MATH. SCAND. 69 (1991), 89–126

FONCTION DE GREEN PLURICOMPLEXE À PÔLE À L'INFINI SUR UN ESPACE DE STEIN PARABOLIQUE ET APPLICATIONS

AHMED ZERIAHI

§0. Introduction.

Dans la théorie classique du Potentiel en une variable complexe, la fonction de Green g_K associée à un compact K non polaire de la droite complexe joue un rôle fondamental et possède de nombreuses applications notamment à l'interpolation et à l'approximation polynomiale des fonctions holomorphes d'une variable complexe comme le montrent les traveaux classiques de S. Bernstein ([Bs]), F. Leja ([Lej]) et J. L. Walsh ([W]).

Dans son important travail ([Sc. 1]) J. Siciak a introduit la fonction extrémale d'un compact de $\mathbf{C}$ pour étendre la fonction de Green classique et généraliser aux fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes, certains résultats de S. Bernstein, F. Leja et J. L. Walsh cités plus haut.

Plus tard par une approche différente, V. P. Zaharyuta ([Za, 2]) a observé que la fonction extrémale de Siciak, définie initialement à l'aide des polynômes, est en fait liée à une classe naturelle de fonctions plurisousharmoniques (p.s.h.) à croissance minimale sur $\mathbf{C}^n$. Cette classe de fonctions p.s.h. avait été introduite dans un autre contexte par P. Lelong [Lel, 2].

Avec les traveaux de E. Bedford et B. A. Taylor sur l'opérateur de Monge-Ampère Complexe et la "Théorie du Potentiel Pluricomplexe" associée, la fonction extrémale d'un compact apparaît comme la solution généralisée d'un problème de Dirichlet avec pôle à l'infini pour l'Opérateur de Monge-Ampère Complexe sur le complémentaire de ce compact ([B-T, 2]).

Le but essentiel de ce travail est d'étendre la théorie des fonctions extrémales à certains espaces de Stein, comprenant les variétés algébriques affines et d'en donner des applications. Il semble que la possibilité de faire une telle théorie sur un espace de Stein X de dimension pure $n \geqq 1$, soit liée à l'existence d'un potentiel parabolique sur X i.e. une fonction $g\colon X \to [-\infty, +\infty[$ p.s.h. continue et

Reçu Juillet 11, 1990.

exhaustive vérifiant l'équation de Monge Ampère Complexe $(dd^c g)^n = 0$ au sens des courants sur $X \backslash g^{-1}(-\infty)$. Le premier exemple important est celui des variétés algébriques affines. C'est dans ce cas que nous obtenons une version généralisée du théorème d'approximation de Bernstein-Walsh obtenu par J. Siciak dans $\mathbf{C}^n$ ([Sc, 1]) (voir aussi [Za, 2]).

Au paragraphe 1 nous rappelons quelques définitions et résultats connus sur les fonctions p.s.h. sur un espace complexe. Au paragraphe 2, nous étudions "la mesure et le potentiel d'équilibre" associés à un condensateur dans un espace de Stein, pour lesquels nous obtenons un Principe du Maximum qui joue un rôle important dans les applications ([N-Z], [Ze], [Ze, 3]).

Aux paragraphes 3 et 4 nous introduisons la fonction de Green pluricomplexe à pôle à l'infini et développons la théorie des fonctions extrémales à croissance minimale sur un expace de Stein parabolique. Enfin au paragraphe 5 nous abordons le cas des variétés algébriques affines où nous donnons des applications à l'approximation polynomiale et rationnelle des fonctions holomorphes.

La plupart des résultats exposés ici sont contenus dans la thèse de l'auteur ([Ze, 2]) avec cependant quelques modifications.

§1. Fonctions plurisousharmoniques sur un espace complexe.

Tous les espaces complexes considérés ici sont *réduits* et de *dimension* pure. Si X est un tel espace complexe de dimension $n \geqq 1$, on désignera par X_{reg} la variété analytique complexe des points réguliers de X et par X_{sing} l'ensemble singulier de X, qui est un sous-ensemble analytique de X de dimension $\leqq n-1$ en tout point.

Nous allons rappeler quelques définitions et résultats qui seront utilisés fréquemment dans la suite.

Définition 1.1. Une fonction u: $X \to [-\infty, +\infty[$ est plurisousharmonique (p.s.h. en abrégé) si pour tout point $a \in X$ et tout plongement local h d'un voisinage U de a dans X, dans un voisinage W de $h(a)$ dans $\mathbf{C}^N$, il existe une fonction p.s.h. u' sur un voisinage de $h(a)$ contenu dans W telle que $u' \circ h$ coïncide avec u au voisinage de a. On définit de la même façon la notion de fonction holomorphe sur X.

Le résultat suivant de Fornaess-Narasimhan [F-N] est fondamental dans l'étude des fonctions p.s.h. sur une expace complexe.

Théorème 1.2. ([F-N]). *Une fonction* $u: X \to [-\infty, +\infty[$ *semicontinue supérieurement est* p.s.h. *sur* X *si et seulement si pour toute fonction holomorphe* h: $\Delta \to X$ *(* Δ *étant le disque unité de* $\mathbf{C}$*), la fonction* $u \circ h$ *est sousharmonique sur* Δ *(la fonction identiquement égale à* $-\infty$ *sur* Δ*, étant considérée comme sousharmonique).*

Dans l'étude des fonctions p.s.h. du point de vue de la "théorie du potentiel" sur un espace complexe, la notion de fonction p.s.h. définie précédemment ne suffit par car elle n'est pas stable par les opérations usuelles de régularisation semi-continue supérieurement (s.c.s.) d'enveloppes supérieures comme le montre l'exemple ci-dessous. Nous sommes donc conduit à la notion plus faible suivante:

DÉFINITION 1.3. Une fonction $u: X \to [-\infty, +\infty[$ est dite faiblement p.s.h. sur X si u est p.s.h. sur la variété complexe X_{reg} et localement majorée sur X.

On n'impose pas dans cette définition que u soit s.c.s.. Si u est faiblement p.s.h. sur X, on lui associe alors une fonction s.c.s. sur X en posant

$$u^*(x) := \limsup_{\substack{x' \to x \\ x' \in X_{\text{reg}}}} u(x'),\ x \in X. \tag{1.1}$$

La fonction u^* sera appelée la régularisée s.c.s. de u sur X. Notons que si u est p.s.h. sur X alors $u = u^*$ est faiblement p.s.h.. La réciproque n'a pas lieu en général comme le montre l'exemple suivant:

EXEMPLE 1.4. Soit $X = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 : xy = 0\}$. Soit u la fonction définie sur X par $u(x, 0) = 0$ si $x \neq 0$ et $u(0, y) = 1$. Alors u est faiblement p.s.h. sur X et $u = u^*$ qui n'est pas p.s.h. au voisinage de $(0, 0) \in X$. Notons également que u est l'enveloppe régularisée s.c.s. de la famille des fonctions p.s.h. sur X définies pour $\varepsilon > 0$ par la formule:

$$u_\varepsilon(x, y) := \begin{cases} \varepsilon \log(|x| + |y|) & \text{si } y = 0 \\ 1 + \varepsilon \log(|x| + |y|) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Le théorème suivant de J. P. Demailly montre en particulier qu'un tel phénomène ne se produit pas en l'absence de points de réducibilité locale.

THÉORÈME 1.5. ([D]). *Soit X un espace complexe et $u: X \to [-\infty, +\infty[$ une fonction faiblement* p.s.h. *sur X. Alors on a les propriétés suivantes:*

1) Si de plus X est localement irréductible, alors u^* est p.s.h. *sur X*

2) Si la restriction de u à chaque composante irréductible de X est p.s.h. *alors u est* p.s.h. *sur X.*

3) Si u est continue sur X alors u est p.s.h. *sur X.*

Nous allons maintenant donner une version utile dans le cadre des espaces complexes du lemme de Hartogs classique ([Lel, 1]).

THÉORÈME 1.6. *Soit (u_j) une suite localement majorée de fonctions faiblement* p.s.h. *sur un ouvert Ω de X telle que*

$$\limsup_{j \to \infty} u_j(x) \leqq 0 \ \textit{sur } \Omega. \tag{1.2}$$

Alors pour tout compact $K \subset \Omega$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $j_0 = j_0(\varepsilon; K)$ tel que:

$$u_j^*(x) \leqq \varepsilon,\ \forall x \in K,\ \forall j \geqq j_0. \tag{1.3}$$

DÉMONSTRATION. Le problème étant local, on peut se ramener à la situation où Ω est un sous-ensemble analytique d'un certain polydisque U' de $\mathbf{C}^N$ tel que la suite (u_j) soit uniformément majorée sur Ω. Modulo un changement de variables dans $\mathbf{C}^N$, on peut trouver un polydisque $U \subset\subset U'$ tel que pour tout $I = \{i_1 < \ldots < i_n\} \subset \{1, 2, \ldots, N\}$ la projection π_I: $\Omega \cap U \to U_I$ sur le n-plan de coordonnées $(z_{i_1}, \ldots, z_{i_n})$ soit propre à fibres finies. De plus pour chaque I il existe un sous-ensemble analytique $S_I \subset U_I$ tel que si $Y_I := \pi_I^{-1}(S_I)$ l'application $\pi_I : (\Omega \cap U) \backslash Y_I \to U_I \backslash S_I$ soit revêtement fini à m_I feuillets (voir [Na]). Alors la fonction définie pour chaque j par la formule:

$$u_j^I(y) = \sup\{u_j(x); \pi_I(x) = y\},\ y \in U_I \backslash S_I. \tag{1.4}$$

est p.s.h. et bornée sur $U_I \backslash S_I$. On peut donc la prolonger en une fonction $\tilde{u}_j^I$ p.s.h. et bornée sur U_I; de plus la suite $(\tilde{u}_j^I)$ est uniformément majorée sur U_I et d'après (1.2) on a

$$\limsup_{j \to \infty} \tilde{u}_j^I(y) \leqq 0\ \ \forall y \in U_I. \tag{1.5}$$

Soit ω un ouvert de Ω tel que $\omega \subset\subset \Omega$ et soit $\varepsilon > 0$. Comme $\pi_I(\omega) \subset\subset U_I$, le lemme de Hartogs classique ([Lel, 1]) montre qu'il existe un entier $j_I > 1$ tel que l'on ait:

$$\tilde{u}_j^I(y) \leqq \varepsilon,\ \forall y \in \pi_I(\omega),\ \forall j \geqq j_I. \tag{1.6}$$

Les inégalités (1.6) ont lieu pour chaque multi-indice $I \subset \{1, 2, \ldots, N\}$ de longueur n. De (1.4) et (1.3) il résulte alors que pour chaque I, on a:

$$u_j(x) \leqq \varepsilon,\ \forall x \in \omega \backslash Y_I,\ \forall j \geqq j_I. \tag{1.7}$$

Il en résulte facilement qu'il existe un entier $j_0 > 1$ tel que $u_j(x) \leqq \varepsilon$ pour tout $x \in \omega_{\text{reg}}$ et $j \geqq j_0$. Par régularisation, il en résulte que (1.3) est vérifiée avec ω au lieu de K. Le théorème est prouvé.

Dans toute la suite on notera $P(X)$ (resp $\tilde{P}(X)$) le cône des fonctions p.s.h. (resp faiblement p.s.h.) sur X, non identiquement égale à $-\infty$ sur aucune composante irréductible de X.

L'opérateur de Monge-Ampère complexe $(dd^c u)^n$ est bien défini pour u p.s.h. localement bornée sur la variété analytique complexe X_{reg} [B-T,2]. Il en résulte que si $u \in \tilde{P}(X) \cap L^\infty_{\text{loc}}(X)$, alors $(dd^c u)^n$ est un courant positif fermé de bidegré (n, n) sur la variété complexe X_{reg}, nous voulons prolonger ce courant par 0 sur X_{sing}.

