MATH. SCAND. 68 (1991), 221–246

INDICE D'ESPERANCES CONDITIONNELLES ET ALGEBRES DE VON NEUMANN FINIES

PAUL JOLISSAINT(*)

Introduction.

L'étude de l'indice d'un sous-facteur d'un facteur de type II_1 par V. Jones [9] a entraîné plusieurs généralisations de la notion d'indice dans différents contextes ([1], [4], [8], [10], [11], [12], [15]): les auteurs de [4] ont défini l'indice d'une paire de sommes finies de facteurs finis à l'aide de traces de Markov et cette approche a été étendue au cas des paires d'algèbres finies de genre dénombrable dans [8]. D'autre part, le rôle important de l'espérance conditionnelle naturelle d'un facteur fini sur un sous-facteur a amené M. Pimsner et S. Popa à introduire la notion d'indice faible d'une espérance conditionnelle ([12] et [1]), ceci afin d'étudier les valeurs possibles de l'indices de paires irréductibles de facteurs hyperfinis.

Dans [1], M. Baillet, Y. Denizeau et J.-F. Havet distinguent trois niveaux de finitude de l'indice d'une espérance conditionnelle E d'une algèbre de von Neumann M sur une sous-algèbre de von Neumann N de M:

- E est faiblement d'indice fini si l'application $E - \lambda i_M$ est positive pour un nombre $\lambda > 0$; cela généralise la situation de [12];
- E est d'indice fini si $E - \lambda i_M$ est complètement positive pour un nombre $\lambda > 0$; cela étend au cas des algèbres à centres arbitraires la situation envisagée par H. Kosaki [10] (cf, [1], 3.8);
- enfin, E est fortement d'indice fini si M admet une base orthonormale finie par rapport à E en tant que N-module à droite.

Les auteurs de [1] montrent également que ces trois notions coïncident dans de nombreux cas, notamment lorsque M et N sont des sommes finies de facteurs semifinis ou lorsque M est à prédual séparable et N est proprement infinie.

Le présent article est issu de la comparaison des indices de [1] et de l'indice de [8] pour les paires d'algèbres finies. Avant d'en décrire les trois parties, nous fixons les notations que nous allons utiliser et nous rappelons quelques gén-

(*) Avec le soutien du Fonds national suisse de la recherche scientifique, requête no 21-26162.89
Reçu Avril 18, 1990.

éralités sur les espérances conditionnelles: On considère une algèbre de von Neumann M et une sous-algèbre de von Neumann N de M ayant la même unité que M. On note $E(M,N)$ l'ensemble des espérances conditionnelles normales fidèles de M sur N et on dit que N est *espérée* dans M si $E(M,N)$ est non vide.

Le *centralisateur* d'un élément E de $E(M,N)$ est la sous-algèbre de von Neumann M_E de M formée des éléments x de M qui satisfont: $E(xy) = E(yx)$ pour tout y dans M. par la remarque 3.7 de [2], le centre $Z(N^c)$ du commutant relatif N^c de N dans M est contenu dans M_E qui est contenu dans N^c. On dit enfin que E est une *application bécarre* si $M_E = N^c$.

La section 1 est consacrée aux rappels de quelques résultats de [1], à quelques compléments sur l'indice d'une espérance conditionnelle, ainsi qu'à la généralisation des théorèmes 2.9 de [6], 1 de [7] et 5.5 de [11, I] concernant l'existence d'espérances d'indice minimal:

THÉORÈME A. *S'il existe une espérance conditionnelle d'indice fini de M sur N alors il existe une espérance E_0 qui est une application bécarre et d'indice minimal.*

On se restreint dans la section 2 au cas où la sous-algèbre N est finie. Le but est d'établir le lien entre l'indice de N dans M au sens de [8] et les notions d'indice fini d'espérances conditionnelles de [1]:

THÉORÈME B. (1) *Supposons qu'il existe une espérance conditionnelle de M sur N fortement d'indice fini. Alors M est finie et N est d'indice fini dans M.*

(2) *Si M est finie et N d'indice fini dans M, alors une espérance conditionnelle de M sur N est faiblement d'indice fini si et seulement si elle est fortement d'indice fini.*

Le résultat principal de la section 2 est toutefois la réciproque de l'assertion (1) du théorème précédent: on détermine une famille d'espérances conditionnelles qui sont (fortement) d'indice fini si M est finie et N d'indice fini dans M. Pour cela, introduisons l'algèbre intermédiaire P engendrée par N et son commutant relatif N^c dans M. Si N est d'indice fini dans M alors N est d'indice fini dans P qui est d'indice fini dans M. Par suite, si (ρ, H_ρ) est une représentation finie de P (cf section 2), le commutant $\rho(N)'$ de $\rho(N)$ dans $B(H_\rho)$ est fini et la trace centrale canonique $T_{\rho(N)'}$ sur $\rho(N)'$ est par restriction à N^c un élément de $E(N^c, Z(N))$. En vertu du théorème 5.3 de [2] elle se prolonge de manière unique en une espérance de M sur N notée E_N^ρ. Notons en particulier E'_N l'espérance correspondant à la trace sur le commutant de N dans la représentation standard de M. On a:

THÉORÈME C. *Pour toute représentation finie ρ de P, l'espérance E_N^ρ est (fortement) d'indice fini. En particulier,* $\operatorname{Ind}(E'_N) = D_N^M(1)$, *où D_N^M est l'application de $Z(M)$ dans lui-même qui détermine l'indice de N dans M* ([8], définition 2.4).

Enfin, on compare dans la dernière section les notions d'indices et d'indice faible d'une espérance conditionnelle pour des paires d'algères finies à centres atomiques:

THÉORÈME D. *Supposons que le centre de M ou celui de N soit atomique et que M et N sont finies. Si E est une espérance conditionnelle faiblement d'indice fini de M sur N, alors E est d'indice fini.*

La preuve du théorème D repose également sur l'introduction de l'algèbre intermédiaire P engendrée par N et N^c, ainsi que sur la notion d'inclusion matricielle introduite dans [13].

Nous terminons l'article en montrant l'existence d'une espérance conditionnelle d'indice fini mais pas fortement d'indice fini.

REMERCIEMENTS. Je tiens à remercier vivement Madame C. Anantharaman et ses collègues pour leurs remarques et leur acceuil chaleureux durant mon séjour à Orléans.

1. Indice d'une espérance conditionnelle; indice minimal.

On considère une algèbre de von Neumann M et une sous-algèbre de von Neumann N de M ayant la même unité que M. On suppose que N est de genre dénombrable et espérée dans M. On associe alors à toute espérance conditionnelle E de M sur N les nombres $\lambda(E)$ et $\lambda_\infty(E)$ définis ainsi ([1] et [12]):

$$\lambda(E) \quad = \max\{\lambda \geqq 0; E - \lambda i_M \text{ est positive}\},$$

$$\lambda_\infty(E) = \max\{\lambda \geqq 0; E - \lambda i_M \text{ est complètement positive}\},$$

où i_M désigne l'application identité sur M. Suivant [1], on dit que E est *faiblement d'indice fini* (resp. *d'indice fini*) si $\lambda(E) > 0$ (resp. $\lambda_\infty(E) > 0$).

D'après la proposition 3.3 de [1], E est faiblement d'indice fini si et seulement si M est un N-module autodual pour le produit scalaire: $\langle x, y\rangle_E = E(x^*y)$. On le note X_E. Si c'est le cas, X_E admet une base orthonormale $(m_i)_{i\in I}$ par rapport à N: $\langle m_i, m_j\rangle_E = \delta_{ij}p_i$ pour tous i, j où p_i est une projection de N, et tout élément x de M s'écrit de façon unique:

$$x = \sum_{i\in I} m_i E(m_i^* x),$$

où la série converge ultrafaiblement.

D'après le théorème 3.5 de [1], E est d'indice fini si et seulement si la série $\sum m_i m_i^*$ converge ultrafaiblement, et cela équivaut également à l'existence d'un (unique) poids opératoriel normal fini fidèle F_E de $L_N(X_E)$ sur M tel que $F_E(\theta_{x,y}) = xy^*$ pour tous x et y dans M, où $\theta_{x,y} = x\langle y, \cdot\rangle_E$. Si c'est le cas, *l'indice* de E est l'élément $\operatorname{Ind}(E) = \sum m_i m_i^*$ qui appartient au centre $Z(M)$ de M. De plus,

$$\|\mathrm{Ind}(E)\| = \lambda_\infty(E)^{-1}.$$

On introduit également les notations suivantes:

$$[E]_w = \lambda(E)^{-1} \text{ et } [E] = \lambda_\infty(E)^{-1}.$$

On désigne par *indice faible* de E le coefficient $[E]_w$. Enfin, E est *fortement d'indice fini* si le N-module X_E admet une base orthonormale de cardinalité finie.

Notons aussi F_∞ le facteur de type I_∞ à prédual séparable et i_∞ l'application identité sur F_∞.

LEMME 1.1. *Si E appartient à $E(M, N)$, alors E est d'indice fini si et seulement si l'espérance conditionnelle $E \otimes i_\infty$ de $M \otimes F_\infty$ sur $N \otimes F_\infty$ est faiblement d'indice fini. Si c'est le cas, on a:*

$$[E] = [E \otimes i_\infty]_w.$$

PREUVE. Soit $\lambda > 0$ fixé. Si $E \otimes i_\infty - \lambda i_M \otimes i_\infty$ est positive, alors en particulier $E \otimes i_n - \lambda i_M \otimes i_n$ est positive pour tout entier positif n, où i_n désigne l'application identité sur le facteur de type I_n. $E - \lambda i_M$ est donc complètement positive. Réciproquement, si $E - \lambda i_M$ est complètement positive, elle se prolonge de manière unique en une application positive sur $M \otimes F_\infty$, qui est égale à $E \otimes i_\infty - \lambda i_M \otimes i_\infty$.

