MATH. SCAND. 68 (1991), 46–52

SOUS-ESPACES COMPLÉMENTÉS ISOMORPHES À c_0 DANS LES PRODUITS TENSORIELS DE SAPHAR

EVE OJA

Résumé.

Soient X et Y deux espaces de Banach de dimension infinie. Supposons que X ait une décomposition de dimension finie "boundedly complete" et $1 \leqq p < \infty$; si l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite: a) $X \otimes_{\varepsilon_p} Y$ contient un sous-espace complémenté isomorphe à c_0 et X^* ou Y^* possède la propriété d'approximation métrique, b) $X \otimes_{g_p} Y$ contient un sous-espace complémenté isomorphe à c_0, alors Ycontient un sous-espace complémenté isomorphe à c_0. Ce résultat ne s'étend pas au cas de normes $\varepsilon_\infty = \varepsilon$ et g_∞. Car si X a une décomposition incondionnelle de dimension finie et $X \otimes_\alpha Y$, où $\alpha = \varepsilon_\infty$ ou $\alpha = g_\infty$, contient un sous-espace isomorphe à c_0 alors $X \otimes_\alpha Y$ contient un sous-espace complémenté isomorphe à c_0.

1. Introduction et résultats principaux.

Soient X et Y deux espaces de Banach de dimension infinie et α une norme tensorielle sur $X \otimes Y$. L'espace $X \otimes Y$ muni de α est noté $(X \otimes Y, \alpha)$, son complété est noté $X \otimes_\alpha Y$. Nous considérons les produits tensoriels $X \otimes_{g_p} Y$ et $X \otimes_{\varepsilon_p} Y$, $1 \leqq p \leqq \infty$, *où* g_p et ε_p (notée $g_p\backslash$ dans [8]) sont les normes tensorielles étudiées par P. Saphar dans [8] et [9]. Rappelons que $g_1 = \pi$ et $\varepsilon_\infty = \varepsilon$ où π et ε sont respectivement la norme projective et la norme inductive.

Une condition suffisante pour que $X \otimes_{\varepsilon_\infty} Y = X \otimes_\varepsilon Y$ contienne un sous-espace complémenté isomorphe à c_0 est établie dans [7] par E. et P. Saab.

THÉORÈME 1 (cf. [7]). *Si Y a un sous-espace isomorphe à c_0 alors $X \otimes_{\varepsilon_\infty} Y$ a un sous-espace complémenté isomorphe à c_0.*

REMARQUE 1. Le théorème 1 est vrai aussi pour la norme g_∞. Il se démontre de la même façon que le théorème 1 dans [7].

Si X ou Y a un sous-espace isomorphe à c_0 alors $X \otimes_{\varepsilon_\infty} Y$ et $X \otimes_{g_\infty} Y$ ont un sous-espace isomorphe à c_0. En même temps, par exemple, $l_2 \otimes_{\varepsilon_\infty} l_2$ a un sous-espace isomorphe à c_0 malgré le fait que l_2 ne contient aucun sous-espace isomorphe à c_0.

Dans le cas où X possède une décomposition de dimension finie (D.D.F.)

Received March 19,1990.

inconditionnelle nous établirons l'amélioration suivante du théorème 1 et de la remarque 1.

THÉORÈME 2. *Supposons que X possède une* D.D.F. *inconditionnelle. Si $X \otimes_\alpha Y$, où $\alpha = \varepsilon_\infty$ ou $\alpha = g_\infty$, a un sous-espace isomorphe à c_0 alors $X \otimes_\alpha Y$ a un sous-espace complémenté isomorphe à c_0.*

Les théorèmes 1 et 2 et la remarque 1 sont précis en ce sens qu'ils ne s'étendent pas au cas de normes ε_p et g_p, *où* $1 \leqq p < \infty$. En effet soit $\alpha = \varepsilon_p$ ou $\alpha = g_p$, $1 \leqq p < \infty$. Alors $l_2 \otimes_\alpha l_\infty$ a un sous-espace isomorphe à c_0. Mais $l_2 \otimes_\alpha l_\infty$ ne contient aucun sous-espace complémenté isomorphe à c_0 ce qui est évident d'après le théorème suivant qui est le résultat principal de cette note.