LEMME 1.7. *Soit* $u \in \tilde{P}(X) \cap L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(X)$. *Alors le courant positif fermé* $(dd^c u)^n$ *sur* X_{reg}, *est de masse localement fini au voisinage de chaque point de* X_{sing} i.e. *pour toute partie compacte* $E \subset X$, *on a*

$$\int_{E \cap X_{\mathrm{reg}}} (dd^c u)^n < +\infty. \tag{1.8}$$

DÉMONSTRATION. Le problème étant local, on peut se ramener par un plongement local au cas où X est un sous-ensemble analytique de dimension pure n d'un certain polydisque U' de $\mathbf{C}^N$ et u faiblement p.s.h. et bornée sur $X \cap U'$. Après changement de coordonnées dans $\mathbf{C}^N$, on peut trouver un polydisque $U \subset\subset U'$ tel que pour tout multi-indice $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ avec $1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leqq N$, la projection π_I: $X \cap U \to U_I$ soit propre à fibres finies et en dehors d'un sous-ensemble analytique $S_I \subset U_I$, $\pi: X \cap U_I \backslash Y_I \to U_1 \backslash S_I$ soit un revêtement fini, où $Y_I = \pi_I^{-1}(S_I)$ (voir la preuve du Théorème 1.6). Posons alors pour chaque I,

$$u_I(y) = \sum_{\pi_I(x) = y} u(x), \; y \in U_I \backslash S_I. \tag{1.9}$$

u_I est p.s.h. bornée sur $U_I \backslash S_I \subset \mathbf{C}_I$. Elle se prolonge donc en une fonction p.s.h. $\tilde{u}_I$ bornée sur la polydisque U_I. De plus on a

$$(\pi_I)_*(dd^c u)^n = (dd^c u_I)^n \text{ sur } U_I \backslash S_I,$$

au sens des courants, l'image directe étant définie par dualité.

Il en résulte quitte à rétrécir U, que l'on a pour chaque I:

$$\int_{X \cap U \backslash Y_I} (dd^c u)^n = \int_{U_I \backslash S_I} (dd^c u_I)^n = \int_{U_I} (dd^c \tilde{u}_I)^n < +\infty \tag{1.10}$$

puisque le courant $(dd^c \tilde{u}_I)^n$ est de masse localement finie et ne charge pas les ensembles pluripolaires de U_I.

Il découle de (1.8) l'estimation suivante

$$\int_{U \cap X_{\mathrm{reg}}} (dd^c u)^n \leqq \sum_I \int_{U_I} (dd^c \tilde{u}_I)^n < +\infty. \tag{1.11}$$

Ce qui prouve notre assertion et par là même l'estimation (1.6).

Le lemme permet donc de poser pour $u \in \tilde{P}(X) \cap L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(X)$ et E compact $\subset X$:

$$\int_E (dd^c u)^n := \int_{E \cap X_{\mathrm{reg}}} (dd^c u)^n. \tag{1.12}$$

Pour chaque ouvert $\Omega \subset X$, et E compact $\subset \Omega$, on peut définir la capacité de E relativement à Ω par

$$\mathscr{C}(E;\Omega) := \sup\left\{\int_E (dd^c u)^n;\ u \in \tilde{P}(\Omega), 0 \leqq u \leqq 1\right\} \tag{1.13}$$

Par rapport à la définition de Bedford ([Bd]) nous avons pris la borne supérieure des masses de Monge Ampère sur E pour toutes les fonctions faiblement p.s.h. et pas seulement les fonctions p.s.h. sur Ω.

En fait le résultat est le même car d'après Bedford [Bd], on a:

$$\mathscr{C}(E;\Omega) = \int_E (dd^c h^*_{E,\Omega})^n \tag{1.14}$$

où $h_{E,\Omega}$ est la fonction extrémale associée à (E,Ω) et définie par

$$h_{E,\Omega}(x) := \sup\{u(x);\ u \in P(\Omega),\ u \leqq 1 \text{ et } u|_E \leqq 0\},\ x \in \Omega. \tag{1.15}$$

Le fait de considérer dans (1.11) des fonctions faiblement p.s.h. est motivé par la formule (1.14) car en général la fonction $h^*_{K,\Omega}$ n'est pas nécessairement p.s.h. comme le montre l'exemple suivant:

Exemple 1.8. *Soit* $X := \{(x,y) \in \mathbf{C}^2;\ xy = 0\}$, $\Omega := \{(x,y) \in X;\ |x| < e,\ |y| < e\}$ *et* $K = \{(x,y) \in \Omega;\ y = 0$ *et* $|x| \leqq 1\}$. *Alors on vérifie facilement les formules suivantes:*

$$\begin{aligned} h_{K,\Omega}(x,0) &= \log^+|x|, && \textit{si } |x| < e \\ h_{K,\Omega}(0,y) &= 1, && \textit{si } 0 < |y| < e. \end{aligned}$$

On en déduit que:

$$\begin{aligned} h^*_{K,\Omega}(x,0) &= \log^+|x| && \textit{si } 0 < |x| < e \\ h^*_{K,\Omega}(0,y) &= 1 \textit{ si } |y| < e \end{aligned}$$

et donc $h^*_{K,\Omega}$ *n'est pas* p.s.h. *au voisinage de* $(0,0)$.

D'après Bedford ([Bd)] la capacité extérieure $C^*(\Omega \cap X_{\text{sing}};\Omega) = 0$, ce qui prouve que la formule (1.10) définit $(dd^c u)^n$ comme un courant positif de masse localement fini sur X pour $u \in \tilde{P}(X) \cap L^\infty_{\text{loc}}(X)$, qui ne charge pas l'ensemble X_{sing}.

Rappelons qu'un sous-ensemble $E \subset X$ est dit pluripolaire si pour tout $a \in E$, il existe un ouvert ω de X contenant a, une function $u \in P(\omega)$ telle que $u|_{E\cap\omega} = -\infty$.

D'après Bedford ([Bd]) le théorème de Josefson s'étend au cas d'un espace de Stein i.e. si $E \subset X$ est pluripolaire alors il existe $u \in P(X)$ telle que $u|E = -\infty$ (voir [J] dans le cas $X = \mathbf{C}^n$).

Nous aurons besoin du Principe du maximum et du principe de domination pour l'opérateur de Monge Ampère complexe.

PRINCIPE DU MAXIMUM 1.9. Soit $\Omega \subset\subset X$ et $u, v \in \tilde{P}(\Omega) \cap L^{\infty}_{\text{loc}}(\Omega)$ telles que $u^* \geqq v^*$ sur $b\Omega$ et $(dd^c u^*)^n \leqq (dd^c v)^n$ sur Ω. Alors on a $u^* \geqq v^*$ sur Ω.

PRINCIPE DE DOMINATION 1.10. Soit $\Omega \subset\subset X$ un ouvert, $u, v \in \tilde{P}(\Omega) \cap L^{\infty}_{\text{loc}}(\Omega)$ vérifiant les deux propriétés suivantes:

(i) $\limsup_{x \to b\Omega} |u^*(x) - v^*(x)| = 0$

(ii) $\int_{\{u^* < v\}} (dd^c u^*)^n = 0.$

Alors $v^* \leqq u^*$ sur Ω.

Ces deux résultats se démontrent à partir du Théorème de comparaison de Bedford [Bd] suivant la méthode initiée par Bedford et Taylor ([B-T, 2]).

Une étude complète des courants de type Monge Ampère dans le cas singulier est faite par J. P. Demailly dans [*D*].

§2. Mesures et potentiels capacitaires extrémaux.

Dans ce paragraphe X sera un *espace de Stein de dimension pure n*. Un ouvert $\Omega \subset X$ est dit *hyperconvexe* s'il existe une fonction p.s.h. $\rho : \Omega \to]-\infty, 0[$ telle que $\{x \in \Omega; \rho(x) < c\} \subset\subset \Omega$ pour tout $c < 0$. (On dira que ρ est une fonction p.s.h. négative exhaustive sur Ω).

On appellera condensateur sur X la donnée d'un couple (K, Ω) où Ω est un ouvert hyperconvexe de X et K un compact de Ω qui rencontre chaque composante irréductible de Ω en un ensemble non pluripolaire.

A chaque condensateur (K, Ω) on associe la fonction extrémale

$$h_{K,\Omega}(x) := \sup \{u(x); u \in P(\Omega), u \leqq 1 \text{ et } u/K \leqq 0\}, \ x \in \Omega. \tag{2.1}$$

D'après Bedford et Taylor [B-T,2], la fonction $h^*_{K,\Omega}$ est faiblement p.s.h. sur Ω et vérifie l'équation de Monge Ampère Complexe:

$$(dd^c h^*_{K,\Omega})^n = 0 \text{ sur } \Omega \backslash K. \tag{2.2}$$

La mesure de Radon positive $\mu_{K,\Omega}$ à laquelle s'identifie le courant positif $(dd^c h^*_{K,\Omega})^n$, modulo le choix d'une forme volume sur la variété complexe X_{reg}, est donc portée par K et de masse totale égale à la capacité $\mathscr{C}(K, \Omega)$ du condensateur $c = (K, \Omega)$. On l'appellera *mesure d'équilibre* du condensateur $c = (K, \Omega)$ et on la notera μ_c. $h^*_{K,\Omega}$ sera dit *potentiel d'équilibre* du condensateur c.

La propriété essentielle de cette mesure est donnée par

PROPOSITION 2.1. *Soit $c = (K, \Omega)$ un condensateur de X et μ_c sa mesure d'équilibre. Alors pour toute partie borélienne $E \subset K$ telle que $\mu_c(E) = \mu_c(K)$, on a $h^*_{E,\Omega} = h^*_{K,\Omega}$ sur Ω.*

DÉMONSTRATION. 1) Supposons d'abord $\Omega \subset\subset X$. Soit ρ une fonction p.s.h. négative et exhaustive sur Ω. Il existe une constante $A > 0$ telle que $A\rho + 1 \leqq 0$

sur K. On a alors $A\rho + 1 \leqq h_{K,\Omega}$ sur Ω et puisque $E \subset K$, on a aussi $h_{K,\Omega} \leqq h_{E,\Omega}$. Il en résulte que $A\rho + 1 \leqq h^*_{K,\Omega} \leqq h^*_{E,\Omega}$ sur Ω. Comme ρ tend vers 0 au bord de Ω, on en déduit que les deux fonctions faiblement p.s.h. sur Ω tendent vers 1 au bord de Ω. Pour prouver que $h^*_{E,\Omega} \leqq h^*_{K,\Omega}$ sur Ω, il suffit donc, d'après le principe de domination pour l'opérateur de Monge-Ampère Complexe rappelé au §1, de prouver que l'ensemble $\{x \in \Omega;\ h^*_{K,\Omega}(x) < h^*_{E,\Omega}(x)\}$ est de $(dd^c h^*_{K,\Omega})^n$ masse nulle dans Ω. En effet par définition des fonction extrémales, les ensembles $N_1 := \{x \in \Omega; h_{K,\Omega}(x) < h^*_{K,\Omega}(x)\}$ et $N_2 := \{x \in \Omega; h_{E,\Omega}(x) < h^*_{E,\Omega}(x)\}$ sont, à un ensemble pluripolaire près qui est $\Omega \cap X_{\text{sing}}$, des ensembles pluripolaires d'après ([B-T,2]). Par conséquent l'ensemble $N := N_1 \cup N_2$ est pluripolaire dans Ω et donc $\mu_c(N) = 0$. Il en résulte que l'ensemble $\{x \in \Omega; h^*_{K,\Omega}(x) < h^*_{E,\Omega}(x)\} \subset (\Omega \backslash E) \cup N$, avec $\mu_c(N) = 0$. Comme d'après (2.2) le support de μ_c est contenu dans K, et que par hypothèse $\mu_c(K \backslash E) = 0$, il en résulte que l'ensemble $\{h^*_{K,\Omega} < h^*_{E,\Omega}\}$ est de μ_c-mesure nulle. Ce qui prouve notre assertion. On en conclut que $h^*_{E,\Omega} \leqq h^*_{K,\Omega}$ sur Ω. D'où $h^*_{E,\Omega} = h^*_{K,\Omega}$ sur Ω.