Le lemme précédent permet d'étendre la proposition 3.22 de [1] au cas des algèbres de genre dénombrable:

PROPOSITION 1.2. *Supposons N proprement infinie. Si E est une espérance conditionnelle faiblement d'indice fini de M sur N, alors E est fortement d'indice fini et il existe a dans M tel que $E(a^*a) = 1$ et $x = aE(a^*x)$ pour tout x dans M. De plus,*

$$[E] = [E]_w.$$

PREUVE. Notons K_∞ l'espace de Hilbert séparable de dimension infinie et soient $(\varepsilon_i)_{i \geq 1}$ une base orthonormale de K_∞ et (e_{ij}) le système d'unités matricielles de $F_\infty = B(K_\infty)$ associé à $(\varepsilon_i)_{i \geq 1}$.
Par hypothèse, il existe une suite de projections $(e_i)_{i \geq 1}$ dans N deux à deux orthogonales, de somme 1 et telles que $e_i \sim 1$ pour tout i. Choisissons des isométries partielles u et $(v_i)_{i \geq 1}$ de N telles que $u^*u = 1$, $uu^* = e_1 = v_i^*v_i$ et $v_iv_i^* = e_i$ pour tout i. Supposons que M agisse sur l'espace de Hilbert H et définissons une isométrie surjective v de $e_1H \otimes K_\infty$ sur H par:

$$v \sum_{i \geq 1} \xi_i \otimes \varepsilon_i = \sum_{i \geq 1} v_i \xi_i.$$

Alors vxv^* appartient à M (resp. à N) si x appartient à $e_1Me_1 \otimes F_\infty$ (resp.

à $e_1Ne_1 \otimes F_\infty$). Posons $\theta(x) = vu \otimes 1_\infty xu^* \otimes 1_\infty v^*$ pour tout x dans $M \otimes F_\infty$. Ainsi θ est un isomorphisme de $M \otimes F_\infty$ sur M tel que $\theta(N \otimes F_\infty) = N$. On vérifie comme dans la preuve de la proposition IV.1.8 de [14] que

$$v(uau^* \otimes e_{ij})v^* = v_i uau^* v_j^*$$

pour tout a dans M et tous i, j. On obtient donc pour a dans M:

$$\begin{aligned}\theta^{-1}E\theta(a \otimes e_{ij}) &= \theta^{-1}E(v_i uau^* v_j^*) \\ &= \theta^{-1}(v_i uE(a)u^* v_j^*) \quad \text{car } v_i, v_j, u \in N \\ &= E(a) \otimes e_{ij},\end{aligned}$$

ce qui démontre que $\theta^{-1}E\theta = E \otimes i_\infty$.

En vertu du lemme 1.1, E est d'indice fini et il existe un poids opératoriel normal fini fidèle F_E de $L_N(X_E)$ sur M, ce qui implique que $L_N(X_E)$ est de genre dénombrable. La fin de la preuve de la proposition 3.22 de [1] s'applique alors sans changement.

Le résultat suivant est une variante de la proposition 3.14 de [1]:

PROPOSITION 1.3. *Soient $1 \in N \subset P \subset M$ des algèbres de von Neumann et F, G des éléments de $E(P, N)$, $E(M, P)$ respectivement. Posons $E = FG \in E(M, N)$.*

(1) *Pour que E soit faiblement d'indice fini il faut et il suffit que F et G le soient. Si c'est le cas, on a:*

$$\max([F]_w, [G]_w) \leqq [E]_w \leqq [F]_w[G]_w.$$

(2) *Pour que E soit d'indice fini, il faut et il suffit que F et G le soient. Dans ce cas, on a:*

$$\max([F], [G]) \leqq [E] \leqq [F][G].$$

PREUVE. Quitte à remplacer F et G par $F \otimes i_\infty$ et $G \otimes i_\infty$ respectivement il suffit, compte tenu du lemme 1.1, de démontrer (1).

Comme $F = E \mid P$, on a banalement: $\lambda(E) \leqq \lambda(F)$. Fixons ensuite x dans M. Alors

$$E(x^*x) = FG(x^*x) \geqq \lambda(F)G(x^*x) \geqq \lambda(F)\lambda(G)x^*x,$$

ce qui prouve que $\lambda(F)\lambda(G) \leqq \lambda(E)$.

Enfin, posons pour tout entier positif k:

$$b_k = (G(x^*x) + 1/k)^{-1/2} \text{ et } x_k = xb_k.$$

Puisque $G(x_k^* x_k) = G(x^*x)(G(x^*x) + 1/k)^{-1} \leqq 1$, on obtient:

$$\lambda(E)x^*x = b_k^{-1}\lambda(E)x_k^* x_k b_k^{-1} \leqq b_k^{-1}E(x_k^* x_k)b_k^{-1} = b_k^{-1}FG(x_k^* x_k)b_k^{-1}$$

$$\leqq b_k^{-2} = G(x^*x) + 1/k \text{ pour tout } k,$$

et ainsi $\lambda(E) \leqq \lambda(G)$.

Avant de démontrer le résultat principal de cette section, qui est l'existence d'une espérance conditionnelle d'indice minimal, rappelons encore quelques faits tirés de [1] et de [10].

Si E appartient à $E(M,N)$ et si f est une projection non nulle du commutant relatif N^c de N dans M, on désigne par E_f l'élément de $E(fMf, Nf)$ défini par:

$$E_f(fxf) = a(E,f)fE(fxf),$$

où $a(E,f)$ désigne l'inverse de $E(f)f$ dans $Z(N)f$. On a $[E_f]_w \leqq [E]_w$ et si E est d'indice fini, alors E_f l'est également et $[E_f] \leqq \|E(f)\|\,[E]$ ([1], 3.9).

Pour tout état normal ϕ sur N et tout élément E de $E(M,N)$, on pose $\phi_E = \phi \circ E$. Désignons par $(L^2(M), J, L^2(M)_+)$ la forme standard de M et soit Ω_E le vecteur de $L^2(M)_+$ qui satisfait:

$$\phi_E(x) = \langle x\Omega_E, \Omega_E \rangle, \quad x \in M.$$

Notons $e = e^N_{\Omega_E}$ la projection orthogonale sur le sous-espace fermé $[N\Omega_E]$ de $L^2(M)$, et $\langle M, e\rangle$ l'algèbre de von Neumann engendrée par M et e dans $B(L^2(M))$. On rappelle le lemme 3.2 de [10]:

LEMME 1.4. *Avec les notations ci-dessus, on a:*

(1) *$exe = E(x)e$ pour tout $x \in M$;*

(2) *si x appartient à M alors x appartient à N si et seulement si $[e,x] = 0$;*

(3) *$JeJ = e$ et $\langle M, e\rangle = JN'J$;*

(4) *le support central de e dans $\langle M, e\rangle$ est égal à 1;*

(5) *l'application $y \mapsto ye$ est un isomorphisme de N sur $e\langle M, e\rangle e$;*

(6) *le sous-espace MeM engendré par les éléments de la forme xey, avec x et y dans M, est une sous-*-algèbre fortement dense dans $\langle M, e\rangle$.*

PROPOSITION 1.5. *Supposons que E soit faiblement d'indice fini.*

(1) *Il existe une unique application linéaire bornée Φ_E de $\langle M, e\rangle$ sur M telle que*

$$\Phi_E(x)e = xe \text{ pour tout } x \text{ dans } \langle M, e\rangle.$$

(2) *Il existe un unique isomorphisme ρ_E de $L_N(X_E)$ sur $\langle M, e\rangle$ tel que*

$$\rho_E(\theta_{x,y}) = xey^* \text{ pour tous } x, y \text{ dans } M.$$

(3) *E est d'indice fini si et seulement s'il existe un poids opératoriel normal fini fidèle F_E de $\langle M, e\rangle$ sur M tel que $F_E(e) = 1$. Si ces conditions sont remplies, F_E est unique et*

$$F_E(1) = \sum_{i \in I} m_i m_i^*$$

pour toute base orthonormale (m_i) de X_E.

PREUVE. (1) Posons $B_E = \{x \in M; E(x^*x) \leqq 1\}$. En vertu de la proposition 3.3 de [1], B_E est ultrafaiblement compact. Si x est dans MeM, l'existence et l'unicité de $\Phi_E(x)$ est immédiate (cf [12], preuve du lemme 1.2). De plus,

$$ex^*xe = (xe)^*xe = e\Phi_E(x)^*\Phi_E(x)e = E(\Phi_E(x)^*\Phi_E(x))e,$$

et en vertu du lemme 1.4(5),

$$(*) \qquad \|E(\Phi_E(x)^*\Phi_E(x))\| = \|ex^*xe\| \leqq \|x\|^2,$$

pour tout x dans MeM. En utilisant le théorème de densité de Kaplansky et le fait que B_E est ultrafaiblement compact, on montre l'existence de $\Phi_E(x)$ pour tout x dans $\langle M, e\rangle$. L'inégalité (*) nous assure la continuité de Φ_E.

(2) Pour T dans $L_N(X_E)$ et x dans M on pose:

$$\rho_E(T)x\Omega_E = T(x)\Omega_E.$$

Réciproquement, si x appartient à $\langle M, e\rangle$, $\rho_E^{-1}(x)$ est donné par:

$$\rho_E^{-1}(x)(y) = \Phi_E(xy) \text{ pour tout y dans M.}$$

Enfin l'assertion (3) provient de (2) et du théorème 3.5 de [1].

REMARQUE. Si E est d'indice fini, le poids opératoriel E^{-1} de N' sur M' considéré par Kosaki [10] est donné par:

$$E^{-1}(y') = JF_E(Jy'J)J$$

pour tout y' dans N'.

Le résultat qui suit généralise le corollaire 3.25 de [1]:

THÉOREME 1.6. *Soit E une espérance conditionnelle de M sur N.*

(1) Si N est finie et E d'indice fini alors M est finie.