THÉORÈME 3. *Supposons que X possède une* D.D.F. *"boundedly complete" et $1 \leqq p < \infty$. Si l'une des deux hypothèses suivantes est satisfaite:* a) *$X \otimes_{\varepsilon_p} Y$ contient un sous-espace complémenté isomorphe à c_0 et X^* ou Y^* possède la propriété d'approximation métrique,* b) *$X \otimes_{g_p} Y$ contient un sous-espace complémenté isomorphe à c_0, alors Y contient un sous-espace complémenté isomorphe à c_0.*

REMARQUE 2. L'hypothèse que la D.D.F. de X soit "boundedly complete" est essentielle dans le théorème 3. Or, par exemple, si $X = L_1[0, 1]$ alors $X \otimes_{g_1} l_\infty$ a un sous-espace complémenté isomorphe à c_0 (cf. [1]).

La démonstration des théorèmes 2 et 3 repose sur le fait que les produits tensoriels considérés ont une "bonne" décomposition de Schauder. Remarquons que dans [3] nous avons utilisé le même fait pour étudier la réflexivité et d'autres propriétés des produits tensoriels. Par rapport aux problèmes étudiés dans [3], le problème des sous-espaces complémentés isomorphes à c_0 semble être beaucoup plus compliqué.

2. Décompositions de Schauder et reproductibilité de c_0.

Une décomposition de Schauder d'un espace de Banach X est une suite $(p_k) = (p_k)_{k \geq 1}$ de projections non nulles, continues de X qui satisfait aux conditions: $p_k p_l = 0$ si $k \neq l$ et pour tout $x \in X$ la série $\sum_{k=1}^\infty p_k x$ converge vers x. Si la convergence est inconditionnelle pour tout $x \in X$ alors on dit que la décomposition de Schauder (p_k) est inconditionnelle et si $\dim \operatorname{Im} p_k < \infty$ pour tout $k = 1, 2, \ldots$ alors on dit que (p_k) est une D.D.F. Une décomposition de Schauder (p_k) de X est dite "boundedly complete" si pour toute suite bornée $(\sum_{k=1}^n x_k)_{n \geq 1}$, $x_k \in \operatorname{Im} p_k$, la série $\sum_{k=1}^\infty x_k$ est convergente. Et (p_k) est dite "shrinking" si (p_k^*) est une décomposition de Schauder pour le dual X^* de X.

Pour démontrer les théorèmes 2 et 3 nous aurons besoin respectivement des théorèmes 4 et 5 sur les décompositions de Schauder dont le théorème 4 découle immédiatement du lemme 1 et du théorème 2 de [5].

THÉORÈME 4. *Soit* (p_k) *une décomposition de Schauder inconditionnelle de* X *telle que* $\operatorname{Im} p_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *ne contient aucun sous-espace isomorphe à* c_0. *Si* X *a un sous-espace isomorphe à* c_0 *alors* X *a un sous-espace complémenté isomorphe à* c_0.

Si (p_k) est une décomposition de Schauder de X alors $(p_k^*|_H)$ est une décomposition de Schauder de

$$H = H(X) = \{f \in X^* : \lim_{n\to\infty} \|\textstyle\sum_{k=1}^n p_k^* f - f\| = 0\},$$

où H est muni de la norme induite par X^*. Avec cette notation, nous avons le

THÉORÈME 5. *Soit* (p_k) *une décomposition de Schauder de* X *telle que* $\operatorname{Im} p_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *ne contient aucun sous-espace complémenté isomorphe à* c_0. *Si* $(p_k^*|_H)$ *est "shrinking" alors* X *ne contient aucun sous-espace complémenté isomorphe à* c_0.