2) Dans le cas général, on considère $\Omega_\alpha := \{x \in \Omega; h^*_{K,\Omega}(x) < \alpha\}$ avec $\alpha \in]0, 1[$ tel que $K \subset \Omega_\alpha \subset\subset \Omega$. Alors on montre facilement que $h^*_{E,\Omega_\alpha} = \dfrac{1}{\alpha} h^*_{E,\Omega}$ sur Ω_α pour tout $E \subset K$, de sorte que le condensateur $c_\alpha := (K, \Omega_\alpha)$ a pour mesure d'équilibre $\mu_{c_\alpha} = \dfrac{1}{\alpha^n} \cdot \mu_c$. Le résultat de la proposition est alors une conséquence du premier cas appliqué à $\Omega_\alpha \subset\subset \Omega$.

PROPOSITION 2.2. *Soit (K, Ω) un condensateur de X et $E \subset K$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $h^*_{E,\Omega} = h^*_{K,\Omega}$ *sur* Ω.

(ii) *Il existe un ouvert $D \subset X$ tel que $\hat{K}_\Omega \subset D \subset\subset \Omega$ et $h^*_{E,D} = h^*_{K,D}$ sur D.*

(iii) *Pour tout ouvert G de X tel que $\hat{K}_\Omega \subset G$, on a $h^*_{E,G} = h^*_{K,G}$ sur G.*

DÉMONSTRATION. Il est clair que (iii) $\Rightarrow$ (i). Il suffit donc de prouver que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii).

1) (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit ρ une fonction p.s.h. négative et exhaustive sur Ω et $\alpha \in]-1, 0[$ tel que $K \subset \{x \in \Omega; \rho(x) < \alpha\} \subset\subset \Omega$. Posons alors $D := \{x \in \Omega;\ \rho(x) < \alpha\}$. On a bien sûr $\hat{K}_\Omega \subset D \subset\subset \Omega$. Montrons que $h^*_{K,D} = h^*_{E,D}$ sur D. Soit $u \in P(D)$ telle que $u \leqq 1$ et $u|E \leqq 0$. Posons

$$v = \begin{cases} \sup\{u, \rho - c\} & \text{sur } D \\ \rho - c & \text{sur } \Omega \backslash D. \end{cases}$$

Alors v est p.s.h. sur Ω, $v \leqq 1$ et $v|E \leqq 0$; donc $v \leqq h^*_{E,\Omega}$ sur Ω. Comme d'après (i) $h^*_{E,\Omega} = h^*_{K,\Omega}$, on en déduit que $v \leqq 0$ sur $K \backslash A$ où $A := \{x \in \Omega; h_{K,\Omega}(x) < h^*_{K,\Omega}(x)\}$ et donc $u \leqq 0$ sur $K \backslash A$. On a alors par définition de la fonction extrémale,

$u \leqq h_{K\setminus A,D}$. Comme A est pluripolaire ([Bd], [(B-T,2]), on voit facilement, grâce au théorème de Josefson rappelé au §1, que $h^*_{K\setminus A,D} = h^*_{K,D}$ et donc $u \leqq h^*_{K,D}$ sur D. On a finalement prouvé que $h^*_{E,D} \leqq h^*_{K,D}$ sur D. Comme l'autre inégalité est évidente, on obtient (ii).

2) (ii) $\Rightarrow$ (iii). Soit $D \subset\subset X$ l'ouvert fourni par la condition (ii). Soit G un ouvert quelconque de X tel que $\hat{K}_\Omega \subset G$. Soit $\rho: \Omega \to]-\infty, 0[$ p.s.h. exhaustive sur Ω et $\alpha < 1$ tel que $K \subset \Omega_\alpha := \{x \in \Omega; \rho(x) < \alpha\} \subset\subset D \cap G$. Soit $u \in P(G)$, $u|E \leqq 0$. Posons comme précédemment

$$v = \begin{cases} \sup\{u, \rho - \alpha\} & \text{sur } \Omega_\alpha \\ \rho - \alpha & \text{sur } D\setminus\Omega_\alpha. \end{cases}$$

Alors v est p.s.h. sur D, $v|E \leqq 0$ et $v \leqq M := \sup_{\bar{D}}(\rho - \alpha)$. Par suite, $v \leqq M h_{E,D}$ sur D. Puisque $h^*_{E,D} = h^*_{K,D}$, on en déduit comme précédemment que $u \leqq h_{K\setminus A,G}$ et donc $h^*_{E,G} \leqq h^*_{K,G}$. L'autre inégalité étant évidente, on a donc $h^*_{E,G} = h^*_{K,G}$, d'où (iii).

Nous allons maintenant introduire la notion de régularité:

DÉFINITION 2.3. Soit (K, Ω) un condensateur de X. On dira que K est P-régulier (dans Ω) au point a si $h^*_{K,\Omega}(a) = 0$. Cela implique $a \in \hat{K}_\Omega$. Un argument du type utilisé dans la preuve de la proposition 2.2 montre que si $G \supset \hat{K}_\Omega$, alors la condition $h^*_{K,\Omega}(a) = 0$ équivaut à $h^*_{K,G} = (a) = 0$.

Le compact K est dit P-régulier (dans Ω) si $h^*_{K,\Omega} = 0$ sur K.

Des exemples de tels compact se trouvent dans ([Sa,2], [P,2]). D'autres exemples seront donnés au paragraphe 3.

Nous allons maintenant énoncer un principe du maximum. Soit $c = (K, \Omega)$ un condensateur P-régulier de X. Pour une fonction u p.s.h. au voisinage de K, on posera:

$$c\text{-sup ess}\, u := \inf\{\sup_E u;\ E \subset K, h^*_{E,\Omega} = h^*_{K,\Omega}\} \tag{2.3}$$

PROPOSITION 2.4. *Soit $c = (K, \Omega)$ un condensateur P-régulier ce X. Alors pour toute fonction u* p.s.h. *sur un voisinage de $\hat{K}_\Omega$, on a*

$$c\text{-}\sup_K \text{ess}\, u = \sup_K u. \tag{2.4}$$

DÉMONSTRATION. Il est clair par définition que c-sup $\text{ess}_K\, u \leqq \sup_K u$. Inversement supposons que u soit p.s.h. sur un ouvert $D \supset \hat{K}_\Omega$ et soit G un ouvert tel que $\hat{K}_\Omega \subset G \subset\subset D$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe une partie $E \subset K$ telle que $h^*_{E,\Omega} = h^*_{K,\Omega}$ et $\sup_E u \leqq m + \varepsilon$ où $m := c$-sup $\text{ess}_K\, u$. Posons $M = \sup_{\bar{G}} u$; par définition de $h_{E,G}$, il en résulte que $u \leqq m + \varepsilon + (M - m - \varepsilon) h^*_{E,G}$. D'après la Proposition 2.2, on a aussi $h^*_{E,G} = h^*_{K,G}$ et par suite on en déduit que $u \leqq (m + \varepsilon) + (M - m - \varepsilon)h^*_{K,G}$. La P-régularité se traduit par la condition $h^*_{K,G} = 0$ sur K. Il en résulte alors que $u \leqq m + \varepsilon$ sur K; d'où $\sup_K u + \varepsilon$. Comme ε est arbitraire, on en déduit (2.4).

Nous allons maintenant prouver une version plus précise du théorème 1.6:

THÉORÈME 2.5. *Soit (K, Ω) un condensateur de X et (u_j) une suite localement majorée de fonctions faiblement* p.s.h. *sur Ω. On suppose qu'il existe une partie $E \subset K$ vérifiant $h^*_{E,\Omega} = h^*_{K,\Omega}$ et telle que:*

$$\limsup_{j \to \infty} u_j^*(x) \leqq 0, \forall x \in E. \tag{2.5}$$

Alors si K est P-régulier au point a, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $j_0 := j_0(\varepsilon, K) > 1$ et un voisinage ω de a tels que:

$$u_j^*(x) \leqq \varepsilon \quad \forall x \in \omega, \forall j \geqq j_0. \tag{2.6}$$

DÉMONSTRATION. Posons $u = \limsup_{j \to \infty} u_j$. Compte tenu de l'hypothèse, u^* est faiblement, p.s.h. sur Ω. Posons $S' := \{x \in \Omega; u(x) < u^*(x)\}$ et $S := S' \cup \Omega_{\text{sing}}$. L'ensemble S est pluripolaire ([Bd], [B-T,2]) et donc d'après le théorème de Josefson dans le cas singulier rappelé au paragraphe 1 ([Bd]), on peut trouver $w \in P(X)$ telle que $w = -\infty$ sur S. Soit D un ouvert de X tel que $\hat{K}_\Omega \subset D \subset\subset \Omega$. Quitte à remplacer w par $Aw + B$ (où $A > 0, B \in \mathrm{R}$), on peut toujours supposer que $w \leqq 0$ sur K et $w \leqq 1$ sur D. Soit $\varepsilon > 0$, d'après le théorème 1.2, $u^* + \varepsilon w$ est p.s.h. sur Ω et si $M := \sup_{\bar{D}} u^*$, on a $u^* + \varepsilon w \leqq (M + \varepsilon) h_{E \setminus S, D}$. Comme S est pluripolaire, on montre facilement que $h^*_{E \setminus S,\Omega} = h^*_{E,\Omega}$, ce qui d'après l'hypothèse sur E implique $u^* + \varepsilon \cdot w \leqq (M + \varepsilon)h^*_{K,D}$. On en déduit en passant à la limite sur $\varepsilon \to 0$, que $u^* \leqq M h^*_{K,D}$ sur $D \setminus w^{-1}(-\infty)$.

Comme l'ensemble $w^{-1}(-\infty)$ est pluripolaire, on en déduit que $u^* \leqq M \cdot h^*_{K,D}$ sur D et donc $u^*(a) \leqq M h^*_{K,D}(a) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{x \in D; u^*(x) < \varepsilon/2\}$ est un voisinage de a et une application directe du Théorème 1.6 donne immédiatement (2.6).

Les résultats précédent mettent clairement en évidence l'importance de la condition $h^*_{E,\Omega} = h^*_{K,\Omega}$ pour une partie $E \subset K$. Cela justifie la définition suivante:

DÉFINITION 2.6. Soit (K, Ω) un condensateur de X. Une mesure de Radon positive μ sur K est dite *extrémale* si pour toute partie borélienne $E \subset K$ telle que $\mu(E) = \mu(K)$, on a $h^*_{E,\Omega} = h^*_{K,\Omega}$.

EXEMPLE 2.7. Soit (K, Ω) un condensateur tel que $\hat{K}_\Omega = K$. Alors pour tout ouvert $G \supset K$, $\mu_{K,G} = (dd^c h^*_{K,G})^n$ est une mesure extrémale sur K, d'après les propositions 2.1 et 2.2.

EXEMPLE 2.8. Soit X une variété kählérienne de (1.1) forme fermée ω. On note $\omega_p = \frac{1}{p!}\omega^p$ la forme volume de la dimension complexe $p \leqq n = \dim X$. Soit $D \subset\subset X$, un domaine à bord lisse et $G_D(x, y)$ le noyau de Green de D pour le Laplacien Kählérien sur X associée à ω. On a alors

$$dd^c G_D(\cdot, y) \wedge \omega_{n-1} = c_n \delta_y \cdot \omega_n \text{ sur } D \tag{2.7}$$

au sens des courants, δy étant la mesure de Dirac au point y et c_n étant une constante. Prolongeons continument G_D par 0 sur $X \backslash \bar{D}$. On a alors la formule suivante dite "de Poissons-Jensen", qui résulte de (2.7)

$$u(x) = c_n^{-1} \int_{bD} u d^c G_D(x,\cdot) \wedge \omega_{n-1} - c_n^{-1} \int_D G_D(x,\cdot) dd^c u \wedge \omega_{n-1} \tag{2.8}$$

pour toute fonction u sousharmonique sur $\bar{D}$.

La mesure définie par la $2n - 1$ forme $d^c G_D(x,\cdot) \wedge \omega_{n-1}$ sur bD est la mesure harmonique sur bD au point $x \in D$. On la notera ν_x. On sait que pour deux points $x, x' \in D$ ν_x et $\nu_{x'}$ sont équivalentes. Fixons $a \in D$, il en résulte grâce à (2.8) que $u(x) \leqq \nu_a$ -sup ess$_{bD}\, u$ pour tout $x \in D$. On en déduit grâce à la régularité de bD, que $\sup_{\bar{D}} u = \nu_a$ -sup ess$_{bD}\, u$ pour toute fonction u p.s.h. sur un voisinage de $\bar{D}$. La mesure harmonique ν_a sur $K = \bar{D}$ est une mesure extrémale sur K d'après la Proposition 2.4.