(2) Si N^c est fini et E faiblement d'indice fini alors N^c est de type I, *et si D désigne l'ensemble des degrés des composantes homogènes de N^c, c'est-à-dire*

$$N^c \cong \bigoplus_{n \in D} M_n(A_n),$$

où A_n est abélienne et M_n désigne l'algèbre des matrices $n \times n$, alors D est contenu dans l'intervalle $[1, [E]_w]$.

PREUVE. (1) Fixons une trace normale finie fidèle normalisée ϕ sur N. Il existe une unique trace normale semifinie fidèle Tr_E sur $\langle M, e\rangle$ telle que $\mathrm{Tr}_E(aeb) = \phi_E(ba)$ pour tous a, b dans M. D'après le critère de Sakai, on doit montrer que si (x_α) est une suite généralisée bornée de M qui converge ultrafortement vers 0 alors la suite (x_α^*) converge aussi ultrafortement vers 0. Or, en vertu du lemme V.2.27 de [14], puisque $\mathrm{Tr}_E(e) = 1$, la suite généralisée (ex_α^*) converge ultrafortement vers 0, c'est-à-dire que $(x_\alpha e x_\alpha^*)$ converge ultrafaiblement vers 0. Notons F_E le poids opératoriel de $\langle M, e\rangle$ sur M associé à E. Alors la suite $(F_E(x_\alpha e x_\alpha^*))$ converge ultrafaiblement vers 0 et on a pour tout α:

$$x_\alpha x_\alpha^* = F_E(ex_\alpha^*)^* F_E(ex_\alpha^*) \leqq [E] F_E(x_\alpha e x_\alpha^*),$$

ce qui implique que (x_α^*) converge ultrafortement vers 0.

(2) Supposons que N^c soit fini et E faiblement d'indice fini. Notons T la trace centrale canonique sur N^c, qui est un élément de $E(N^c, Z(N^c))$. Montrons que $[ET]_w \leqq [E]_w$. En effet, fixons $x \in N^c_+$ et voyons que $E(T(x)) - \lambda(E)x$ est adhérent à N^c_+. Si $\varepsilon > 0$ est fixé, en vertu du théorème 1, p. 288, de [3], il existe $t_1, \ldots, t_n > 0$ et $u_1, \ldots, u_n \in U(N^c)$ tels que

$$\sum_j t_j = 1 \quad \text{et} \quad \|T(x) - \sum_j t_j u_j x u_j^*\| \leqq \varepsilon.$$

Il reste donc à montrer que $\sum_j t_j E(u_j x u_j^*) \geqq (E)x$: puisque $E(u_j x u_j^*)$ appartient à N, on a:

$$\sum_j t_j E(u_j x u_j^*) = \sum_j t_j u_j^* E(u_j x u_j^*) u_j \geqq \lambda(E)x.$$

D'après la proposition 1.3, T est faiblement d'indice fini et

$$[T]_w \leqq [E]_w.$$

Notons z la projection de $Z(N^c)$ telle que $N^c z$ soit de type II_1 et $N^c(1 - z)$ de type I. Si $z \neq 0$, l'espérance conditionnelle induite T_z est la trace canonique sur $N^c z$, et pour tout entier positif k, il existe une projection $f_k \leqq z$ telle que

$$\lambda(T) f_k \leqq T(f_k) = T_z(f_k) = z/k,$$

ce qui entraîne que $\lambda(T) \leqq 1/k$ pour tout $k \geqq 1$. Donc $z = 0$ et N^c est de type I. Pour $n \in D$, notons T_n la trace centrale canonique sur $M_n(A_n)$, qui est la restriction de T à $M_n(A_n)$. On vérifie sans peine que $[T_n]_w = n$, donc $n \leqq [E]_w$.

Corollaire 1.7. *S'il existe E dans $E(M, N)$ d'indice fini, alors N^c est fini et il existe une existe une unique application bécarre E_{cc} de M sur N^{cc}, le commutant relatif de N^c dans M.*

Preuve. La première assertion provient de 1.6 et la seconde de la proposition 5.11 de [2].

THÉORÈME 1.8. *Si $E(M,N)$ contient un élément d'indice fini, il existe une application bécarre E_0 de M sur N telle que*

$$[E_0] = \min\{[E]; E \in E(M,N)\}.$$

PREUVE. Notons encore F_∞ le facteur de type I_∞ à prédual séparable. En vertu du lemme 2.3 de [2], l'ensemble $\{E \otimes i_\infty; E \in E(M,N)\}$ coïncide avec $E(M \otimes F_\infty, N \otimes F_\infty)$. Par le lemme 1.1, il suffit de démontrer les assertions suivantes:

(*) Si $E(M,N)$ contient un élément faiblement d'indice fini, alors il existe E_0 dans $E(M,N)$ tel que

$$[E_0]_w = \min\{[E]_w; E \in E(M,N)\}.$$

(**) Si N^c est fini, pour tout élément E de $E(M,N)$, il existe une application bécarre E' de M sur N telle que

$$[E']_w \leqq [E]_w.$$

Soit donc $\lambda_0 > 0$ tel que l'ensemble

$$E_{\lambda_0}(M,N) = \{E \in E(M,N); \lambda(E) \geqq \lambda_0\}$$

soit non vide. On le munit de la topologie de la convergence simple ultrafaible, qui est la topologie induite par la topologie *-faible $\sigma(L(M), M \otimes_\gamma M_*)$, où $L(M)$ désigne l'ensemble des applications linéaires bornées de M dans M ([14], p. 333, exercice 6).

$E_{\lambda_0}(M,N)$ est compact car il est convexe et normiquement fermé dans $L(M)$. De plus, l'application $E \mapsto \lambda(E)$ est clairement semicontinue supérieurement sur $E_{\lambda_0}(M,N)$. Cela démontre (*).

Pour montrer (**), notons encore E_{cc} l'application bécarre de M sur N^{cc}, fixons un élément E de $E(M,N)$ faiblement d'indice fini et posons $E' = EE_{cc}$. Pour x dans M_+, on va montrer que

$$E'(x) - \lambda(E)x \geqq 0.$$

En effet, $E_{cc}(x)$ est limite ultrafaible d'éléments de la forme $\sum_j t_j u_j x u_j^*$, où $t_1, \ldots, t_n > 0$, $\sum_j t_j = 1$, et $u_1, \ldots, u_n \in U(N^c)$; enfin, l'inégalité

$$\sum_{j=1}^{n} t_j E(u_j x u_j^*) \geqq \lambda(E)x$$

se démontre comme dans la preuve de 1.6.

2. Le cas où N est finie.

Dans cette section, on suppose que N est une sous-algèbre de von Neumann *finie* de l'algèbre de genre dénombrable M. On suppose encore que N a la même unité que M et qu'elle est espérée dans M.

Commençons par rappeler quelques définitions et résultats de [8]. Si M est finie, une *représentation finie* de M est une représentation (normale, fidèle) de M sur un espace de Hilbert H telle que le commutant M'_H de M dans $B(H)$ soit fini et telle que les opérateurs de liaison $c_M(H)$ et $c_{M'}(H)$ soient bornés ([8], 2.1). Une *représentation finie de la paire* (N, M) est une représentation finie de M dont la restriction à N est également finie. Si une telle représentation existe, on dit que N est *d'indice fini dans* M, et c'est le cas si et seulement si la forme standard $(L^2(M), J, L^2(M)_+)$ est une représentation finie de N, c'est-à-dire si N' est fini et $c_N(L^2(M))$ est borné ([8], 2.3).

Pour toute forme positive normale ϕ sur M, on note Ω_ϕ l'unique vecteur de $L^2(M)_+$ qui satisfait:

$$\phi(x) = \langle x\Omega_\phi, \Omega_\phi \rangle, \quad x \in M.$$

Si de plus ϕ est une trace fidèle, on note E_N^ϕ l'unique élément de $E(M, N)$ tel que $\phi \circ E_N^\phi = \phi$, et e_N^ϕ la projection $e_{\Omega_\phi}^N$. On désigne par $\langle M, e_N^\phi \rangle$ l'algèbre de von Neumann engendrée par M et e_N^ϕ. Alors $\langle M, e_N^\phi \rangle = JN'J$ pour toute trace ϕ comme ci-dessus. Notons aussi Tr_ϕ la trace normale semifinie fidèle sur $\langle M, e_N^\phi \rangle_+$ telle que $\mathrm{Tr}_\phi(e_N^\phi x) = \phi(x)$ pour tout x dans M. Si N est d'indice fini dans M, Tr_ϕ est finie et il existe une unique application positive normale D_N^M de $Z(M)$ dans $Z(M)$ telle que

$$\mathrm{Tr}_\phi | Z(M) = \phi \circ D_N^M,$$

pour toute trace ϕ comme ci-dessus (sections 2 & 3 de [8]). L'*indice* de N dans M est par définition le rayon spectral de D_N^M et il est noté $[M : N]$.
Si H est une représentation finie de la paire (N, M), D_N^M s'écrit:

$$D_N^M(z) = T_M(c_N(H) T_{N'}(c_M(H)^{-1} z)),$$

pour tout z dans $Z(M)$, où T_M (resp. $T_{N'}$) désigne la trace centrale canonique de M (resp. de N'_H), et D_N^M ne dépend pas de la représentation finie choisie.

LEMME 2.1. *Supposons M finie et N d'indice fini dans M. Soit m le plus petit entier positif tel que $c_N(L^2(M)) \leq m$.*

Pour tout vecteur Ω de $L^2(M)_+$ cyclique pour M, il existe des projections $r'_1, \ldots, r'_m$ de N', *deux à deux orthogonales et de somme* 1 *telles que*

$$r'_j \precsim e_\Omega^N,$$

pour tout $j = 1, \ldots, m$.