DÉMONSTRATION. Supposons que X contienne un sous-espace complémenté isomorphe à c_0. Soit P une projection continue de X sur ce sous-espace. Alors $P = TS$, où $S: X \to c_0$ est une surjection linéaire continue, T est un isomorphisme de c_0 dans X et ST est l'identité sur c_0. Soient $(e_i) \subset c_0$ et $(\varphi_i) \subset c_0^* = l_1$ les bases canoniques. Alors $(f_i) = (S^*\varphi_i)$ est une suite-base dans $\operatorname{Im} P^*$, équivalente à (φ_i). Notons $P_n = \sum_{k=1}^n p_k$ et considérons une sous-suite quelconque (f_{j_i}) de (f_i). Elle est équivalente à (φ_i) et, puisque $\operatorname{Im} P_n$, $n = 1, 2, \ldots$, ne contient aucun sous-espace complémenté isomorphe à c_0, elle vérifie la condition

$$\forall \varepsilon > 0, \forall m, \forall n, \exists g \in L(\{f_{j_i} : i \geqq m\}), \|g\| = 1, \|P^* P_n^* g\| < \varepsilon, \tag{1}$$

où $L(E)$ désigne le sous-espace vectoriel engendré par un sous-ensemble E.

En effet, si la condition (1) n'était pas satisfaite, on pourrait montrer qu'il existerait m et n tels que $T^* P_n^* S^* U_m^*$ soit un isomorphisme de c_0^* dans c_0^*, où $U_m: c_0 \to c_0$ est défini par $U_m(a_1, a_2, \ldots) = (a_{j_m}, a_{j_{m+1}}, \ldots)$. Posons $A = U_m S P_n T$. Comme A^* est un isomorphisme de c_0^* dans c_0^*, il existe un réel $a > 0$ tel que

$$2a \leqq \|A^* \varphi_j\|, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Soit

$$Ae_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} e_j, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Comme $\lim_j a_{ij} = 0$, $i = 1, 2, \ldots$, alors

$$\forall \delta > 0, \forall m, \forall n, \exists j > m, \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| < \delta.$$

Ceci nous permet de construire par récurrance deux suites d'entiers $1 \leqq m_1 < m_2 < \ldots$ et $1 = n_1 < n_2 < \ldots$ telles que

$$\|A^* \varphi_{m_k}/v_k - u_k^*\| < \delta/2^k, \tag{2}$$

où

$$u_k^* = \frac{1}{v_k} \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_{im_k}\varphi_i, \quad v_k = \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} |a_{im_k}|,$$

et

$$a \leqq v_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Comme (u_k^*) est une suite-base normalisée de (φ_i), elle est équivalente à (φ_i). Donc, pour δ suffisamment petit (en effet, il suffit de fixer $\delta < 1/2$ (cf. [2], p. 5)), (2) entraîne l'équivalence de $(A^*\varphi_{m_k}/v_k)$ à (φ_i). Choisissons $u_k \in L(\{e_{n_k+1}, \ldots, e_{n_{k+1}}\})$, $\|u_k\| = u_k^*(u_k) = 1$. L'équivalence de (u_k) à (e_i) et la condition (3) permettent nous de considérer l'application linéaire continue B: $c_0 \to c_0$,

$$Bx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(A^*\varphi_{m_k})(x)}{v_k} u_k, \qquad x \in c_0.$$

En utilisant l'équivalence de $(A^*\varphi_{m_k}/v_k)$ à (φ_i) nous obtenons que

$$B^*f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(u_k)}{v_k} A^*\varphi_{m_k}, \quad f \in c_0^*. \tag{4}$$

Soit I l'identité sur c_0. Comme

$$u_k^*(Bx) = (A^*\varphi_{m_k})(x)/v_k, \qquad x \in c_0,\ k = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

ce qui se vérifie immédiatement, nous avons

$$\|B(I - B)x\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} u_k^*(Bx)u_k - \sum_{k=1}^{\infty} (A^*\varphi_{m_k})(Bx)u_k/v_k \right\| \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k^* - A^*\varphi_{m_k}/v_k\| \, \|Bx\| \leqq \delta \, \|Bx\|, \qquad x \in c_0,$$

d'où

$$\|B(I - B)^k\| \leqq \delta^k \, \|B\|, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

