich.

SATZ 4.5. *Sei R ein Integritätsring und S eine multiplikative Teilmenge von $R \setminus \{0\}$, so daß R_S semilokal ist. Dann gilt*

$$\mathrm{Koass}(R_S) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset, \text{ und falls } \mathfrak{p} \notin \Omega, \text{ gibt es ein } \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}_o \in \Omega \text{ mit } \mathfrak{m}_o \cap S \neq \emptyset\}.$$

BEWEIS. "$\subset$" Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R gilt: Ist $\mathfrak{m} \cap S = \emptyset$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$, so folgt $R + \mathfrak{a} R_S = R_S$ (denn jedes $s \in S$ ist im Ring $\bar{R} = R/\mathfrak{a}$ invertierbar, und mit $\bar{r}\bar{s} = 1$, d.h. $1 - rs \in \mathfrak{a}$, wird $r + (1 - rs)/s = 1/s$ die gewünschte Zerlegung). Ist daher $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(R_S)$ kein maximales Ideal, muß $R + \mathfrak{p} R_S \neq R_S$ sein, also $\mathfrak{m}_o \cap S \neq \emptyset$ für ein $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}_o \in \Omega$.

"$\supset$" Sei $\mathfrak{p} \in \{\ \}$. Falls $\mathfrak{p} \in \Omega$, folgt aus $R_S/\mathfrak{p} R_S \neq 0$ sofort $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(R_S)$. Falls $\mathfrak{p} \notin \Omega$, folgt aus der Voraussetzung, daß im Integritätsring $\bar{R} = R/\mathfrak{p}$ das maximale Ideal $\bar{\mathfrak{m}}_o$ die multiplikative Teilmenge $\bar{S} = \{\bar{s} \mid s \in S\}$ trifft, also $\bar{S}$ nicht nur aus Einheiten besteht, d.h. $\bar{R} \subsetneqq \bar{R}_{\bar{S}}$ ist. Weil der Ring $\bar{R}_{\bar{S}} \cong R_S/\mathfrak{p} R_S$ semilokal ist, kann $\bar{R}_{\bar{S}}$ nach (4.3) nicht klein im Quotientenkörper von $\bar{R}$ sein, hat also einen teilbaren Faktormodul $\neq 0$, und das heißt $0 \in \mathrm{Koass}_{\bar{R}}(\bar{R}_{\bar{S}})$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(R_S)$ wie gewünscht.

Für spezielle multiplikative Teilmengen S läßt sich $\mathrm{Koass}(R_S)$ noch expliziter angeben. Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal $\neq R$, so daß nur endlich viele maximale Ideale über $\mathfrak{a}$ liegen, folgt mit $S = 1 + \mathfrak{a}$, daß R_S semilokal ist, und ein Primideal $\mathfrak{p}$ trifft genau dann S, wenn $\mathfrak{p} + \mathfrak{a} = R$ ist. Nach dem Satz ist daher

$$\mathrm{Koass}(R_S) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} + \mathfrak{a} \neq R, \text{ und falls } \mathfrak{p} \notin \Omega, \text{ ist } (\mathfrak{p} + \mathfrak{a})/\mathfrak{p} \text{ nicht klein in } R/\mathfrak{p}\}.$$

Speziell bei $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$ ist $R_S = R_{\mathfrak{m}}$, und man erhält:

FOLGERUNG 4.6. *Ist R ein Integritätsring und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal, so gilt*

$$\mathrm{Koass}(R_{\mathfrak{m}}) = \{\mathfrak{m}\} \cup \{\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{m} \mid R/\mathfrak{p} \textit{ ist nicht lokal}\}.$$

Auch dann wird die Berechnung von $\mathrm{Koass}(R_S)$ in (4.5) einfach, wenn der R-Modul R_S radikalvoll ist. Jedes $\mathfrak{m} \in \Omega$ trifft dann S, so daß in diesem Fall

$$\mathrm{Koass}(R_S) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} = \mathrm{Att}(R_S)$$

ist. Speziell bei $S = R \setminus \mathfrak{q}$, $\mathfrak{q} \notin \Omega$ erhält man:

FOLGERUNG 4.7. *Ist R ein Integritätsring und $\mathfrak{q}$ ein Primideal, aber kein maximales Ideal, so gilt* $\mathrm{Koass}(R_{\mathfrak{q}}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}\}$.

LITERATUR

1. H. Bass, *Descending chains and the Krull ordinal of commutative noetherian rings*, J. pure appl. Algebra 1 (1971), 347–360.
2. N. Bourbaki, Algèbre Commutative, Hermann, Paris, 1967.
3. K. R. Goodearl – B. Zimmermann Huisgen, *Boundedness of direct products of torsion modules*, J. pure appl. Algebra 39 (1986), 251–273.
4. I. G. MacDonald, *Secondary representation of modules over a commutative ring*, Sympos. Math. 11 (1973), 23–43.
5. R. Y. Sharp, *On the attached prime ideals of certain artinian local cohomology modules*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 24 (1981), 9–14.
6. B. Stenström, *Rings of Quotients*, Springer, Berlin, 1975.
7. H. Zöschinger, *Koatomare Moduln*, Math. Z. 170 (1980), 221–232.
8. H. Zöschinger, *Linear-kompakte Moduln über noetherschen Ringen*, Arch. Math. 41 (1983), 121–130.
9. H. Zöschinger, *Minimax-Moduln*, J. Algebra 102 (1986), 1–32.
10. H. Zöschinger, *Summen von einfach-radikalvollen Moduln*, Math. Z. 194 (1987) 585–601.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
8 MÜNCHEN 2
THERESIENSTR. 39
W. GERMANY