PREUVE. N' est de genre dénombrable et $c_{N'}(L^2(M)) \geqq m^{-1}$. En vertu des propositions 5 et 6, pp. 301 et 302, de [3], et d'après le lemme 1.1 de [8], il existe m vecteurs $\xi_1, \dots, \xi_m$ de $L^2(M)$ tels que les projections $(e^N_{\xi_j})$ soient deux à deux orthogonales et de somme 1. Comme Ω est cyclique pour $M' = JMJ$, il l'est a fortiori pour N', donc $e^{N'}_\Omega = 1 \geqq e^{N'}_{\xi_i}$, ce qui entraîne:

$$e^N_\Omega \succsim e^N_{\xi_i}$$

pour tout i, grâce au théorème V.1.10 de [14].

THÉORÈME 2.2. (1) *S'il existe un élément E de $E(M,N)$ fortement d'indice fini, alors M est finie et N est d'indice fini dans M.*

(2) *Si M est finie et si N est d'indice fini dans M, les conditions suivantes sur $E \in E(M,N)$ sont équivalentes:*

(i) *E est faiblement d'indice fini;*

(ii) *E est d'indice fini;*

(iii) *E est fortement d'indice fini.*

Si de plus $E = E^\phi_N$ pour une trace normale finie fidèle ϕ sur M, si E^ϕ_M désigne l'élément de $E(\langle M, e_N\rangle, M)$ associé à Tr_ϕ, les conditions (i) *à* (iii) *sont équivalentes à:*

(iv) *$E^\phi_M(e^\phi_N)$ est inversible dans $Z(M)$.*

Enfin, si cette dernière condition est réalisée, on a:

$$\mathrm{Ind}\,(E^\phi_N) = E^\phi_M(e^\phi_N)^{-1}.$$

PREUVE. (1) Il existe de éléments $x_1, \dots, x_n$ de M tels que

$$x = \sum_{i=1}^n x_i E(x_i^* x)$$

pour tout x dans M. Soit $\Omega \in L^2(M)_+$ un vecteur cyclique pour M. Posons $\xi_i = x_i^* \Omega$ pour tout i. Alors

$$1 = \bigvee_{i=1}^n e^N_{\xi_i},$$

et puisque $e^{N'}_{\xi_i}$ est une projection finie pour tout i, il en est de même pour $e^N_{\xi_i}$, donc N' est finie, et on vérifie que $c_N(L^2(M) \leqq m$.

(2) Il suffit de montrer que (i) implique (iii). Fixons un état normal fidèle ψ sur N, posons $\psi_E = \psi \circ E$ et notons $\Omega_E \in L^2(M)_+$ le vecteur associé à ψ_E. Soit m le plus petit entier positif tel que $c_N(L^2(M)) \leqq m$. D'après le lemme 2.1, il existe m projections $r_1, \dots, r_m$ de $\langle M, e\rangle$, deux à deux orthogonales et de somme 1 telles que $r_j \precsim e$ pour tout j. Il existe donc des isométries partielles $w_1, \dots, w_m$ de $\langle M, e\rangle$ telles que

$$w_i^* w_i \leqq e \ \text{ et } \ w_i w_i^* = r_i \ \text{ pour tout } i.$$

Par la proposition 1.5, comme E est faiblement d'indice fini, il existe $v_i \in M$ tel que $w_i = w_i e = v_i e$ pour tout i. On vérifie comme dans la preuve de 3.6.4 de [4] que $(v_i)_{1 \leqq i \leqq m}$ est une base orthonormale de X_E. De plus $\sum v_i e v_i^* = 1$. Si $E = E_N^\phi$ pour une trace ϕ sur M, alors $E_M^\phi(e_N^\phi)$ appartient à $Z(M)$: En effet, on a pour tous x, y dans M:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_\phi(E_M^\phi(e_N^\phi)xy) &= \mathrm{Tr}_\phi(e_N^\phi xy) = \phi(xy) = \mathrm{Tr}_\phi(E_M^\phi(e_N^\phi)yx)\\ &= \mathrm{Tr}_\phi(xE_M^\phi(e_N^\phi)y).\end{aligned}$$

Si E_N^ϕ est fortement d'indice fini et si $(v_i)_{1 \leqq i \leqq m}$ est une base orthonormale comme ci-dessus, alors:

$$E_M^\phi(e_N^\phi)\sum_i v_i v_i^* = \sum_i v_i E_M^\phi(e_N^\phi) v_i^* = E_M^\phi\left(\sum_i v_i e_N^\phi v_i^*\right) = 1$$

et $E_M^\phi(e_N^\phi)$ est inversible.

Réciproquement, si $E_M^\phi(e_N^\phi)$ est inversible, posons $F = E_M^\phi(e_N^\phi)^{-1} E_M^\phi$. C'est un poids opératoriel normal fini fidèle de $\langle M, e_N^\phi \rangle$ sur M qui satisfait $F(e_N^\phi) = 1$. En vertu de 1.5, E_N^ϕ est d'indice fini et $\mathrm{Ind}(E_N^\phi) = E_M^\phi(e_N^\phi)^{-1}$.

Corollaire 2.3. *Supposons que M soit finie, N d'indice fini dans M et que N^c soit contenu dans N. Notons E_N l'unique élement de $E(M, N)$. Alors E_N est d'indice fini et:*

(i) $\mathrm{Ind}(E_N) = D_N^M(1)$;

(ii) $[E_N] = [M : N]$.

Preuve. Notons T_M (resp. $T_{N'}$) la trace canonique sur M (resp. N'). Par hypothèse, $Z(M)$ est contenu dans $Z(N) = N^c$, donc $T_{N'}(z) = z$ et $D(z) := D_N^M(z) = D_N^M(1)z$ pour tout z dans $Z(M)$. On en déduit que

$$[M : N] = \lim_{k \to \infty} \|D^k\|^{1/k} = \|D_N^M(1)\| = \|D_N^M\|.$$

Soit ϕ une trace normale finie fidèle sur M. Comme $E_N = E_N^\phi$, il reste à montrer:

$$(*) \qquad E_M^\phi(e_N^\phi) D_N^M(1) = 1.$$

Or, en utilisant la proposition 3.2 de [8], on obtient pour tout x dans M:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \mathrm{Tr}_\phi(E_M^\phi(e_N^\phi)x) = \mathrm{Tr}_\phi(E_M^\phi(e_N^\phi)T_M(x))\\ &= \phi \circ D_N^M(E_M^\phi(e_N^\phi)T_M(x)) = \phi(D_N^M(1)E_M^\phi(e_N^\phi)x),\end{aligned}$$

ce qui démontre (*).

Le reste de cette section est consacré à la réciproque du théorème 2.2(1). Plus précisément, nous allons déterminer une famille d'espérances conditionelles de

M sur N d'indice fini, et parmi celles-ci, une espérance particulière E'_N telle que $\mathrm{Ind}(E'_N) = D_N^M(1)$.

On suppose donc que M est finie et N d'indice fini dans M. Désignons par P la sous-algèbre de von Neumann de M engendrée par N et son commutant relatif N^c dans M.

LEMME 2.4. *Avec les notations ci-dessus, on a:*

(1) *$Z(P) = P' \cap M$ est contenu dans P;*

(2) *$N' \cap P = N^c$ et $Z(N)$ est contenu dans $Z(P) = Z(N^c)$;*

(3) *si z est une projection de $Z(P)$, alors $(Nz)' \cap Pz = N^c z$ et $Z(Nz)$ est contenu dans $Z(Pz)$;*

(4) *N est d'indice fini dans P qui est d'indice fini dans M.*

PREUVE. Les propriétés (1) à (3) sont immédiates et la propriété (4) est une conséquence du corollaire 2.5 de [8].

PROPOSITION 2.5. *Soit m le plus petit entier positif tel que $c_N(L^2(P)) \leqq m$. Alors N^c est de type* I *et si D désigne l'ensemble des degrès des composantes homogènes de N^c* (cf. 1.6) *alors D est contenu dans l'intervalle* $[1, m]$. *En particulier, la trace centrale canonique T_{N^c} sur N^c est fortement d'indice fini.*

PREUVE. Il suffit de montrer que si e est une projection de support central z telle que $T_{N^c}(e) = z/n$, alors $n \leqq m$.

En vertu du lemme précédent, on peut supposer que $z = 1$. Comme $eL^2(P)$ contient un vecteur séparateur pour Ne, d'après la proposition 3, p. 300, de [3], on a:

$$\begin{aligned} e \leqq c_{Ne}(eL^2(P)) &= ec_N(L^2(P))\, T_0'(e) \\ &= ec_N(L^2(P))\, T_0'(T_{N^c}(e)) \leqq (m/n)e, \end{aligned}$$

où T_0' désigne la trace centrale canonique sur le commutant de N dans $B(L^2(P))$.

PROPOSITION 2.6. *Soit m l'entier défini dans la proposition 2.5. Notons encore T_0' la trace canonique sur le commutant de N dans $B(L^2(P))$. Alors*

$$T_0'(z) \geqq m^{-1} z$$

pour tout z appartenant à $Z(P)_+$. En particulier, $T_0' | Z(P)$ est d'indice fini.

PREUVE. Notons $(L^2(P), J, L^2(P)_+)$ la forme standard de P et fixons un vecteur $\Omega \in L^2(P)_+$ cyclique et séparateur pour P. Notons également T_N la trace canonique sur N. Il suffit de démontrer la proposition pour les projections de $Z(P)$. Soit donc z une telle projection. Elle satisfait: $z = e^P_{z\Omega} = e^{P'}_{z\Omega}$.