La dernière condition nous permet d'introduire

$$C = \sum_{k=0}^{\infty} B(I - B)^k.$$

Donc

$$C^* = \sum_{k=0}^{\infty} (I^* - B^*)^k B^*. \tag{6}$$

Puisque l'image Im A^* est fermée, nous avons d'après (6) et (4) les inclusions

$$\operatorname{Im} C^* \subset [A^*\varphi_{m_k}] \subset \operatorname{Im} A^*, \tag{7}$$

où $[x_k]$ désigne le sous-espace fermé engendré par $x_1, x_2, \ldots$.

En utilisant (7) et l'égalité $\operatorname{Im} A = c_0$ (qui découle du fait que l'application A^* est isomorphique) nous pouvons vérifier que l'opérateur

$$D(A^*)_g^{-1}C^*\colon c_0^* \to [e_{m_k}]^*,$$

où $D\colon [\varphi_{m_k}] \to [e_{m_k}]^*$ est l'application canonique définie par $(Dg)(y) = g(y)$, $y \in [e_{m_k}]$, est bien défini et continu pour les topologies $*$-faibles. Il existe donc un opérateur $G\colon [e_{m_k}] \to c_0$ tel que $G^* = D(A^*)_g^{-1}C^*$.

Soit U la projection canonique de $c_0 = [e_i]$ sur $[e_{m_k}]$ (c.-à-d. $Ue_i = 0$ si $i \notin \{m_1, m_2, \ldots\}$, $Ue_{m_1} = e_{m_1}$, $Ue_{m_2} = e_{m_2}, \ldots$). Comme U^*D est l'identité sur $[\varphi_{m_k}]$ et $BC = B$, nous avons d'après (5)

$$(G^*A^*U^*)(D\varphi_{m_k}) = D(A^*)_g^{-1}C^*A^*\varphi_{m_k} =$$
$$= v_k D(A^*)_g^{-1}B^*u_k^* = D(A^*)_g^{-1}A^*\varphi_{m_k} = D\varphi_{m_k},$$

d'où découle immédiatement que $G^*A^*U^*$ est l'identité sur $[e_{m_k}]^*$ et par conséquent UAG est l'identité sur $[e_{m_k}]$.

Notons B_n l'opérateur P_n considéré comme opérateur de X dans $\operatorname{Im} P_n$ et I_n l'injection canonique de $\operatorname{Im} P_n$ dans X (c.-à-d. $P_n = I_n B_n$). L'identité UAG se présente sous la forme RQ,

$$[e_{m_k}] \xrightarrow{\ Q\ } \operatorname{Im} P_n \xrightarrow{\ R\ } [e_{m_k}],$$

où $Q = B_n TG$ et $R = UU_m SI_n$. Par conséquent $\operatorname{Im} Q$ est isomorphe à c_0 et QR est une projection de $\operatorname{Im} P_n$ sur $\operatorname{Im} Q$. L'espace $\operatorname{Im} P_n$ aurait donc un sous-espace complémenté isomorphe à c_0. Cette contradiction achève la démonstration de la condition (1).

Comme $\lim_n P_n Te_i = Te_i$, $i = 1, 2, \ldots$, nous pouvons choisir des entiers $N(1) < N(2) < \ldots$ tels que

$$\lim_j (P_{N(j)}Te_j - Te_j) = 0.$$

Posons $z_j = T^*P_{N(j)}^* f_j$. Il existe donc un indice j_0 tel que $\inf_{j \geqq j_0} \|z_j\| > 0$ et $\sup_{j \geqq j_0} \|z_j\| < \infty$. Et puisque $\lim_j z_j(e_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$, il existe une sous-suite (z_{j_i}) de (z_j) équivalente à (φ_i) (cf. [2], p. 7). Posons $g_i = P_{N(j_i)}^* f_{j_i}$. En utilisant l'équivalence des suites $(P^*g_i) = (S^*z_{j_i})$ et (f_{j_i}) à (φ_i), de la condition (1) découle

$$\text{(8)}\qquad \exists \gamma > 0,\ \forall n,\ \exists M,\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall m \geqq M,$$
$$\exists h \in L(\{g_i : i \geqq m\}),\ \|h\| \leqq \gamma,\ \|P^*h\| = 1,\ \|P^*P_n^*h\| < \varepsilon.$$