REMARQUE. Si (K, Ω) est un condensateur P-régulier alors pour toute mesure extrémale μ sur K on a μ -sup ess$_K\, u = c$ -sup ess$_K\, u = \sup_K u$, d'après la Proposition 2.4.

Nous allons déterminer le support de la mesure d'équilibre d'un compact non pluripolaire.

Soit (K, Ω) un condensateur de X et K_0 la fermeture de l'ensemble des points réguliers de K; $K_0 := \overline{\{x \in K; h^*_{K,\Omega}(x) = 0\}}$. On désigne par $\partial_s(K_0)$ la frontière de Shilov de l'algèbre uniforme $A(K_0)$ engendrée par les restrictions à K_0 des fonctions holomorphes sur Ω. Notons que ces définitions ne changent pas si on remplace Ω par un ouvert $D \supset \hat{K}_\Omega$.

PROPOSITION 2.9. *Soit (K, Ω) un condensateur de X. Alors on a les propriétés suivantes:*

(i) *Pour toute mesure extrémale μ sur K, on a $\partial_s K_0 \subset$ supp(μ).*

(ii) *Pour tout ouvert $D \supset \hat{K}_\Omega$, le support de la mesure d'équilibre $(dd^c h^*_{K,D})^n$ coïncide avec $\partial_s K_0$.*

DÉMONSTRATION. Soit μ une mesure extrémale sur K et $a \in K_0 \backslash$ supp μ. Il existe alors un voisinage ω de a dans K tel que $\mu(\omega) = 0$. Comme $K \backslash K_0$ est pluripolaire [B-T,2], on en déduit facilement que $h^*_{K,\Omega} = h^*_{K_0,\Omega}$ et $h^*_{K\setminus\omega,\Omega} = h^*_{K_0\setminus\omega,\Omega}$. L'hypothèse sur μ permet d'en déduire que $h^*_{K_0\setminus\omega,\Omega} = h^*_{K_0,\Omega}$. Cela entraîne en particulier que pour tout $f \in A(K_0)$, on a $\|f\|_{K_0} = \|f\|_{K_0\setminus\omega}$. Ce qui prouve que $a \notin \partial_s K_0$ d'après ([H], Théorème 3.1.18). La propriété (i) est démontrée.

Pour prouver (ii), il suffit de montrer que le support de $(dd^c h^*_{K,D})^n$ est contenu dans $\partial_s K_0$. Posons $K_1 := \partial_s K_0$, on a alors pour tout $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ $\|f\|_{K_1} = \|f\|_{K_0}$. Ce qui signifie que K_0 et K_1 ont la même enveloppe $\mathcal{O}(\Omega)$-convexe et puisque Ω est de Stein, ils ont la même enveloppe $P(\Omega)$-convexe ([G-R], Corollaire 4, p. 218). On en déduit alors que $h_{K_1,\Omega} = h_{K_0,\Omega}$ et comme $K\setminus K_0$ est pluripolaire, on a aussi $h^*_{K,\Omega} = h^*_{K_0,\Omega}$, d'où finalement $h^*_{K_1,\Omega} = h^*_{K,\Omega}$. Puisque $D \supset \hat{K}_\Omega$, il résulte de la proposition 2.2 que l'on a $h^*_{K_1,D} = h^*_{K,D}$. Par suite d'après (2.2) on a $(dd^c h^*_{K,D})^n = (dd^c h^*_{K_1,D})^n = 0$ sur $D\setminus K_1$ ce qui prouve que le support de $(dd^c h^*_{K,D})^n$ est contenu dans $K_1 = \partial_s K_0$.

Remarques. 1) La proposition 2.1 a été prouvée dans le cas où $X = \mathbf{C}^n$ par l'auteur et Nguyen T.V. ([N-Z]).

2) Lorsque $X = \mathbf{C}^n$, Bedford et Taylor [B-T,3] ont prouvé que la condition $h^*_{E,\Omega} = h^*_{K,\Omega}$ est équivalente à l'égalité des capacités $\mathscr{C}(E;\Omega) = \mathscr{C}(K;\Omega)$.

Autrement dit les mesures extrémales de la définition 2.6 généralisent au cas d'un espace de Stein, les "détermined measures" que J. Ullman a introduites dans $\mathbf{C}$ ([U]) et que N. Levenberg a considéré dans $\mathbf{C}^n$ ([Lev]).

3) Le support de la mesure d'équilibre a été déterminé pour un compact régulier par l'auteur et Nguyen T.V. ([N-Z]). Le cas d'un compact non pluripolaire de $\mathbf{C}^n$ a été traité par Bedford et Taylor ([B-T,3]).

§3. Potentiels paraboliques sur un espace de Stein et Fonctions extrémales associées.

Nous voulons définir une fonction de Green avec pôle à l'infini sur certains espaces de Stein.

Dans toute la suite nous supposerons que X est un espace de Stein de dimension n muni d'une fonction $g: X \to [-\infty, +\infty[$ p.s.h. continue et exhaustive et vérifiant l'équation de Monge-Ampère Complexe au sens des courants:

$$(dd^c g)^n = 0 \quad \text{sur } X\setminus g^{-1}(-\infty). \tag{3.1}$$

L'ensemble pluripolaire $g^{-1}(-\infty)$ est donc compact et constitute l'ensemble singulier de g, nous verrons qu'il est non vide.

La fonction g sera dite potentiel parabolique sur X et (X, g) sera dit espace parabolique suivant la terminologie de W. Stoll ([St]).

On désigne par $\mathscr{L}_g(X)$ la classe des fonctions $v \in P(X)$ vérifiant

$$v(x) \leqq c_v + g^+(x), \ \forall x \in X \tag{3.2}$$

où c_v est une constante ne dépendant que de v et $g^+ := \sup\{g, 0\}$. On désignera aussi par $\tilde{\mathscr{L}}_g(X)$ la classe des fonctions $v \in \tilde{\mathscr{P}}(X)$ et vérifiant (3.2).

A toute partie $E \subset\subset X$, on associe la fonction extrémale de E, relativement au potentiel g, définie par:

$$(3.3) \qquad g_E(x) := \sup\{v(x); v \in \mathscr{L}_g(X), v \mid E \leqq 0\}, \quad x \in X.$$

On définit également les fonctions holomorphes sur X à croissance g-polynomiale sur X: si $d \geqq 1$ est un entier, on désignera par $\mathscr{P}_g^d(X)$ l'espace vectoriel des fonctions f holomorphes sur X et vérifiant:

$$(3.4) \qquad |f(x)| \leqq c_f(1 + \tau(x))^d, \quad \forall x \in X,$$

où $\tau(x) := \exp g(x)$ pour $x \in X$, et $c_f > 0$ est une constante ne dépendant que de f.

Donnons tout d'abord quelques exemples élémentaires:

EXEMPLE 3.1. L'exemple classiique est $X = \mathbf{C}^n$, $n \geqq 1$ muni du potentiel parabolique $l(z) = \log|z|$. Dans ce cas la fonction (3.3) n'est autre que la fonction extrémale de Siciak-Zaharyata que nous noterons l_E dans la suite ([Sc,1], [Za,2]).

EXEMPLE 3.2. Soit $\pi: X \to \mathbf{C}^n$ une application holomorphe et propre, alors $g(x) := \log|\pi(x)|$ est un potentiel parabolique sur X. En particulier si X est une variété algébrique affine de dimension n, il résulte du théorème de Normalisation qu'il existe $\pi: X \to \mathbf{C}^n$ holomorphe et propre et donc X peut être muni d'un potentiel parabolique. Ce cas fera l'objet d'une étude plus détaillée au §5.

EXEMPLE 3.3. Soit $(P_j)_{j \geqq 1}$ une suite de polynômes sur $\mathbf{C}^n$ et $d_j := \deg P_j, j \geqq 1$. On suppose que l'ensemble $A := \cup_{j=1}^{\infty} P_j^{-1}(0)$ est fermé et $0 \notin A$. Alors $X = \mathbf{C}^n \setminus A$ est un ouvert de Stein et si on pose $M_j := \sup_{|z|=1} |P_j(z)|$ ($j \geqq 1$), la fonction $v(z) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j d_j} \log \frac{|P_j(z)|}{M_j}$, est p.s.h. sur $\mathbf{C}^n$, pluriharmonique sur X et $v^{-1}(-\infty) = A$. De plus $v(z) \leqq \log^+|z|$ sur $\mathbf{C}^n$.

Par conséquent la function $g(z) := \log|z|^2 - v(z)$ est un potentiel parabolique sur X.

Le résultat suivant permet de construire d'autres exemples.

PROPOSITION 3.4 ([St]). *Pour chaque $i = 1, 2$, soit X_i un espace complexe de dimension n_i et g_i une fonction* p.s.h. *localement bornée sur un ouvert Ω_i de X_i telle que $(dd^c g_i)^{n_i} = 0$ sur Ω_i.*

Posons pour $x = (x_1, x_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$:

$$u(x) := \log(e^{g_1(x_1)} + e^{g_2(x_2)}) \text{ et } v(x) := \sup\{g_1(x_1), g_2(x_2)\}.$$

Alors u, v sont p.s.h. *sur Ω et vérifient*

$$(dd^c u)^n = (dd^c v)^n = 0 \text{ sur } \Omega\text{; où } n = n_1 + n_2.$$

DÉMONSTRATION. D'après le Théorème 1.2 de Fornaess-Narasimhan et ([H], corollaire 1.6.8) u est une fonction p.s.h. sur X. Pour montrer $(dd^c u)^n = 0$ sur $\Omega_1 \times \Omega_2$, nous allons reprendre un calcul fait par Stoll ([St]).

Posons

$$\varphi_1(x) = \exp g_1(x_1), \quad \varphi_2(x) := \exp g_2(x_2)$$

et

$$\varphi(x) := \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \text{ pour } x \in X.$$

Comme tous les courants que nous allons considérer ne chargent pas les ensembles pluripolaires, on peut supposer que X est une variété complexe, de sorte que par régularisation locale, tous les calculs que nous allons faire ci-dessous sont justifiés grâce aux Théorèmes de convergence pour l'opérateur de Monge-Ampère Complexe (voir [B-T,2] et [D]).

Puisque φ_1 et φ_2 ne dépendent que de l'une des deux variables x_1, x_2, on a:

$$(3.5) \qquad (dd^c \varphi_1)^{k_1} = 0, (dd^c \varphi_2)^{k_2} = 0 \text{ sur } X \text{ si } k_1 > n_1, k_2 > n_2.$$

D'autre part, on a également au sens des courants:

$$dd^c \log \varphi_i = \frac{dd^c \varphi_i}{\varphi_i} - \frac{d\varphi_i \wedge d^c \varphi_i}{\varphi_i^2} \text{ sur } \{\varphi_i > 0\}, i = 1, 2.$$

L'hypothèse sur g_i entraine alors:

$$(3.6) \qquad \varphi_i (dd^c \varphi_i)^{n_i} = n_i d\varphi_i \wedge d^c \varphi_i \wedge (dd^c \varphi_i)^{n_i - 1} \text{ sur } \tilde{\Omega}_i$$
$$\text{où } \tilde{\Omega}_i = \Omega_1 \times X_2 \text{ et } \tilde{\Omega}_2 = X_1 \times \Omega_2.$$

De plus d'après (3.5) on a les deux équations suivantes:

$$(3.7) \qquad n(dd^c \varphi)^{n-1} = \binom{n}{n_1} \{n_1 (dd^c \varphi_1)^{n_1} \wedge (dd^c \varphi_2)^{n_2 - 1} + n_2 (dd\varphi_1)^{n_1 - 1} \wedge (dd^c \varphi_2)^{n_2}\}$$

$$(3.8) \qquad (dd^c \varphi)^n = \binom{n}{n_1} \cdot (dd^c \varphi_1)^{n_1} \wedge (dd^c \varphi_2)^{n_2}$$

au sens des courants sur X.