Par les mêmes arguments que dans la preuve du lemme 2.1, il existe $\xi_1, \ldots, \xi_m$ dans $L^2(P)$ tels que

$$z = \sum_{j=1}^{m} e^N_{\xi_j}.$$

Remarquons que $z \leqq T_N(e^{N'}_{z\Omega})$ car $z = vzv^*$ pour tout $v \in U(N)$ et $z = e^{P'}_{z\Omega} \leqq e^{N'}_{z\Omega}$. Ensuite,

$$(*) \qquad T_N(e^{N'}_{z\Omega}) \leqq \sum_{j=1}^{m} T_N(e^{N'}_{\xi_j}):$$

en effet, la définition de $c_N(L^2(P))$ donne:

$$0 \leqq c_N(L^2(P))\,T_0'(z - e^N_{z\Omega}) = c_N(L^2(P))\left\{\sum_{j=1}^{m} T_0'(e^N_{\xi_j}) - T_0'(e^N_{z\Omega})\right\}$$
$$= \sum_{j=1}^{m} T_N(e^{N'}_{\xi_j}) - T_N(e^{N'}_{z\Omega}).$$

Enfin,

$$m^{-1}z \leqq m^{-1}\,T_N(e^{N'}_{z\Omega}) \leqq c_N(L^2(P))^{-1}\,T_N(e^{N'}_{z\Omega})$$
$$\leqq \sum_{j=1}^{m} c_N(L^2(P))^{-1}\,T_N(e^{N'}_{\xi_j}) \text{ par l'inégailté } (*)$$
$$\leqq \sum_{j=1}^{m} T_0'(e^N_{\xi_j}) = T_0'(z).$$

Avant d'énoncer le résultat principal de la section, introduissons les notations suivantes:

Si (ρ, H_ρ) est une représentation finie de P, donc de la paire (N, P), notons E^ρ_N l'élément de $E(M, N)$ dont la restriction à N^c est égale à la trace canonique $T_{\rho(N)'}|N^c$. Lorsque ρ est la restriction à P de la représentation standard de M, on pose $E^\rho_N = E'_N$.

THÉORÈME 2.7. *Pour toute représentation finie ρ de P, l'espérance conditionnelle E^ρ_N est (fortement) d'indice fini. En particulier,*

$$\operatorname{Ind}(E'_N) = D^M_N(1) \text{ et } [E'_N] = \|D^M_N\| \geqq [M:N].$$

PREUVE. Notons E_P l'unique élément de $E(M, P)$ (cf. lemme 2.4(1)), et E_0 l'élément de $E(M, N)$ tel que $E_0|N^c = T_0'|N^c$, où T_0' est la trace canonique sur le commutant N_0' de N dans $B(L^2(P))$. On décompose la preuve en trois parties.

(1) E_0 est d'indice fini: Comme $E_0 = E_0 E_P$, en vertu de théorème 2.2 et du corollaire 2.3, il suffit de montrer que $E_0|P$ est faiblement d'indice fini. Or, $E_0|N^c = T_0'|N^c$ est d'indice fini en vertu de 2.5 et 2.6. Soit $\lambda > 0$ tel que l'application $T_0'|N^c - \lambda i_{N^c}$ soit complètement positive. Si $a_1, \ldots, a_n \in N$, si $b_1, \ldots, b_n \in N^c$, et si $x = \sum a_i b_i$, alors

$$E_0(x^*x) - \lambda x^*x = \sum_{i,j=1}^{n} a_i^*(T_0'(b_i^*b_j) - \lambda b_i^*b_j)a_j \geqq 0$$

puisque la matrice $n \times n$ $(T_0'(b_i^*b_j))$ est positive.

(2) Soit (ρ, H_ρ) une représentation finie de P. Montrons que E_N^ρ est d'indice fini. D'après le lemme 2.2 de [8], il existe un entier positif n et une projection e' dans $P' \otimes M_n$ de trace centrale inversible tels que

$$\rho(x) = e'(x \otimes 1_n)$$

pour x dans P. Par suite,

$$T_{\rho(N)'}(e'(x \otimes 1_n)) = e' T_{N' \otimes M_n}(e')^{-1} T_{N' \otimes M_n}(e'(x \otimes 1_n))$$

pour tout x dans N^c. Soient $a \in Z(N)_+$ et $b \in Z(P)_+$ tels que

$$\rho(a) = e' T_{N' \otimes M_n}(e')^{-1} \text{ et } b \otimes 1_n = T_{P' \otimes M_n}(e').$$

Posons $h = ab \in Z(P)_+ = Z(N^c)_+$, qui est inversible. On obtient pour tout z appartenant à $Z(N^c)$:

$$\begin{aligned}\rho^{-1} T_{\rho(N)'} \rho(z) &= \rho^{-1}(\rho(a) T_{N' \otimes M_n}(e'(z \otimes 1_n)))\\ &= a \cdot \rho^{-1}(e' T_{N' \otimes M_n}(T_{P' \otimes M_n}(e') z \otimes 1_n)))\\ &= a \cdot \rho^{-1}(e' T_0'(bz) \otimes 1_n) = T_0'(hz),\end{aligned}$$

et comme $E_N^\rho = E_N^\rho T_{N^c}$, on a $E_N^\rho(x) = E_0(hx)$ pour tout x dans N^c, donc pour tout x dans M, et E_N^ρ est d'indice fini ([1], 3.15).

(3) Montrons enfin que $\operatorname{Ind}(E_N') = D_N^M(1)$. Pour cela, notons $(L^2(M), J, L^2(M)_+)$ la forme standard de M, N' le commutant de N dans $B(L^2(M))$ et $c_N = c_N(L^2(M))$. Soit F' le poids opératoriel normal fini fidèle de N' sur $M' = JMJ$ tel que $F'|N^c = T_M(c_N \cdot)|N^c$, où T_M désigne la trace centrale canonique sur M.

Notons $E_{N^c}' \in E(N', M')$ l'espérance conditionelle invariante par les automorphismes intérieurs de N' définis par les unitaires de M'. Fixons de plus une trace normale finie fidèle normalisée ϕ sur M, à laquelle nous associons la trace Tr_ϕ' sur N' définie par:

$$\mathrm{Tr}_\phi'(y') = \phi(c_N T_{N'}(y'))$$

pour tout y' dans N'. Notons encore Ω' (resp. Ω_ϕ) le vecteur positif de $L^2(M)$ associé à $\phi_{E_N'}$ (resp. à ϕ) *et* $e_N' = e_{\Omega'}^N$, (resp. $e_N^\phi = e_\Omega^N$). Notons enfin E_M^ϕ, l'espérance conditionnelle de N' sur M' associée à Tr_ϕ'. D'après la propostion 3.15 de [1], il existe un unique élément h de $Z(N^c)_+$ tel que

$$E_N^\phi(x) = E_N'(hx)$$

pour tout x dans M, car E_N^ϕ et E_N' sont des applications bécarres. Cela entraîne que

$$\Omega_\phi = h^{1/2}\Omega' \text{ et } e_N^\phi = h^{1/2}e'_N h^{1/2}.$$

Comme $\mathrm{Tr}'_\phi \circ F'$ et Tr'_ϕ sont invariants par E'_{N^c}, on a pour tout y' dans N' et tout x' dans M':

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}'_\phi(F'(E^\phi_{M'}(e^\phi_N)y')x') &= \mathrm{Tr}'_\phi \circ F'(E^\phi_{M'}(e^\phi_N)E'_N c(y'x')) \\
&= \mathrm{Tr}'_\phi(E^\phi_{M'}(e^\phi_N)T_M(c_N E'_N c(y'x'))) \\
&= \mathrm{Tr}'_\phi(e^\phi_N T_M(c_N E'_N c(y'x'))) \\
&= \phi(T_M(c_N E'_N c(y'x'))) \\
&= \phi(E^\phi_N(c_N E'_N c(y'x'))) \\
&= \phi \circ E'_N(hc_N E'_N c(y'x')) \\
&= \phi(c_N T_{N'}(hE'_N c(y'x'))) \\
&= \mathrm{Tr}'_\phi \circ E'_N c(hy'x') \\
&= \mathrm{Tr}'_\phi(E^\phi_{M'}(hy')x'),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire: $E^\phi_{M'}(e^\phi_N)F'(y') = E^\phi_{M'}(hy')$ pour tout y' dans N'.
On en déduit que

$$E^\phi_{M'}(e^\phi_N)F'(e'_N) = E^\phi_{M'}(he'_N) = E^\phi_{M'}(e^\phi_N)$$

et comme $E^\phi_{M'}(e^\phi_N)$ est de support 1, on a $F'(e'_N) = 1$, ce qui démontre que

$$E'^{-1}_N = F'.$$

COROLLAIRE 2.8. *Avec les hypothèses et les notations de* 2.7, *on a pour toute représentation finie ρ de P:*

$$\mathrm{Ind}(E^\rho_N) = T_M(c_N(H_\rho)c_P(H_\rho)^{-1}c_P(L^2(M))).$$

PREUVE. Reprenons les notations de la preuve de 2.7. Soient $c_N(H_\rho) \in Z(N)$ et $c_P(H_\rho) \in Z(P)$ tels que

$$\rho(c_N(H_\rho)) = c_{\rho(N)}(H_\rho) \text{ et } \rho(c_P(H_\rho)) = c_{\rho(P)}(H_\rho).$$

On vérifie que $a = nc_N(L^2(P))c_N(H_\rho)^{-1}$ et que $b = n^{-1}c_P(H_\rho)$.

Pour E et E' d'indice fini, notons $(DE:DE')$ l'élément de $Z(P)_+$ inversible qui satisfait:

$$E(x) = E'((DE:DE')^{1/2}x(DE:DE')^{1/2})$$

pour tout x dans M. Alors

$$(DE_N^\rho : DE_0) = c_N(L^2(P))c_N(H_\rho)^{-1}c_P(H_\rho).$$

En particulier, $(DE'_N : DE_0) = c_N(L^2(P))c_P(L^2(M))c_N(L^2(M))^{-1}$ donc

$$(DE_N^\rho : DE'_N) = c_P(H_\rho)c_P(L^2(M))^{-1}c_N(L^2(M))c_N(H_\rho)^{-1}$$

et alors:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}(E_N^\rho) = E_N^{\rho^{-1}}(1) &= E_N'^{-1}((DE_N^\rho : DE'_N)^{-1})\\ &= T_M(c_N(H_\rho)c_P(H_\rho)^{-1}c_P(L^2(M))).\end{aligned}$$

On déduit enfin immédiatement de 2.7 le résultat suivant démontré dans [8] pour les paires d'algèbres finies à centres atomiques.