En effet, il existe deux réels $\alpha, \beta > 0$ tels que pour tout entier v et toute famille $a_1, \ldots, a_v$ de scalaires

$$\left\| \sum_{i=1}^{v} a_i P^* g_i \right\| \geqq \alpha \left\| \sum_{i=1}^{v} a_i f_{j_i} \right\| \geqq \beta \sum_{i=1}^{v} |a_i|.$$

Posons $\gamma = \sup_n \|P_n\| \, \|S\|/\beta$. Pour n choisissons M tel que $N(j_M) \geqq n$. D'après (1), pour $\varepsilon > 0$, $m \geqq M$ et n nous pouvons choisir

$$g = \sum_{i=m}^{\nu} a_i f_{j_i} \in L(\{f_{j_i}: i \geqq m\}),\ \|g\| = 1,\ \|P^* P_n^* g\| < \varepsilon\alpha.$$

Posons

$$f = \sum_{i=m}^{\nu} a_i g_i.$$

Il est alors élémentaire de vérifier que $h = f/\|P^* f\|$ satisfait aux conditions voulues.

D'après (8), nous pouvons construire par récurrence pour tout $\varepsilon > 0$ une suite $(h_i) = (h_i)_{i \geqq 1} \subset L(\{g_i: i \geqq 1\})$ et une suite d'entiers $M_0 = 1 < M_1 < \ldots$ telles que $(P^* h_i)$ soit une suite-base bloc normalisée de $(P^* g_i)$ et

$$\|h_i\| \leqq \gamma,\ \|P^*(P_{M_i}^* - P_{M_{i-1}}^*)h_i - P^* h_i\| < \varepsilon/2^i, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

En effet, supposons $M_0 = 1 < M_1 < \ldots < M_k$ et $h_0 = 0, h_1, \ldots, h_k$ construits et montrons que nous pouvons poursuivre. Nous avons $h_k \in L(\{g_i: 1 \leqq i < \kappa\})$ pour un indice κ. En substituant n à M_k dans (8) nous choisissons M et posons $m = \max\{\kappa, M\}$. Il existe alors $h_{k+1} \in L(\{g_i: m \leqq i \leqq \nu\})$, $\|h_{k+1}\| \leqq \gamma$, $\|P^* h_{k+1}\| = 1$, $\|P^* P_{M_k}^* h_{k+1}\| < \varepsilon/2^{k+1}$. Posons $M_{k+1} = \max\{M_k + 1, N(j_\nu)\}$. Puisque $g_i = P_{N(j_i)}^* f_{j_i}$, nous concluons que

$$\|P^*(P_{M_{k+1}}^* - P_{M_k}^*)h_{k+1} - P^* h_{k+1}\| = \|P^* P_{M_k}^* h_{k+1}\| < \varepsilon/2^{k+1}.$$

Donc, pour ε suffisamment petit, la suite $(P^*(P_{M_i}^* - P_{M_{i-1}}^*)h_i)$ est équivalente à (φ_i) et, par conséquent, $((P_{M_i}^* - P_{M_{i-1}}^*)h_i)$ est aussi équivalente à la base canonique (φ_i) de l_1. Il reste à appliquer le lemme 3 de [5] pour conclure que $(p_k^*|_H)$ ne peut pas être "shrinking".

3. Démonstration des théorèmes 2 et 3.

Soit (π_k) une D.D.F. de X et I l'identité sur Y. Pour $k = 1, 2, \ldots$ notons p_k le prolongement continu de

$$\pi_k \otimes I: X \otimes Y \to X \otimes_\alpha Y$$

à $X \otimes_\alpha Y$, où $X \otimes Y$ est muni de la norme $\alpha = \varepsilon_p$ ou $\alpha = g_p$, $1 \leqq p \leqq \infty$. Il est immédiat que (p_k) est une décomposition de Schauder de $X \otimes_\alpha Y$, (p_k) est inconditionnelle si (π_k) est inconditionnelle, et $\operatorname{Im} p_k$ est isomorphe à $Y^{\dim \operatorname{Im} \pi_k}$. On définit symétriquement une décomposition de Schauder de $Y \otimes_\alpha X$.