De l'équation (3.7) il résulte facilement:

$$(3.9) \qquad n d\varphi \wedge d^c \varphi \wedge (dd^c \varphi)^{n-1} = \binom{n}{n_1} \{n_1 d\varphi_1 \wedge d^c \varphi_1 \wedge (dd^c \varphi_1)^{n_1 - 1} \wedge (dd^c \varphi_2)^{n_2} + n_2 d\varphi_2 \wedge d^c \varphi_2 \wedge (dd^c \varphi_1)^{n_1} \wedge (dd^c \varphi_2)^{n_2 - 1}.\}$$

Pour obtenir cette équation nous avons utilisé le fait que $d\varphi_i \wedge d^c \varphi_i \wedge (dd^c \varphi_i)^n = 0$ pour des raisons de degré et que les 2-formes $d\varphi_1 \wedge d^c \varphi_2$ et $d\varphi_2 \wedge d^c \varphi_1$ ont même composante de bideegré (1,1).

En reportant les équations (3.6) dans (3.9), on obtient

$$(3.10)\quad nd\varphi \wedge (d^c\varphi \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} = \binom{n}{n_1}(\varphi_1 + \varphi_2)(dd^c \varphi_1)^{n_1} \wedge (dd^c \varphi_2)^{n_2}$$

au sens des courants sur $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

Les équations (3.8) et (3.10) impliquement donc:

$$\varphi^{n+1}(dd^c \log \varphi)^n = \varphi(dd^c \varphi)^n - nd\varphi \wedge d^c \varphi \wedge (dd^c \varphi)^{n-1} = 0$$

au sens des courants sur Ω. Ce qui prouve que $(dd^c u) = 0$ sur Ω.

Pour chaque entier $k \geqq 1$, la fonction définie par

$$u_k(x) = \frac{1}{k}\log\left(e^{k\cdot g_1(x_1)} + e^{k\cdot g_2(x_2)}\right),\ x \in X$$

est alors p.s.h. sur X et vérifie $(dd^c u_k)^n = 0$ sur Ω.

Comme la suite (u_k) croît vers v sur X, il résulte des théorèmes de convergence pour l'opérateur de Monge Ampère Complexe ([B-T,2]) que $(dd^c v)^n = \lim_{k\to\infty} (dd^c u_k)^n = 0$ au sens des courants sur Ω.

EXEMPLE 3.5. Soit (X_1, g_1) et (X_2, g_2) deux espaces de Stein paraboliques de dimension respective n_1 et n_2. Soit $X := X_1 \times X_2$, $n = n_1 + n_2$ et $g = \sup\{g_1, g_2\}$ alors d'après la proposition 3.4, on a $(dd^c g)^n = 0$ sur $\{g_1 > -\infty\} \times \{g_2 > -\infty\}$. Or les deux ensembles $\{g_1 > -\infty\} \times g_2^{-1}(-\infty)$ et $g_1^{-1}(-\infty) \times \{g_2 > -\infty\}$ sont pluripolaires dans X, contenus dans l'ouvert $\{g > -\infty\}$ sur lequel la fonction g est est localement bornée. Par conséquent ces ensembles ne portent pas de masse du courant $(dd^c g)^n$ et donc $(dd^c g)^n = 0$ sur $X \backslash g^{-1}(-\infty)$. Comme g est évidemment continue et exhaustive sur X, on en déduit que (X, g) est un espace parabolique. Le calcul de la fonction extrémale pour un produit de compacts se fera au §4.

Voici maintenant un résultat essentiel qui pernet de calculer la fonction extrémale g_E dans certains cas.

THÉORÈME 3.6. *Considérons les pseudoboules associées à g pour $r > r_0 := \min_X g$:*

$$K_r := \{x \in X; g(x) \leqq r\}, B_r := \{x \in X; g(x) < r\}.$$

Alors on a les deux formules suivantes ($R > r$):

$$(3.11)\qquad g_{K_r}(x) = \sup\{g(x) - r, 0\} =: (g - r)^+(x),\ x \in X$$

$$(3.12)\qquad h_{K_r, B_R}(x) = \sup\left\{\frac{g(x) - r}{R - r}, 0\right\} = \frac{(g - r)^+(x)}{R - r},\ x \in B_R.$$

DÉMONSTRATION. Il est clair que $(g-r)^+$ est p.s.h. sur X, $(g-r)^+ \in \mathscr{L}_g(X)$ et $(g-r)^+ \leqq 0$ sur K_r. On en déduit que $(g-r)^+ \leqq g_{K_r}$ sur X. Pour prouver l'inégalité inverse, soit $v \in \mathscr{L}_g(X)$ telle que $v \leqq 0$ sur K_r. On a alors $v \leqq c_v + g^+$ sur X, où c_v est une constante. Soit $\varepsilon > 0$, g étant exhaustive, il existe $R_0(\varepsilon) > r$ tel que pour tout $R > R_0(\varepsilon)$ on ait $v(x) \leqq (1+\varepsilon)(R-r)$ pour $g(x) = R$. Fixons donc $R > R_0(\varepsilon) > r$; puisque $v \leqq 0$ sur K_r, il en résulte que

$$v \leqq (1+\varepsilon)(g-r)^+ \text{ sur } b(B_R \backslash K_r). \tag{3.13}$$

D'après l'équation (3.1) on a $(dd^c(g-r)^+)^n = 0$ sur $B_R \backslash K_r$. En appliquant le principe du maximum pour l'opérateur de Monge Ampère Complexe (voir §1) on en déduit que l'inégalité (3.13) a lieu sur $B_R \backslash K_r$ et donc $v \leqq (1+\varepsilon)(g-r)^+$ sur B_R pour tout $R > R_0(\varepsilon)$. Il en résulte donc que $v \leqq (1+\varepsilon)(g-r)^+$ sur X, d'où $v \leqq (g-r)^+$ sur X. Par définition de g_{K_r} cela implique $g_{K_r} \leqq (g-r)^+$ sur X. D'où la formule (3.11). La formule (3.12) se démontre de la même façon.

Grâce à ce théorème, nous pouvons donner des exemples de calcul de la fonction g_E.

EXEMPLE 3.7. Soit $X = \mathbf{C}^n$ et q une fonction p.s.h. continue et absolutement homogène sur $\mathbf{C}^n$ i.e. $q(\lambda z) = |\lambda| q(z)$, $\forall z \in \mathbf{C}^n$, $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, telle que $q^{-1}(0) = (0)$ (par exemple une norme sur $\mathbf{C}^n$). Alors $q > 0$ sur $\mathbf{C}^n \backslash (0)$ et $\log q$ est p.s.h. sur $\mathbf{C}^n$ ([Lel,1]).

Montrons que $(dd^c \log q)^n = 0$ sur $\mathbf{C}^n \backslash (0)$. Supposons d'abord q de classe C^2. Considérons l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^{n-1}$ de dimension $n-1$ et soit $\pi : \mathbf{C}^n \backslash (0) \to \mathbf{P}^{n-1}$ l'application canonique. Comme q est absolutement homogène, il est facile de voir que l'on peut définir une $(1,1)$ forme globale ω sur $\mathbf{P}^{n-1}$ telle que $\pi^*(\omega) = dd^c \log q$ sur $\mathbf{C}^n \backslash (0)$. Puisque $\omega^n = 0$ sur $\mathbf{P}^{n-1}$, on en déduit que $(dd^c \log q)^n = \pi^*(\omega^n) = 0$ sur $\mathbf{C}^n \backslash (0)$. Si q est seulement continue, on peut l'approcher par une suite décroissante (q_j) de fonctions p.s.h. absolutement homogènes de classe C^∞ sur $\mathbf{C}^n \backslash (0)$ ([Lel, 1]). On conclut que $(dd^c \log q)^n = 0$ sur $\mathbf{C}^n \backslash (0)$ grâce au théorème de convergence ([B-T,2]).

Comme $\log q(z)_{|z| \to \infty} \sim \log |z|$ la fonction g_E pour $g = \log q$ coïncide avec la fonction l_E de Siciak-Zaharyuta. Si $K_r = z \in \mathbf{C}^n;\ q(z) \leqq r$, alors d'après le théorème 3.6 on a

$$l_{K_r}(z) = log^+ \frac{q(z)}{r} = \max\{0, \log q(z) - \log r\},\ z \in \mathbf{C}^n.$$

EXEMPLE 3.8. Soit $X = \mathbf{C}^n$ et $P : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ une application polynomiale et propre, et soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathbf{C}^n$. D'après l'exemple 3.7 on a $(dd^c \log \|z\|)^n = 0$ sur $\mathbf{C}^n \backslash (0)$. L' invariance de l'équation de Monge Ampère Complexe par les applications holomorphes montre que $(dd^c \log \|P(z)\|)^n = 0$ sur

$\mathbf{C}^n\backslash P^{-1}(0)$. Soit $d = \max \deg P_j$, la fonction $g(z) := \dfrac{1}{d}\log \|P(z)\|$ est un potentiel parabolique sur $\mathbf{C}^n$ vérifiant $g(z) \leqq C_P + \log^+ |z|$ sur $\mathbf{C}^n$, où C_P est une constante.

Supposons que $\liminf_{|z|\to\infty} \dfrac{|P(z)|}{|z|^d} > 0$. Alors $g^+(z) - \log^+(z)$ est bornée sur $\mathbf{C}^n$ de sorte que la fonction g_E n'est autre que la fonction l_E de Siciak-Zaharyuta.

Posons $K_P := \{z \in \mathbf{C}^n : \|P(z)\| \leqq 1\}$, alors d'après le théorème 3.6, on a

$$(*) \qquad l_{K_P}(z) = \frac{1}{d}\log^+ \|P(z)\|, \forall z \in \mathbf{C}^n.$$

Soit $Q : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ une application polynomiale propre et $d_j = \deg Q_j, j = 1, \ldots, n$.

Posons $\Delta_Q := \{z \in \mathbf{C}^n; |Q_1(z)| \leqq 1, \ldots, |Q_n(z)| \leqq 1\}$, alors on a

$$(**) \qquad l_{\Delta_Q}(z) = \sup\left\{\frac{1}{d_j}\log |Q_j(z)|\right\}, \forall z \in \mathbf{C}^n.$$

En effet si on pose $d := d_1 \ldots d_n$, $d'_j := \prod_{k \neq j} d_k$ et $P_j := Q_j^{d'_j}$, alors $\Delta_Q = \Delta_P = \{z \in \mathbf{C}^n; \sup_{1\leqq j \leqq n} |P_j(z)| \leqq 1\}$ et la formule $(**)$ découle de $(*)$.

Ces résultats ont été obtenus par M. Klimek ([K]) par d'autres méthodes.

Le théorème 3.6 va nous permettre de prouver le résultat suivant:

THÉORÈME 3.9. *Supposons X irréductible et soit $E \subset\subset X$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *E est pluripolaire*
(ii) *$g_E^* \equiv +\infty$ sur X*
(iii) *E est g-polaire* i.e. *il existe $v \in \mathscr{L}_g(X)$ telle que $v | E = -\infty$*

Le preuve du théorème nécessite le résultat suivant:

LEMME 3.10. *Soit $\mathscr{F} \subset \mathscr{L}_g(X)$ une classe non vide et posons $E_{\mathscr{F}} := \{x \in X; \sup_{u \in \mathscr{F}} u(x) < +\infty\}$. Alors si $\mathscr{F}$ est non localement majorée sur X, l'ensemble $E_{\mathscr{F}}$ est g-polaire* i.e. *il existe $v \in \mathscr{L}_g(X)$, telle que $v = -\infty$ sur $E_{\mathscr{F}}$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME. Par hypothèse, il existe un compact $K_0 \subset X$ et une suite (u_j) d'éléments de la classe $\mathscr{F}$ tels que $\sup_{K_0} u_j \geqq 2^j$, pour tout $j \geqq 1$. Soit $r > \sup_{K_0} g$ et posons $K := \{x \in X; g(x) \leqq r\}$.