COROLLAIRE 2.9. *Soit $M_0 = N \subset M_1 = M \subset \ldots \subset M_k \subset \ldots$ la tour de Jones associée à la paire (N, M), et notons*

$$M^{\otimes_N^k} = M \otimes_N M \otimes_N \ldots \otimes_N M \quad (k \text{ fois}).$$

(1) $M \otimes_N M \cong \langle M, e_N\rangle$ *en tant que N-bimodules;*
(2) $\operatorname{End}_N^r(M) \cong \langle M, e_N\rangle$ *en tant qu'algèbres;*
(3) $[M:N] = \limsup_{k\to\infty}[\operatorname{rang}(M^{\otimes_N^k}|N)]^{1/k} = \limsup_{k\to\infty}[\operatorname{rang}(M_k|N)]^{1/k}$, *où* $\operatorname{rang}(A|N)$ *designe le nombre minimal de générateurs de A en tant que N-module à droite.*

3. Algèbres finies à centres atomiques.

On suppose dans cette section que M et N sont finies et de genre dénombrable. Rappelons que le *centralisateur* M_E d'une espérance conditionnelle E de M sur N est l'algèbre de von Neumann formée des éléments x de M tels que $E(xy) = E(yx)$ pour tout $y \in M$. Remarquons que $Z(M)$ et $Z(N)$ sont contenus dans M_E et que N est contenue dans M_E^c.

LEMME 3.1. *Soient M un facteur fini, N une sous-algèbre de von Neumann de M, E un élément de $E(M, N)$ et A une sous-algèbre de von Neumann abélienne de M_E contenant 1.*

Alors $E(M, A^c)$ contient un unique élément E_{A^c}, et si $F = E|A^c$, on a: $E = FE_{A^c}$. Si de plus E est faiblement d'indice fini, A et $Z(A^c)$ sont atomiques et

$$\dim(A) = [E_{A^c}]_w \leqq [E]_w.$$

PREUVE. Notons tr la trace canonique sur M et posons $\phi_E = \operatorname{tr}\circ E$. Comme A est contenue dans A^c, on a pour tout élément G de $E(M, A^c)$ et tous $x \in M$ et $u \in U(A)$: $G(uxu^*) = G(x)$. Donc $E(M, A^c)$ contient un unique élément E_{A^c}.

Pour tout $x \in M$, notons $K(x)$ l'enveloppe convexe ultrafaiblement fermée de $\{uxu^*; u \in U(A)\}$. Ainsi, $E_{A^c}(x)$ appartient à $K(x)$ et satisfait:

$$\|E_{A^c}(x)\|_2 = \inf\{\|k\|_2; k \in K(x)\},$$

où $\|y\|_2 = \mathrm{tr}(y^*y)^{1/2}$ pour tout y dans M. Notons également $\|y\|_E = \phi_E(y^*y)^{1/2}$ pour y dans M.
Si x appartient à M et si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe $t_1, \ldots, t_n > 0$ et $u_1, \ldots, u_n$ dans $U(A)$ tels que

$$\sum t_j = 1 \quad \text{et} \quad \|E_{A^c}(x) - \sum t_j u_j x u_j^*\|_E \leqq \varepsilon,$$

car $K(x)$ est l'enveloppe convexe ultrafortement fermée de $\{uxu^*; u \in U(A)\}$. Mais

$$E(\sum t_j u_j x u_j^*) = E(x),$$

donc $\|FE_{A^c}(x) - E(x)\|_2 \leqq \|E_{A^c}(x) - \sum t_j u_j x u_j^*\|_E \leqq \varepsilon$.

Par suite, $E = FE_{A^c}$, et si E est faiblement d'indice fini, E_{A^c} l'est également en vertu de la proposition 1.1. Soit q la projection de $Z(A^c)$ telle que $Z(A^c)q$ soit complètement non atomique et $Z(A^c)(1-q)$ atomique. Si $q \neq 0$, M est nécessairement de type II_1 et soit E_q l'élément de $E(qMq, qA^c)$ défini par $E_q(qxq) = E_{A^c}(qxq)$ pour tout x dans M. E_q est encore faiblement d'indice fini et pour entier positif n il existe des projections $e_1, \ldots, e_n$ de $Z(A^c)$ deux à deux orthogonales et équivalentes dans qMq et de somme q. Il existe par conséquent une projection e_0 de qMq telle $e_k e_0 e_k = n^{-1} e_k$ pour tout k.
Cela entraîne:

$$\lambda(E_q)e_0 \leqq E_q(e_0) = n^{-1}q,$$

ce qui contredit le fait que $\lambda(E_q) > 0$.

Par suite, $Z(A^c)$ est atomique et A également. Notons $(e^k)_{k \in K}$ les projections minimales de A. On vérifie que

$$E_{A^c}(x) = \sum_k e^k x e^k$$

pour tout x dans M. Enfin, $[E_{A^c}]_w = \mathrm{card}(K)$: on vérifie comme ci-dessus que $\lambda(E_{A^c}) \leqq \mathrm{card}(K)^{-1}$, donc $\dim(A) \leqq [E_{A^c}]_w$. Notons $n = \mathrm{card}(K)$ et $K = \{1, \ldots, n\}$. Si x appartient à M_+ on a:

$$x = 1/2 \sum_k (e^k x + x e^k) = 1/2 \sum_k (2e^k x e^k + \sum_{k \neq l} e^k x e^l + e^l x e^k)$$

$$\leqq \sum_k e^k x e^k + 1/2 \sum \sum_{k \neq l} (e^k x e^k + e^l x e^l) = nE_{A^c}(x).$$

Nous allons montrer que si $Z(M)$ et $Z(N)$ sont atomiques, alors un élément E de $E(M, N)$ est d'indice fini s'il est faiblement d'indice fini. Pour cela on va de nouveau intercaller l'algèbre P engendrée par N et N^c entre N et M. La proposition suivante

suivante fournit la première partie du résultat:

PROPOSITION 3.2. *Soit M une algèbre de type* II_1 *à centre atomique et soit P une sous-algèbre de von Neumann de M telle que:*

(1) *p^c est contenu dans P;*

(2) *l'unique espérance conditionnelle E_P de M sur P est faiblement d'indice fini.*

Alors E_P est d'indice fini et:

$$[E_P] = [E_P]_w.$$

PREUVE. Par hypothèse, $Z(M)$ est contenu dans $Z(P) = P^c$. Par le lemme 3.1, $Z(P)$ est atomique. Notons $(e^k)_{k\in K}$ et $(f^l)_{l\in L}$ les projections minimales de $Z(P)$ et de $Z(M)$ respectivement. Posons aussi pour tout $l \in L$: $K_l = \{k \in K; e^k f^l \neq 0\}$. Comme f^l appartient à $Z(P)$, on a $f^l = \sum_{k\in K_l} e^k$, P est de type II_1 et Pf^l est d'indice fini dans le facteur Mf^l ([1], 3.19 et 3.24).

Par définition des deux indices, il suffit de supposer que M est un facteur. Pour k dans K, soit E_k l'élément de $E(e^kMe^k, Pe^k)$ induit par E_P: $E_k(e^kxe^k) = E_P(e^kxe^k)$ pour x dans M. Alors E_k est l'espérance conditionelle associée à la trace canonique sur e^kMe^k car E_P est associée à la trace canonique sur M([6], lemme 3.4). On obtient donc:

$$[E_P] = \mathrm{tr}(c_P) = [M:P] = \sum_{k\in K} [e^kMe^k : Pe^k] \geqq [E_P]_w,$$

par le corollaire 2.3 et l'exemple 2.7 de [8].
Pour tout k dans K soit f_k une projection de e^kMe^k telle que

$$E_k(f_k) = [e^kMe^k : Pe^k]^{-1} e^k.$$

Posons aussi $t = \min [e^kMe^k : Pe^k]^{-1}$ et choisissons des projections q_k de M telles que $q_k \leqq f_k$ et $\mathrm{tr}(q_k) = t$ pour tout k. Il existe une projection e_0 dans M telle $e^ke_0e^k = a_kq_k$ où $a_k = [e^kMe^k : Pe^k][M:P]^{-1}$ pour tout k. Par suite,

$$\lambda(E_P)e_0 \leqq E_P(e_0) \leqq [M:P]^{-1} \quad \text{et} \quad [E_P] = [M:P] = [E_P]_w.$$

Supposons maintenant que M et N sont à centres atomiques: Notons $(e^k)_{k\in K}$ et $(f^l)_{l\in L}$ les projections minimales de $Z(N)$ et de $Z(M)$ respectivement. Notons comme ci-dessus $K_l = \{k \in K; e^kf^l \neq 0\}$ pour tout $l \in L$. Si E appartient à $E(M, N)$, puisque $E(f^l)$ appartient à $Z(N)$, il s'écrit:

$$E(f^l) = \sum_{k\in K_l} c_{kl} e^k$$

avec $c_{kl} \in (0, 1]$. On note également E_{kl} l'élément de $E(M_{kl}, N_{kl})$ induit par E, où M_{kl} et N_{kl} sont les algèbres réduites par la projection e^kf^l. On a donc:

$$E_{kl}(e^k f^l x f^l e^k) = c_{kl}^{-1} E(e^k f^l x f^l e^k)$$

pour tout x dans M ([6], proposition 2.2). Suivant [13], on dit que l'inclusion de N dans M est *matricielle* si, pour tout $l \in L$ et tout $k \in K_l$, le commutant relatif B_{kl} de N_{kl} dans M_{kl} est un facteur de type I et si M_{kl} est engendré par N_{kl} et B_{kl}. On pose $a_{kl}^2 = \dim B_{kl}$.