Vu la décomposition de Schauder (p_k) de $X \otimes_\alpha Y$, la

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. Consiste dans l'application du théorème 1 et de la remarque 1 si Y a un sous-espace isomorphe à c_0, et du théorème 4 dans le cas contraire.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3. Supposons que Y ne contienne aucun sous-espace complémenté isomorphe à c_0. Alors Im p_k, $k = 1, 2, \ldots$, n'a aucun sous-espace complémenté isomorphe à c_0, où (p_k) est la décomposition de Schauder de $X \otimes_\alpha Y$ (où $\alpha = \varepsilon_p$ ou $\alpha = g_p$, $1 \leqq p < \infty$) qui correspond à la D.D.F. (π_k) de X. D'après le théorème 5, pour établir le résultat, il suffit de montrer que $(p_k^*|_H)$, où $H = H(X \otimes_\alpha Y)$, est "shrinking".

Comme (π_k) est "boundedly complete", X est canoniquement isomorphe à G^*, où $G = H(X)$, et $(\pi_k^*|_G)$ est "shrinking" (cf. [10], p. 526, 527). Considérons $Y^* \otimes_{\alpha^*} G$, où $\alpha^* = g_{p'}$ si $\alpha = \varepsilon_p$, $\alpha^* = \varepsilon_{p'}$ si $\alpha = g_p$ et $1/p + 1/p' = 1$ avec la convention $p' = \infty$ si $p = 1$. Soit (q_k) la décomposition de Schauder de $Y^* \otimes_{\alpha^*} G$ définie par $(\pi_k^*|_G)$. Suivant la démonstration du lemme 4, a), de [4], on obtient que (q_k) est "shrinking". Il reste donc a vérifier (ce qui est immédiat d'après l'interprétation de $(X \otimes_\alpha Y)^*$ donnée dans [8] et des relations entre des classes d'opérateurs établies dans [6]) que H est canoniquement isomorphe à $Y^* \otimes_{\alpha^*} G$ et par cet isomorphisme $p_k^*|_H$ s'identifie à q_k.

BIBLIOGRAPHIE

1. G. Emmanuele, *On complemented copies of c_0 in L_X^p, $1 \leqq p < \infty$*, Proc. Amer. Math. Soc. 104 (1988), 785–786.
2. J. Lindenstrauss et L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces* I, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.
3. E. Oja, *Sur la réflexivité des produits tensoriels et les sous-espaces des produits tensoriels projectifs*, Math. Scand. 51 (1982), 275–288.
4. E. Oja, *Subspaces and quotient-spaces isomorphic to l_p in tensor products and spaces of operators*, Math. Notes 39 (1986), 46–52.
5. E. Oja, *Properties that can be inherited by spaces with Schauder decompositions*, (Russian, English and Estonian summaries) Eesti NSV Tead. Akad. Toimetised, Füüs.-Mat. 37 (1988), 6–13.
6. A. Persson et A. Pietsch, *p-Nukleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen*, Studia Math. 33 (1969), 19–62.
7. E. Saab et P. Saab, *On complemented copies of c_0 in injective tensor products*, Contemp. Math. 52 (1986), 131–135.
8. P. Saphar, *Produits tensoriels d'espaces de Banach et classes d'applications linéaires*, Studia Math. 38 (1970), 71–100.
9. P. Saphar, *Hypothèse d'approximation à l'ordre p dans les espaces de Banach et approximation d'applications p absolument sommantes*, Israel J. Math. 13 (1972), 379–399.
10. I. Singer, *Bases in Banach spaces* II, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1981.

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE TARTU
46, VANEMUISE
202400 TARTU
ESTONIE