Alors $m_j := \sup_K u_j \geqq 2^j$ pour tout $j \geqq 1$. D'après la définition (3.3) et le théorème 3.6, on a

$$(3.14) \qquad u_j \leqq m_j + (g - r)^+ \text{ sur } X, \forall_j \geqq 1.$$

D'autre part il existe $x_0 \in X$ tel que $\limsup_{j\to\infty} \{u_j(x_0) - m_j\} > -\infty$; en effet, sinon on aurait $\limsup_{j\to\infty} \exp(u_j - m_j) \leqq 0$ sur X. Comme d'après l'inégalité

(3.14), la suite $\{\exp(u_j - m_j)\}$ est localement majorée sur X, le théorème 1.6 implique l'existence d'un entier $j_0 > 1$ tel que $\exp(u_j - m_j) \leqq 1/2$ sur K pour tout $j \geqq j_0$, ce qui contredit la définition de m_j. Il en résulte, quitte à passer à sous-suite, que l'on peut supposer qu'il existe $x_0 \in X$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que:

$$u_j(x_0) - m_j \geqq \log \varepsilon_0, \ \forall_j \geqq 1. \tag{3.15}$$

Posons alors $u = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}(u_j - m_j)$ sur X. Il est facile de voir grâce à (3.14) que sur chaque ouvert $B_R := \{x \in X; g(x) < R\}$, u est limite d'une suite décroissante de fonctions p.s.h.. Par conséquent u est p.s.h. sur X et d'après (3.14) $u \in \mathscr{L}_g(X)$. D'après (3.15) on a $u(x_0) \geqq \log \varepsilon_0 > -\infty$ et de plus si $x \in E_{\mathscr{F}}$, on a $M(x) := \sup_j u_j(x) < +\infty$ et donc $u(x) = -\infty$.

Démonstration du théorème. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) résulte immédiatement du lemme et l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) est triviale. Il reste à prouver que (i) $\Rightarrow$ (ii).

Soit $s > 1$ tel que $E \subset K_s := \{x \in X; g(x) \leqq s\}$. Soit $M > 0$ un réel quelconque et $r > M + s$. D'après le théorème de Josefson rappelé au §1, on peut trouver $u \in P(X)$ telle que $u|E = -\infty$ et $u \leqq 0$ sur $B_r := \{x \in X; g(x) < r\} \subset\subset X$. Soit $\varepsilon > 0$, la fonction définie par

$$v(x) = \begin{cases} \sup\{M + \varepsilon u(x), g(x) - s\} & \text{si } x \in B_r \\ g(x) - s & \text{si } x \in X \backslash B_r \end{cases}$$

est dans $\mathscr{L}_g(X)$ et $v|E \leqq 0$. On en déduit que $v \leqq g$ sur X, et en particulier $M + \varepsilon u(x) \leqq v(x) \leqq g_E(x)$ pour tout $x \in B_r$. Comme $\varepsilon > 0$, M et $r > M + s$ sont arbitraires, il en résulte immédiatement que $g_E = +\infty$ sur $X \backslash u^{-1}(-\infty)$. D'où $g_E^* \equiv +\infty$ sur X.

Corollaire 3.11. *Soit $E \subset X$ un sous-ensemble pluripolaire. Alors il existe $v \in \mathscr{L}_g(X)$ telle que $v|E = -\infty$.*

Démonstration. On suppose d'abord X irréductible. Posons $E_j := E \cap B_j$, où $B_j := \{x \in X; g(x) < j\}$, alors $E_j \subset E_{j+1} \subset\subset X$ et $E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$. D'après le théorème 3.9, il existe $v_j \in \mathscr{L}_g(X)$ telle que $v_j|E_j = -\infty$. Chacun des ensembles pluripolaires $v_j^{-1}(-\infty)$ est de mesure nulle sur X i.e. localement au voisinage de chaque point régulier dans un ouvert de coordonnnées, sa mesure de Lebesgue $2n$-dimensionnelle est nulle. Par conséquent, on peut trouver un point $x_0 \in X$ tel que $v_j(x_0) > -\infty$ pour tout $j \geqq 1$. Soit $r > \min_X g$, et posons $m_j := \sup\{v_j(x); g(x) \leqq r\}$. On a alors

$$v_j \leqq m_j + (g - r)^+ \text{ sur } X, \ \forall j \geqq 1. \tag{3.16}$$

Soit (ε_j) une suite décroissante de réels positifs telle que $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j |m_j| < +\infty$, $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j |v_j(x_0)| < +\infty$ et $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j = 1$. Alors la fonction $v := \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j (v_j - m_j)$ est p.s.h. et $v \in \mathscr{L}_g(X)$ d'après (3.16). De plus on a $v(x_0) > -\infty$ et $v|E = -\infty$. Dans le cas général, on écrit la décomposition $X = \cup_{j=1}^{\infty} X_j$ en composantes irréductibles. Soit $E' = E \cup X_{\text{sing}}$, E' est pluripole dans X et donc pour chaque $j \geqq 1$, $E' \cap X_j$ est pluripolaire dans X_j. Le cas irréductible implique l'existence d'une fonction $v_j \in \mathscr{L}_g(X_j)$ telle que $v_j = -\infty$ sur $E' \cap X_j$ pour chaque $j \geqq 1$ et quitte à retrancher une constante, on peut supposer que $v_j \leqq (g - r)^+$ sur X_j, où $r > \min_X g$. Par construction $v_j = -\infty = v_k$ sur $X_j \cap X_k$; il en résulte qu'il existe une fonction v p.s.h. sur X telle que $v|X_j = v_j$ pour chaque j. De plus $v_j \leqq (g - r)^+$ sur X, $v|E = -\infty$ et $v \not\equiv -\infty$ sur chaque X_j; ce qui prouve le corollaire.

REMARQUE. Dans la cas où $X = \mathbf{C}^n$ muni du potentiel $l(z) = \log|z|$, les résultats précédents sont dûs à J. Siciak [Si,2].

COROLLAIRE 3.12. *L'ensemble singulier $g^{-1}(-\infty)$ du potentiel g est non vide et rencontre chaque composante irréductible de X. En particulier X n'a qu'un nombre fini de composante irréductibles.*

DÉMONSTRATION. Soit $r_0 := \min_X g$ et pour $r > r_0$ posons $K_r := \{x; g(x) \leqq r\}$, $B_r := \{x \in X; g(x) < r\}$. Supposons que $g^{-1}(-\infty) = \emptyset$, alors $r_0 > -\infty$ et pour tout $r > r_0$, on a $(dd^c g)^n = 0$ sur B_r et $g = r$ sur bB_r; d'après le principe du maximum, il en résulte que $g = r$ sur B_r pour tout $r > r_0$, ce qui est absurde. Par conséquent $g^{-1}(-\infty) \neq \emptyset$ et $r_0 = -\infty$. Soit Y une composante irréductible de X, la restriction de g à Y est un potentiel parabolique sur Y que l'on notera $\tilde{g}$. Posons $\tilde{K}_r = Y \cap K_r$, pour $r > -\infty$; d'après le théorème 3.6 $\tilde{g}_{\tilde{K}_r} = (\tilde{g} - r)^+$ sur Y et donc d'après le théorème 3.9, $\tilde{K}_r \neq \emptyset$ pour tout $r > -\infty$, ce qui implique que $\tilde{g}^{-1}(-\infty) = \cap_{j=1}^{\infty} \tilde{K}_{-j} \neq \emptyset$ *et donc* $Y \cap g^{-1}(-\infty) \neq \emptyset$. Comme $g^{-1}(-\infty)$ est un compact, il résulte que X n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles.

La notion suivante est importante dans les applications:

DÉFINITION 3.13. Soit K un compact $\subset X$ et $x_0 \in X$.
K est dit L-régulier au point x_0 si $g_K^*(x_0) = 0$.
K est dit localement L-régulier au point x_0 si pour tout voisinage ω de x_0 dans X, $\bar{\omega} \cap K$ est L-régulier au point x_0.
K est dit L-régulier (resp. localement L-régulier) s'il l'est en chacun de ses points.

Nous allons voir que cette notion de régularité coïncide avec celle consi dérée au §2 et ne dépend donc pas du potentiel g considéré sur X.

PROPOSITION 3.14. *Soit K un compact non pluripolaire sur chaque composante irréductible de X, Ω un ouvert de X tel que $\hat{K}_X \subset \Omega \subset\subset X$, et $E \subset K$. Alors on a les propriétés suivantes:*

(i) *si* $x_0 \in \Omega$, $h^*_{E,\Omega}(x_0) = 0 \Leftrightarrow g^*_E(x_0) = 0$,
(ii) $h^*_{E,\Omega} = h^*_{K,\Omega}$ *sur* $\Omega \Leftrightarrow g^*_E = g^*_K$ *sur* X.

DÉMONSTRATION. Pour prouver (i) supposons d'abord X irréductible. Dans ce cas la condition $h^*_{E,\Omega}(x_0) = 0$ implique que E est non pluripolaire dans X d'après ([Bd], lemme 5.2). Il en résulte grâce au théorème 3.9 que g_E est localement bornée sur X et donc $M := \sup_{\bar\Omega} g_E < +\infty$. On en déduit facilement que $g^*_E \leqq M \cdot h^*_{E,\Omega}$ et donc $g^*_E(x_0) = 0$, puisque $h^*_{E,\Omega}(x_0) = 0$.

Inversement supposons que $g^*_E(x_0) = 0$ et soit s tel que $E \subset K_s := \{x \in X; g(x) \leqq s\}$. Soit $r > s + 1$ et $B_r := \{x \in X; g(x) < r\}$, alors pour tout $u \in P(B_r)$ telle que $u \leqq 1$ et $u \leqq 0$ sur E, on a $g - s \geqq u$ sur bB_r et donc la fonction définie par la formule:

$$v = \begin{cases} \sup\{u, g - s\} & \text{sur } B_r \\ g - s & \text{sur } X \backslash B_r \end{cases} \tag{3.17}$$

est p.s.h. sur X, $v \in X$, $v \in \mathscr{L}_g(X)$ et $v|E \leqq 0$. Il s'ensuit que $v \leqq g_E$ sur X ce qui implique en particulier que $u \leqq g_E$ sur B_r. D'où $h_{E,B_r} \leqq g_E$ sur B_r et si r est assez grand pour que $x_0 \in B_r$, on en déduit que $h^*_{E,B_r}(x) = 0$. D'après la définition 3.2, cela implique $h^*_{E,\Omega}(x_0) = 0$.

Si X n'est plus irréductible, on considère X' égal à la réunion des composantes irréductibles qui contiennent x_0 et on raisonne comme précédemment. La propriété (ii) résulte de (i) en tenant compte du fait que $h^*_{K,\Omega} = 0 = g^*_K$ quasi partout sur K i.e. en dehors d'un ensemble pluripolaire ([Bd], [B-T,2].

REMARQUE 3.15. Pour chaque compact $K \subset X$, on définit les deux enveloppes suivantes

$$\hat{K}_{P(X)} := \{x \in X;\, u(x) \leqq \sup_K u,\ \forall u \in P(X)\}$$
$$\hat{K}_{\mathscr{L}_g(X)} := \{x \in X;\, v(x) \leqq \sup_K v,\ \forall v \in \mathscr{L}_g(X)\}$$

on a alors

$$\hat{K}_{P(X)} = \hat{K}_{\mathscr{L}_g(X)} = \{x \in X;\, g_K(x) = 0\}. \tag{3.18}$$

En effet il est clair que $\hat{K}_{P(X)} \subset \hat{K}_{\mathscr{L}_g(X)}$ et inversement soit $x_0 \notin \hat{K}_{P(X)}$ il existe alors $u \in P(X)$ telle que $u \leqq 0$ sur K et $u(x_0) > 0$. Soit s tel que $K \subset \{x \in X; g(x) \leqq s\}$ et $r > s + 1$, la fonction v définie par (3.17) est p.s.h., $v \in \mathscr{L}_g(X)$, $v \leqq 0$ sur K et $v(x_0) \geqq u(x_0) > 0$. On a aussi $g_K(x_0) \geqq v(x_0) > 0$ donc $\hat{K}_{P(X)} \supset \{x \in X; g_K(x) = 0\}$. Comme on a évidemment l'inclusion $\hat{K}_{\mathscr{L}_g(X)} \subset \{x \in X; g_K(x) = 0\}$, on en déduit (3.18).

Le résultat suivant sera très utile dans les applications.