EXAMPLE 3.3. Soient M et N des algèbres finies à centres atomiques. Supposons qu'il existe un élément E de $E(M, N)$ faiblement d'indice fini et soit P la sous-algèbre de von Neumann de M engendrée par N et N^c. Alors l'inclusion de N dans P est matricielle.

En effet, $Z(P)$ est aussi atomique. Notons $(e^k)_{k\in K}$ et $(g^i)_{i\in I}$ les projections minimales de $Z(N)$ et de $Z(P)$ respectivement. Pour $k \in K$ notons $I_k = \{i \in I;\, e^k g^i \neq 0\}$. Comme $Z(N)$ est contenu dans $Z(P)$, on a:

$$e^k = \sum_{i\in I_k} g^i \quad \text{et} \quad e^k g^i = g^i$$

pour tout k et tout $i \in I_k$. Par suite, $g^i N g^i$ est un sous-facteur d'indice fini du facteur $g^i P g^i$ et $(g^i N g^i)' \cap g^i P g^i = g^i N^c g^i$ est un facteur de dimension finie. Enfin, on vérifie sans peine que $g^i P g^i$ est engendré par $g^i N g^i$ et $g^i N^c g^i$.

Le résultat suivant généralise le théorème 2.3(1) de [13] au cas des espérances conditionnelles qui ne sont pas associées à des traces.

THÉORÈME 3.4. *Supposons que M et N sont à centres atomatiques et que l'inclusion de N dans M est matricielle. Si E est une espérance conditionnelle faiblement d'indice fini de M sur N, alors E est d'indice fini et*

$$[E] \leqq [E]_w^2.$$

Si de plus $a_{kl}^2 \leqq \dim N e^k$ *pour tout* $l \in L$ *et tout* $k \in K_l$, *alors*

$$[E] = [E]_w = \sup_l \sum_{k\in K_l} [E_{kl}]\, c_{kl}^{-1}.$$

PREUVE. En vertu du théorème 2.5 de [6], E est d'indice fini si et seulement si $\sup_l \sum_{k\in K_l} [E_{kl}] c_{kl}^{-1}$ est fini, et dans ce cas,

$$[E] = \sup_l \sum_{k\in K_l} [E_{kl}]\, c_{kl}^{-1}.$$

Nous présentons la preuve en trois parties.

(1) On suppose que N est un facteur, B un facteur de type I_n avec $n^2 \leqq \dim N$ et $M = N \otimes B$. Notons tr_B la trace normalisée sur B et i_N l'application identité sur N. Posons $E_N = i_N \otimes \mathrm{tr}_B$ qui est fortement d'indice fini. On choisit un système d'unités

matricielles $(g_{ij})_{1 \leqq i,j \leqq n}$ dans B. Si E est faiblement d'indice fini, il existe un élément a de B inversible tel que $\mathrm{tr}_B(a^*a) = 1$ et

$$E(y \otimes b) = E_N(y \otimes a^*ba) = y \otimes \mathrm{tr}_B(baa^*)$$

pour tout y dans N et tout b dans B (cf. [1], proposition 3.15). Notons $0 < \alpha = \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_n$ les valeurs propres de aa^*, et soit u dans $U(B)$ tel que $aa^* = u\,\mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)u^*$, où

$$\mathrm{diag}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_k \alpha_k g_{kk}.$$

Montrons:

$$(*) \qquad [E]_w = [E] = \sum_{j=1}^{n} n\alpha_j^{-1}.$$

Choisissons un système d'unités matricielles $(r_{ij})_{1 \leqq i,j \leqq n}$ dans N et posons:

$$f_{ij} = ug_{ij}u^* \text{ et } x = 1/n \sum_{i,j=1}^{n} \alpha(\alpha_i\alpha_j)^{-1/2} r_{ij} \otimes f_{ij}.$$

Alors x appartient à M_+ car $x = yy^*$ où $y = 1/n \sum_{i,j=1}^{n} \sqrt{\alpha\alpha_j/\alpha_i}\, r_{ij} \otimes f_{ij}$. De plus, $x^2 = tx$ avec $t = 1/n \sum \alpha\alpha_j^{-1}$, et $f = t^{-1}x$ est une projection de M. Alors:

$$\lambda(E)x \leqq E(x) = \sum_{i,j} n^{-1}\alpha(\alpha_i\alpha_j)^{-1/2} r_{ij} \otimes \mathrm{tr}_B(f_{ij}aa^*)$$

$$= \sum_{i,j} n^{-1}\alpha(\alpha_i\alpha_j)^{-1/2} r_{ij} \otimes \delta_{ij}\alpha_j/n \leqq \alpha/n^2,$$

et par suite,

$$\lambda(E)f \leqq \alpha/tn^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} n/\alpha_j\right)^{-1}.$$

Enfin, $[E] = \sum_{j=1}^{n} n/\alpha_j$:

En effet, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ est aussi l'ensemble des valeurs propres de a^*a et il existe v dans $U(B)$ tel que $a^*a = v^*\mathrm{diag}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)v$ et $(a^*a)^{-1} = v^*\mathrm{diag}(\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1})v$. Posons $m_{ij} = n \cdot 1 \otimes v^*g_{ij}va^{-1}$ pour $1 \leqq i,j \leqq n$. La famille (m_{ij}) est une base orthonormale de M sur N pour le produit scalaire induit par E. Par suite,

$$\mathrm{Ind}\,(E) = \sum_{i,j} m_{ij}m_{ij}^* = n\sum_{i,j} 1 \otimes v^*\alpha_j^{-1}g_{ii}v = \sum_j n/\alpha_j \cdot 1 \otimes 1.$$

(2) Considérons maintenant le cas où $a_{kl}^2 \leqq \dim \mathrm{Ne}^k$. Posons

$$\lambda_l(E) = \max\{\lambda \geqq 0;\ E(xf^l) \geqq \lambda x f^l,\ x \in M_+\},$$

et $c_l = \left(\sum_{k \in K_l} [E_{kl}] c_{kl}^{-1}\right)^{-1}$.

Comme $[E]_w = \sup \lambda_l(E)^{-1}$, il suffit de démontrer: (**) $\lambda_l(E) \leqq c_l$.

Pour k dans K_l notons $\alpha_k = \alpha_{k1} \leqq \ldots \leqq \alpha_{ka_{kl}}$ les valeurs propres associées à E_{kl} comme dans (1).

On a donc: $[E_{kl}] = [E_{kl}]_w = \sum_{j=1}^{a_{kl}} a_{kl}/\alpha_{kj}$.

Soit $(g_{ij}^k)_{1 \leqq i,j \leqq a_{kl}}$ un système d'unités matricielles de B_{kl} tel que

$$E_{kl}(g_{ij}^k) = \delta_{ij}(\alpha_{kj}/a_{kl}) e^k f^l.$$

Choisissons également un système d'unités matricielles (e_{ij}^k) de N_{kl} et posons:

$$x_k = \sum_{i,j=1}^{a_{kl}} \alpha_k/a_{kl}(\alpha_{ki}\alpha_{kj})^{-1/2} e_{ij}^k g_{ij}^k$$

et $t_k = 1/a_{kl} \sum_j \alpha_k/\alpha_{kj}$.

Alors $f_k' = t_k^{-1} x_{k_l}$ est une projection de M_{kl}. Soient $(f_k)_{k \in K_l}$ des projections de Mf deux à deux équivalentes telles que $f_k \leqq f_k'$. Posons aussi: $d_{kl} = c_l [E_{kl}] c_{kl}^{-1}$. Alors $\sum d_{kl} = 1$ et il existe une projection f_0 dans Mf^l telle que $e^k f_0 e^k = d_{kl} f_k$ pour tout $k \in K_l$. On vérifie comme dans (1) que:

$$f^l E(f_0) \leqq \sum_{k \in K_l} d_{kl} c_{kl} [E_{kl}]^{-1} e^k f^l \leqq c_l f^l.$$

Cela achève la preuve du théorème lorsque la condition $a_{kl}^2 \leqq \dim Ne^k$ est remplie.

(3) Dans le cas général on pose $b_{kl} = \min(a_{kl}, (\dim Ne^k)^{1/2}))$. Comme ci-dessus on montre que

$$\lambda_l(E) \leqq \sum_{k \in K_l} \left(\sum_{j=1}^{b_{kl}} a_{kl}/\alpha_{kj}\right) c_{kl}^{-1}$$

et que

$$\begin{aligned}[E_{kl}] = \sum_{j=1}^{a_{kl}} a_{kl}/\alpha_{kj} &\leqq a_{kl} \sum_{j=1}^{b_{kl}} a_{kl}/\alpha_{kj} \\ &\leqq \lambda_l(E)^{-1} \sum_{j=1}^{b_{kl}} a_{kl}/\alpha_{kj}\end{aligned}$$

donc que

$$\sum_{k \in K_l} [E_{kl}] c_{kl}^{-1} \leqq \lambda_l(E)^{-2} \leqq [E]_w^2.$$

On déduit de 3.2 et 3.4 le résultat principal de cette section:

THÉORÈME 3.5. *Soit M algèbre de von Neumann finie de genre dénombrable et soit N une sous-algèbre de von Neumann de M. On suppose que $Z(M)$ ou $Z(N)$ est atomique. Si E est une espérance conditionnelle de M sur N faiblement d'indice fini, alors $Z(M)$ et $Z(N)$ sont atomiques, E est d'indice fini et*

$$[E] \leqq [E]_w^2.$$

PREUVE. $Z(M)$ et $Z(N)$ sont atomiques grâce au lemme 3.1 et à 3.19 et 3.24 de [1]. On se ramène alors au cas où $Z(M) \cap Z(N) = \mathbf{C}$.
Ainsi M est soit de type I soit de type II_1. Si M est de type I N l'est aussi et l'inclusion de N dans M est matricielle. On suppose donc que M est de type II_1, ce qui est aussi le cas de N, et on pose $P = (N \vee N^c)''$, $F = E|P$ et on note E_P l'unique élément de $E(M, P)$. Comme N^c est contenu dans P, on a $FE_P|N^c = E|N^c$. Par le théorème 5.3 de [2] et la proposition 1.3, cela implique que $E = FE_P$ et que F et E_P sont faiblement d'indice fini.
D'après 3.2, E_P est d'indice fini et $[E_P] \leqq [E]_w$. Enfin, l'exemple 3.3 et le théorème 3.4 montrent que $[F] \leqq [E]_w$.

COROLLAIRE 3.6. *Soient M un facteur de type II_1 et N une sous-algèbre de von Neumann de M. Notons E_N l'espérance conditionnelle associée à la trace standard* tr *sur M, e_N la projection correspondante et* Tr *la trace normale semifinie sur $\langle M, e_N \rangle$ telle que* $\mathrm{Tr}(e_N x) = \mathrm{tr}(x)$ *pour tout x dans M.*

(1) *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *N est d'indice fini dans M;*

(ii) Tr *est une trace finie;*

(iii) *il existe $E \in E(M, N)$ faiblement d'indice fini.*

(2) *Si les conditions ci-dessus sont réalisées, $Z(N)$ est de dimension finie, toute espérance conditionnelle E de M sur N est fortement d'indice fini et* $\dim Z(N) \leqq [E]_w$.

Enfin, $[M:N] = [E_N] = [E]_w$.

PREUVE. (i) implique (ii) par [8], et si Tr est finie, $F = \mathrm{Tr}(1)E_M$ est un poids opératoriel fini de $\langle M, e_N \rangle$ sur M tel que $F(e_N) = 1$, où E_M est l'espérance associée à Tr. Donc (ii) implique (iii). Si E est un élément faiblement d'indice fini de $E(M, N)$, le théorème 3.5 montre que E est d'indice fini et par le lemme 3.1, $\dim Z(N) \leqq [E]_w$. Ainsi E est fortement d'indice fini et (iii) implique (i). Enfin, l'inégalité: $[M:N] \leqq [E_N]_w$ se démontre comme dans la preuve de 3.2.

Nous terminons cet article en montrant l'existence d'une espérance conditionnelle associée à une trace finie sur une algèbre de von Neumann, qui est d'indice fini mais pas fortement d'indice fini. Cela montre en particulier que l'hypothèse du théorème 2.2(1) ne peut pas être affaible.

Pour cela, considérons une paire (N, M) d'algèbres finies de genre dénombrable à centres atomiques. Comme ci-dessus, on note $(e^k)_{k\in K}$ et $(f^l)_{l\in L}$ les projections minimales de $Z(N)$ et de $Z(M)$ respectivement. On suppose que pour tout $l \in L$ et tout $k \in K$ le facteur N_{kl} est d'indice fini dans M_{kl} et on note a_{kl}^2 son indice. Posons aussi pour $k \in K$: $L_k = \{l \in L; e^k f^l \neq 0\}$. Notons enfin tr_l la trace standard sur Mf^l.

LEMME 3.7. *On retient les hypothèses et les notations ci-dessus. Alors N est d'indice fini dans M si et seulement s'il existe $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que:*

(1) $a_{kl}^2 \leqq C$ *pour tout* $l \in L$ *et tout* $k \in K_l$;

(2) $\mathrm{card}(L_k) \leqq C$ *pour tout* $k \in K$;

(3) $\mathrm{tr}_l(e^k f^l) \geqq \varepsilon$ *pour tout* $l \in L$ *et tout* $k \in K_l$.

PREUVE. Si N est d'indice fini dans M, on vérifie aisément que $a_{kl}^2 \leqq [M:N]$. De plus, comme dans la preuve du lemme 4.1 de [8], si $c_N = c_N(L^2(M))$ et si $T_{N'}$ désigne la trace sur le commutant N' de N dans $B(L^2(M))$, on a pour tout $l \in L$:

$$(*) \qquad c_N T_{N'}(f^l) = \sum_{k\in K_l} (a_{kl}^2/\mathrm{tr}_l(e^k f^l))\, e^k$$

donc $\mathrm{tr}_l(e^k f^l)^{-1} e^k \leqq e^k c_N T_{N'}(f^l) \leqq \|c_N\|\, e^k$, et par suite,

$$\mathrm{tr}_l(e^k f^l) \geqq \|c_N\|^{-1}.$$

De plus, l'égalité $1 = \sum \mathrm{tr}_l(e^k f^l)$ implique que $\mathrm{card}(K_l) \leqq \|c_N\|$. En considérent la paire (M', N') on obtient (2).

Supposons maintenant que N et M satisfont les conditions (1) à (3). Puisque L_k est fini pour tout k, le commutant N' est fini. Il reste à vérifier que c_N est un opérateur borné. On a pour tout k:

$$c_N e^k = \sum_l c_N T_{N'}(f^l) e^k = \sum_l (a_{kl}^2/\mathrm{tr}_l(e^k f^l)) e^k \leqq \varepsilon^{-1} C^2 e^k,$$

donc $c_N \leqq \varepsilon^{-1} C^2$.

PROPOSITION 3.8. *Il existe une paire d'algèbres de von Neumann $N \subset M$ de type II_1 à centres atomiques et une trace normale finie fidèle ϕ sur M telles que:*

(1) *l'inclusion de N dans M est matricielle et connexe;*

(2) *N n'est pas d'indice fini dans M;*

(3) *E_N^ϕ est d'indice fini.*

En particulier, E_N^ϕ n'est pas fortement d'indice fini.

PREUVE. Soit R le facteur hyperfini de type II_1 à prédual séparable et posons

$K = L = \mathbb{N}$. Pour $l \in L$ notons $R_l = R$ et tr_l la trace normalisée sur R_l. On va construire M et N comme dans la proposition 3.5.6 de [4]. Posons $M = \bigoplus_{l \geqq 1} R_l$. Pour tout $l \geqq 1$, soient $q_{l,l}$ et $q_{l+1,l}$ des projections de R_l telles que

$$q_{l,l} + q_{l+1,l} = f^l \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}_l(q_{l+1,l}) = (l+1)^{-1}.$$

Posons aussi $q_{1,0} = 0$. Pour $k \in K_l = \{l, l+1\}$ choisissons un isomorphisme $\theta_{k,l}$ de R sur $q_{k,l} R_l q_{k,l}$, posons $e^k = q_{k,k-1} + q_{k,k}$, définissons $N_k = \{\theta_{k,k-1}(x) + \theta_{k,k}(x); x \in R\}$ pour $k \geqq 2$ et $N_1 = \theta_{1,1}(R)$. Enfin,

$$N = \bigoplus_{k \in K} N_k.$$

Alors e^k appartient à $Z(N)$ et $Ne^k = N_k$ pour tout k. Par construction, si $l \in L$ et si $k \in K_l$ on a:

$$a_{kl} = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}_l(e^{l+1} f^l) = (l+1)^{-1},$$

donc N n'est pas d'indice fini dans M en vertu de 3.7. Définissons ϕ par $\phi(f^l) = l^{-l}$. En reprenant les notations du théorème 3.4, on obtient: $c_{kl} = \phi(e^k f^l)/\phi(e^k)$ et

$$\begin{aligned} \sum [E_{kl}] c_{kl}^{-1} &= 2 + \phi(e^l f^{l-1})/\phi(e^l f^l) + \phi(e^{l+1} f^{l+1})/\phi(e^{l+1} f^l) \\ &= 2 + a_l + a_{l-1}, \end{aligned}$$

où $a_l = l^l/(l-1)^l$ pour $l \geqq 2$.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Baillet, Y. Denizeau, J.-F. Havet, *Indice d'une espérance conditionnelle*, Compositio Math. 66 (1988), 199–236.
2. F. Combes, C. Delaroche, *Groupe modulaire d'une espérance conditionnelle dans une algèbre de von Neumann*, Bull. Soc. Math. France 103 (1975), 385-426.
3. J. Dixmier, *Von Neumann Algebras*, North-Holland, Amsterdam, 1981.
4. F. Goodman, P. de la Harpee, V. Jones, *Coxeter Graphs and Towers of Algebras*, MSRI Publ., Springer-Verlag, New-York, 1989.
5. U. Haagerup, *The Standard Form of a von Neumann Algebra*, Math. Scand. 37 (1975), 271–283.
6. J.-F. Havet, *Espérance conditionnelle minimale*, préprint, Orléans.
7. F. Hiai. *Minimizing Indices of Conditional Expectations onto a Subfactor*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 24 (1988), 673–678.
8. P. Jolissaint, *Index for pairs of finite von Neumann algebras*, à paraître dans Pacific J. Math.
9. V. F. R. Jones, *Index for Subfactors*, Invent. Math. 72 (1983), 1–25.
10. H. Kosaki, *Extension of Jones' Theory on Index to Arbitrary Factors*, J. Funct. Anal. 66 (1986), 123–140.
11. R. Longo, *Index of subfactors and statistics of quantum fields* I & II préprints, Rome.
12. M. Pimsner, S. Popa, *Entropy and index for subfactors*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 19 (1986), 57–106.

13. M. Pimsner, S. Popa, *Finite dimensional approximation of pairs of algebras and obstructions for the index*, préprint, UCLA.
14. M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras* I, Springer-Verlag, New-York, 1979.
15. Y. Watatani, *Index for C*-subalgebras*, préprint, Osaka.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
CHANTEMERLE 20
CH-2000 NEUCHATEL
SUISSE