THEORÈME 3.16 *On suppose de plus X localement irréductible. Soit $K \subset X$ un compact et U un ouvert de X tel que $\hat{K}_X \subset U$. Alors il existe un compact E holomorphiquement cnvexe et localement L-régulier dans X tel que $\hat{K} \subset E \subset U$.*

DÉMONSTRATION. D'après Gunning et Rossi ([G-R, Prop. A.3, p.211) il existe un voisinage ouvert W tel que $\hat{K} \subset W \subset\subset U$ et une application holomorphe $f = (f_1, \ldots, f_m)$ d'un voisinage de $\bar{W}$ dans $\mathbf{C}^m$ qui réalise un isomorphisme analytique de W sur un sous-ensemble analytique fermé A du polydisque unité Δ^m de $\mathbf{C}^m$. Considérons le compact défini par

$$E := \{x \in W; |f_1(x)| \leqq \delta, \ldots, |f_m(x) \leqq \delta\} \tag{3.19}$$

où $\delta \in]0, 1[$ est choisi tel que $\hat{K} \subset E$.

Montrons que E est L-régulier. Soit $x_0 \in Y$ la composante irréductible de X contenant x_0. Alors $z_0 = f(x_0) \in B \cap \Delta_\delta^m$, où $\Delta_\delta^m := \{z \in \mathbf{C}^m; \max_{i \leqq i \leqq m} |z_i| \leqq \delta\}$ et $B = f(W \cap Y)$ qui est une branche irréductible. D'après le lemme de sélection de courbes analytiques [Loj], il existe une courbe analytique $\gamma : [0, \varepsilon] \to \mathbf{C}^m$ telle que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(]0, \varepsilon]) \subset B \cap \Delta_\delta^m$. Posons $V = g_E$ sur Y et $v(z) = V^* \circ f(z)$, pour $z \in B$; où $V^*(y) := \lim_{y' \to y, y' \in Y_{reg}} V(y')$, $y \in Y$.

Comme Y est localement irréductible, V^* est p.s.h. sur Y d'après le théorème 1.5 et par suite v est p.s.h. sur B et $z_0 \in B$. Il existe donc un voisinage ω de a dans Δ^m tel que v soit la restriction à $\omega \cap B$ d'une fonction p.s.h. sur ω que nous noterons encore v. Complexifions l'arc γ en une application holomorphe d'un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$ à valeurs dans ω. Alors $v \circ \gamma$ est sousharmonique au voisinage de 0 dans $\mathbf{C}$ et d'après un résultat classique, on a

$$v \circ \gamma(0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} v \circ \gamma(t). \tag{3.20}$$

Comme $\gamma(t) \in B \cap \Delta_\delta^m$ pour $t \in]0, \varepsilon[$, on a $f \circ \gamma(t) \in \mathring{E}$, intérieur topologique de E dans X. Par définition on a $g_E^* = 0$ sur $\mathring{E}$, et donc $v \circ \gamma(t) = V^*(f \circ \gamma(t)) = g_E^*(f \circ \gamma(t)) = 0$ pour $t \in]0, \varepsilon[$, ce qui d'après (3.20) montre que $v \circ \gamma(0) = 0$ i.e. $g_E^*(x_0) = 0$. Ce qui prouve que E est L-régulier en x_0. Pour montrer que E est localement régulier, il suffit de remarquer que si $x_0 \in E$ et D est un voisinage de x_0 tel que $f(D)$ soit un polydisque de centre $z_0 = f(x_0)$, alors le lemme de sélection de courbes analytiques s'applique encore à l'ensemble analytique $B \cap f(D) \cap \Delta_\delta^m$ contenant z_0.

§4. Fonction de Green Pluricomplexe à pole infini sur un espace parabolique et Applications.

Dans ce paragraphe on suppose comme précédemment que X est un espace de Stein parabolique de potentiel g. Nous allons établir ici d'autres propriétés de la fonction de Green pluricomplexe et en donner quelques applications.

On introduit tout d'abord une généralisation de la fonction extrémale considérée au 3 (voir la formule 3.3).

Soit $K \subset X$ un compact et $b: K \to \mathrm{R}$ une fonction bornée. On pose

$$g_{K,b}(x) := \sup\{v(x); v \in \mathscr{L}_g(X), v|K \leqq b\}, \quad x \in X. \tag{4.1}$$

Si $b = 0$ on a $g_{K,0} = g_K$ sur X; et si $m \leqq b \leqq M$ sur K (m, M étant des constantes), on a:

$$g_K(x) + m \leqq g_{K,b}(x) \leqq g_K(x) + M, \quad \forall x \in X. \tag{4.2}$$

Le lemme suivant est important pour la suite:

LEMME 4.1. *Soit $K \subset X$ un compact et $b: K \to \mathrm{R}$ une fonction continue. Alors on a*

$$g_{K,b}(x) = \sup\{v(x); v \in \mathscr{L}_g(X) \cap \mathscr{C}(X), \; v|K \leqq b\}, \quad \forall x \in X. \tag{4.3}$$

où $\mathscr{C}(X)$ désigne l'espace des fonctions continues sur X.

En particulier $g_{K,b}$ est semi-continue inférieurement.

DÉMONSTRATION. Notons tout d'abord que l'on peut se ramener au cas où $b \geqq 0$ car si $m = \inf_K b$, alors $g_{K,b} = g_{K,b-m} + m$ sur X.

Soit $v \in \mathscr{L}_g(X)$ telle que $v|K \leqq b$. Il existe une constante γ telle que

$$v \leqq \gamma + g^+, \quad \text{sur } X. \tag{4.4}$$

D'après le théorème d'approximation de Fornaess-Narasimhan [F-N], il existe une suite décroissante (u_j) de fonctions p.s.h. continues sur X telle que $v = \lim_{j \to \infty} u_j$ sur X. Posons $B_p := \{x \in X; g(x) < p\}$ et soit $p_0 > 0$ tel que $K \subset B_{p_0}$. Soit $\varepsilon > 0$, la continuité de b en tout point de K et le lemme de Hartogs (théorème 1.6) montrent grâce à (4.4) et au fait que $v \leqq b$ sur K, qu'il existe une suite croissante $(j_p)_{p \geqq 1}$ d'entiers telle que:

$$u_{j_p}(x) \leqq b(x) + \varepsilon, \quad \forall x \in K, \forall p \geqq p_0, \tag{4.5}$$

$$u_{j_p}(x) \leqq \gamma + \varepsilon + p, \quad \forall x \in B_p, \forall p \geqq p_0. \tag{4.6}$$

Choisissons $p_1 > p_0$ tel que $p - p_0 > (1 - \varepsilon)(p + \gamma + \varepsilon)$ pour tout $p \geqq p_1$ de sorte que d'après (4.6) on ait:

$$g(x) - p_0 \geqq (1 - \varepsilon)\, u_{j_p}(x), \; \forall x \in \partial B_p, \; \forall p > p_1. \tag{4.7}$$

Posons alors pour $p > p_1$:

$$v_p(x) = \begin{cases} \sup\{(1-\varepsilon)u_{j_p}(x), g(x) - p_0\} & \text{si } x \in B_p \\ g(x) - p_0 & \text{si } x \in X \setminus B_p. \end{cases} \tag{4.8}$$

D'après (4.7) la fonction v_p est p.s.h. continue sur X et par définition $v_p \in \mathscr{L}_g(X)$. De plus d'après (4.5) et (4.8) et le fait que $g - p_0 \leqq 0 \leqq b$ sur K, on a pour tout $p \geqq p_1$:

(4.9) $$v_p(x) \leqq (1-\varepsilon)(b(x)+\varepsilon) \leqq b(x)+\varepsilon, \quad \forall x \in K$$

(4.10) $$(1-\varepsilon)u_{j_p}(x) \leqq v_p(x), \quad \forall x \in B_p.$$

Comme $v \leqq u_{j_p}$ pour tout p, il résulte de (4.10) que l'on a:

(4.11) $$(1-\varepsilon)v(x) \leqq v_p(x), \quad \forall x \in B_p, \quad \forall p \geqq p_1$$

Puisque $v_p \in \mathscr{L}_g(X) \cap \mathscr{C}(X)$ et que d'après (4.9) $v_p \leqq b+\varepsilon$ sur K, il en résulte compte tenu de l'inégalité (4.11):

(4.12) $$1-\varepsilon)v(x)-\varepsilon \leq \sup\{w(x); w \in \mathscr{L}_g(X) \cap \mathscr{C}(X), w \leqq b \text{ sur } K\}, \ \forall x \in X.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, il découle de (4.12) l'inégalité suivante:

$$g_{K,b}(x) \leqq \sup\{w(x); w \in \mathscr{L}_g(X) \cap \mathscr{C}(X), w \leqq b \text{ sur } K\}, \forall x \in X.$$

L'autre inégalité étant triviale, on a prouvé (4.3).

Nous allons maintenant prouver le résultat fondamental suivant:

THÉORÈME 4.2. *Soit K un compact non pluripolaire sur chaque composante irréductible de X, $b: K \to \mathrm{R}$ une fonction bornée.*

Alors on a les propriétés suivantes:

1) *Il existe des constantes réelles γ_1, γ_2 telles que:*

(4.13) $$\gamma_1 + g^+(x) \leqq g^*_{K,b}(x) \leqq g^+(x) + \gamma_2, \ \forall x \in X$$

2) *L'équation de Monge-Ampère suivante est vérifiée au sens des courants:*

(4.14) $$(dd^c g^*_{K,b})^n = 0 \ \text{ sur } X \backslash K.$$

3) *Supposons de plus que X soit localement irréductible. Alors si K est localement L-régulier et b est continue sur K (resp. K est L-régulier et $b=0$) alors $g_{K,b}$ est continue et* p.s.h. *sur X.*

DÉMONSTRATION. 1) Puisque par définition $g_{K,b} \leqq b$ sur K, il en résulte en appliquant le lemme 3.10 que $g_{K,b}$ est localement majorée sur X. D'après (4.2) il suffit de prouver (4.13) lorsque $b=0$. Soit $r>0$ tel que $K \subset K_r := \{x \in X; g(x) \leqq r\}$ et $M_r := \sup_{K_r} g_K$, alors on a $g_{K_r} \leqq g_K \leqq M_r + g_{K_r}$; ce qui d'après le théorème 3.6 implique $(g-r)^+ \leqq g_K \leqq M_r + (g-r)^+$ sur X. D'où les inégalités (3.13).

2) Comme $g^*_{K,b}$ est faiblement p.s.h. et localement bornée sur X, le courant $(dd^c g^*_{K,b})^n$ est bien défini et ne charge pas X_{sing}. Par conséquent, il suffit de vérifier l'équation (4.14) localement sur $X_{\text{reg}} \backslash K$. Soit $\omega \subset\subset X_{\text{reg}} \backslash K$ un ouvert tel que $\bar{\omega}$ soit contenu dans un domaine de carte et biholomorphe à une boule fermée de $\mathbf{C}^n$. On procède alors par balayage ([B-T,2]). D'après le lemme 3.1 et un résultat topologique de Choquet, il existe une suite croissante (v_j) de fonctions de la classe

$\mathscr{L}_g(X) \cap \mathscr{C}(X)$ telle que

$$g_{K,b}^* = (\sup_j v_j)^* \ \text{sur}\, X. \tag{4.15}$$

On définit alors par balayage sur ω, une fonction $\tilde{v}_j$ p.s.h. sur ω. Rappelons que $\tilde{v}_j$ est définie sur ω, comme la solution du problème de Dirichlet pour l'équation de Monge-Ampère complexe $(dd^c v)^n = 0$ sur ω avec la donnée frontière continue v_j sur $\partial\omega$. D'après le principe du maximum $(\tilde{v}_j)$ est une suite croissante de fonctions de la classe $\mathscr{L}_g(X)$ telle que $\tilde{v}_j = v_j \leqq b$ sur K et $v_j \leqq \tilde{v}_j$. Il en résulte d'après (4.15) que $g_{K,b}^* = (\sup_j \tilde{v}_j)^*$ sur X. Ce qui implique que la suite $(\tilde{v}_j)$ croît presque partout sur ω vers $g_{K,b}^*$ et donc d'après les théorèmes de convergences pour l'opérateur de Monge-Ampère complexe ([B-T,2]), il en résulte que $(dd^c \tilde{v}_j)^n \xrightarrow[j\to\infty]{} (dd^c g_{K,b}^*)^n$ au sens des courants sur X. Comme $(dd^c \tilde{v}_j)^n = 0$ sur ω pour tout j, on en déduit que $(dd^c g_{K,b}^*)^n = 0$ sur ω.

3) Supposons X localement irréductible, alors d'après le Théorème 1.6 de Demailly $g_{K,b}^*$ est p.s.h. sur X et d'après (4.13) on a donc $g_{K,b}^* \in \mathscr{L}_g(X)$. Si $b = 0$ et K L-régulier, on a par définition $g_{K,b}^* = 0$ sur K et donc $g_K^* \leqq g_K$ sur X, d'où $g_K^* = g_K$. Par suite g_K est semi continue supérieurement sur X et le lemme 3.1 entraîne la continuité de g.

Si b est continue en tout point de K et K est localement L-régulier on va prouver que $g_{K,b}^* \leqq b$ sur K, ce qui entraînera que $g_{K,b}^* = g_{K,b}$ est continue. En effet soit $x_0 \in K$ et $\varepsilon > 0$, la continuité de b au point x_0 entraîne qu'il existe un voisinage ω de x_0 dans X tel que $b \leqq b(x_0) + \varepsilon$ sur $K \cap \omega$. Il en résulte que $g_{K,b}^* \leqq b(x_0) + \varepsilon + g_{K\cap\omega}^*$ sur X. Comme par hypothèse $g_{K\cap\omega}^*(x_0) = 0$ on obtient $g_{K,b}^*(x_0) \leqq b(x_0) = 0$ on obtient $g_{K,b}^*(x_0) \leqq b(x_0) + \varepsilon$. D'où $g_{K,b}^* \leqq b$ sur K, ce qui prouve notre assertion.

Donnons des exemples qui illustrent les résultats du théorème et qui montrent que si X est localement réductible en un point alors la fonction de Green g_K n'est pas nécessairement continue même si K est L-régulier.

EXEMPLE 4.3. 1) Soit $Z = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2; y^2 - x - 1 = 0\}$, Z est une courbe algébrique irréducible et lisse de $\mathbf{C}^2$ (donc localement irréductible).

Soit α, β tels que $-1 < \alpha < \beta \leqq 0$ et $E_{\alpha,\beta} := \{(x, \sqrt{1+x}); \alpha \leqq x \leqq \beta\}$. Il est facile de voir que $E_{\alpha,\beta}$ est un compact P-régulier dans l'ouvert $\Omega := \{(x, \sqrt{1+x}); |x| < 1\}$. Si g est un potentiel parabolique quelconque sur Z, $g_{E_{\alpha,\beta}}^* = 0$ sur $E_{\alpha,\beta}$ et donc $g_{E_{\alpha,\beta}}$ est continue sur Z d'après le théorème 4.2. En particulier on peut choisir α tel que $g_{E_{\alpha,0}}(0,-1) > 2$ et puisque $g_{E_{\alpha,0}}(0,1) = 0$, on peut choisir β tel que $-1 < \alpha < \beta < 0$ et $g_{E_{\alpha,\beta}}(0,1) < 1$.

2) Soit $X = \{(z,w) \in \mathbf{C}^2; w^2 - z^2 - z^3 = 0\}$, X est une courbe algébrique complexe irréductible, mais localement réductible au point $(0,0)$. De plus $\pi: Z \to X$ définie par $\pi(x,y) = (x, xy)$ est la normalisation de X. Posons $K_{\alpha,\beta} := \pi(E_{\alpha,\beta})$

$\{(x, x\sqrt{1+x}); \alpha \leqq x \leqq \beta\}$ où $\tilde{g} = g \circ \pi$, alors $\tilde{g}$ est un potentiel sur Z et on vérifie facilement que $g^*_{K_{\alpha,\beta}}(x, xy) = \tilde{g}^*_{E_{\alpha,\beta}}(x, y)$ si $(x, y) \in Z$. En particulier $g^*_{K_{\alpha,\beta}} = 0$ sur $K_{\alpha,\beta}$, mais d'après le choix de α, β on a:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} g_{K_{\alpha,\beta}}(x, x\sqrt{1+x}) = \tilde{g}_{E_{\alpha,\beta}}(0, 1) < 1$$

et

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} g_{K_{\alpha,\beta}}(x_1 - x\sqrt{1+x}) = g_{E_{\alpha,\beta}}(0, -1) > 2$$

Par conséquent $g_{K_{\alpha,\beta}}$ est discontinue au point $(0, 0)$ bien que $K_{\alpha,\beta}$ soit L- régulier. Remarquons cependant que $g_{K_{\alpha,\beta}}$ est p.s.h. continue sur $X \backslash (0, 0) = X_{\text{reg}}$.

Nous allons maintenant donner des applications des résultats précédents.

THÉORÈME 4.4. *Supposons X localement irréductible et soit $v \in \mathscr{L}_g(X)$, alors il existe une suite décroissante de fonctions dans $\mathscr{L}_g(X) \cap \mathscr{C}(X)$ telle que*

1) $\operatorname{supp}(dd^c v_j)^n$ *est compact pour chaque j.*
2) $v = \lim_{j \to \infty} v_j$ *sur X.*

DÉMONSTRATION. Soit $v \in \mathscr{L}_g(X)$ et (b_j) une suite de fonctions continues sur X telle que $v = \lim_{j \to \infty} b_j$ sur X. D'après le théorème 3.16 on peut trouver pour chaque $j \geqq 1$, un compact E_j holomorphiquement convexe et localement L-régulier dans X tel que si $K_j := \{x \in X; g(x) \leqq j\}$ et $U_j := \{x \in X; g(x) < j + 1\}$, on ait $K_j \subset E_j \subset U_j$.

Posons $v_j(x) = g_{E_j, b_j}(x)$ pour $\forall x \in X$ et $j \geqq 1$. D'après le théorème 4.2 v_j est p.s.h. continue sur X, et comme $v \in \mathscr{L}_g(X)$ et $v \leqq b_j$ on a aussi $v \leqq v_j$ pour tout j. Il en résulte que $v \leqq v_j \leqq b_j$ sur E_j pour tout j et à la limite on obtient $v = \lim_{j \to \infty} v_j$ sur X puisque la suite (E_j) épuise X, ce qui prouve le théorème compte tenu de (4.14).

Nous allons donner une formule qui permet de calculer la fonction de Green pour un produit de compacts:

THÉORÈME 4.5. *Pour chaque $i = 1, 2$ soit (X_i, g^i) un espace de Stein parabolique de dimension n_i et localement irréductible. Posons $X = X_1 \times X_2$ et $g(x_1, x_2) = \sup\{g^1(x_1), g^2(x_2)\}$ pour $(x_1, x_2) \in X$. Soit K_i un compact de X_i $(i = 1, 2)$ et $K := K_1 \times K_2$. Alors (X, g) est un espace de Stein parabolique et l'on a:*

$$g_K(x) = \sup\{g^1_{K_1}(x_1), g^2_{K_2}(x_2)\}, \quad \forall x = (x_1, x_2) \in X. \tag{4.16}$$

DÉMONSTRATION. Nous avons déjà observé dans l'Exemple 3.5 que (X, g) est un espace de Stein parabolique. D'après la Remarque 3.15 on a $g^i_{K_i} = g^i_{\hat{K}_i}$ sur X_i, on peut donc supposer chaque K_i holomorphiquement convexe.

Supposons d'abord chaque K_i localement L-régulier dans X_i, $i = 1, 2$. Alors d'après le théorème 3.5, la fonction $v_i := g^i_{K_i}$ est p.s.h. continue sur X_i, $i = 1, 2$. Posons $v(x) := \sup\{v_1(x_1), v_2(x_2)\}$ pour $x = (x_1, x_2) \in X$. D'après la Proposition 3.4, v est p.s.h. et vérifie, compte tenu de l'équation (4.14) du théorème 4.2, l'équation suivante:

$$(4.17) \qquad (dd^c v)^n = 0 \quad \text{sur } (X_1 \backslash K_1) \times (X_2 \backslash K_2).$$

Puisque par définition $v_1(x_1) = 0$ si $x_1 \in K_1$ et que d'après la remarque 3.15 $v_2(x_2) > 0$ pour $x_2 \in X_2 \backslash K_2$, on en déduit par continuité que pour tout ouvert $\omega_2 \subset\subset X_2 \backslash K_2$, il existe un ouvert $U_1 \supset K_1$ tels que $v_1(x_1) < v_2(x_2)$ pour tout $(x_1, x_2) \in U_1 \times \omega_2$. D'où $v(x_1, x_2) = v_2(x_2)$ sur $U_1 \times \omega_2$, ce qui prouve que $(dd^c v)^n = 0$ sur $U_1 \times \omega_2$. Par conséquent on a démontré compte tenu de (4.17) que $(dd^c v)^n = 0$ sur $X_1 \times (X_2 \backslash K_2)$.

Par symétrie on a aussi $(dd^c v)^n = 0$ sur $(X_1 \backslash K_1) \times X_2$. D'où finalement:

$$(4.18) \qquad (dd^c v)^n = 0 \quad \text{sur } X \backslash K$$

Nous allons maintenant montrer que $g_K = v$ sur X. Il est clair que $v \in \mathscr{L}_g(X)$ et $v | K \leqq 0$ et donc $v \leqq g_K$ sur X. Pour montrer l'autre inégalité, soit $w \in \mathscr{L}_g(X)$ telle que $w | K \leqq 0$. Montrons que $w \leqq v$ sur X. D'après l'inégalité (4.13) du théorème 4.2 appliquée à chaque v_i, il existe une constante c_1 telle que:

$$(4.19) \qquad v(x) \geqq c_1 + g^+(x), \quad \forall x \in X.$$

L'hypothèse $w \in \mathscr{L}_g(X)$ montre qu'il existe une constante c_2 telle que

$$(4.20) \qquad w(x) \leqq c_2 + g^+(x), \quad \forall x \in X.$$

D'après (4.19) et (4.20) on obtient en posant $c_3 := c_2 - c_1$:

$$(4.21) \qquad w(x) \leqq c_3 + v(x), \quad \forall x \in X.$$

Posons $B_r := \{x \in X;\ v(x) < r\}$ et soit $\varepsilon > 0$. D'après (4.19) et (4.21) on peut trouver $r_0(\varepsilon) > 0$ tel que $K \subset B_{r_0}$ et

$$(4.22) \qquad w(x) \leqq (1 + \varepsilon)\, v(x), \quad \text{pour } v(x) = r > r_0(\varepsilon).$$

D'après (4.17), on a $(dd^c(1 + \varepsilon)v)^n = (1 + \varepsilon)^n (dd^c v)^n = 0$ sur $B_r \backslash K$; et comme $w \leqq 0 \leqq (1 + \varepsilon)v$ sur K, on déduit que (4.22) a lieu sur $\partial(B_r \backslash K)$. D'après le principe du maximum, il en résulte que $w \leqq (1 + \varepsilon)v$ sur $B_r \backslash K$ pour tout $r > r_0(\varepsilon)$. Puisque $w \leqq 0$ et $v = 0$ sur K, et que d'après (4.19) $\cup_{r > r_0} B_r = X$, on en déduit que $w \leqq v$ sur X.

Par conséquent $g_K \leqq v$ sur X et la relation (4.16) est prouvée dans le cas où chacun des compacts $K_i\,(i = 1, 2)$ est L-régulier. Le cas général en résulte en vertu du Théorème 3.16 si l'on tient compte de la propriété suivante:

Si (X, g) est un espace parabolique et $E \subset X$ un compact tel que $E = \cap_{j=1}^{\infty} E_j$ où (E_j) est une suite décroissante de compacts de X, alors

$$g_E(x) = \sup_j g_{E_j}(x), \quad \forall x \in X.$$

Cette propriété résulte de façon immédiate des définitions.

REMARQUE 4.5. Si $X_1 = \mathbf{C}^n$, $X_2 = \mathbf{C}^m$ $g_1(x_1) = \log|x_1|$, $g_2(x_2) = \log|x_2|$, le théorème est dû à Siciak ([Sc,2]).

Nous allons maintenant démontrer deux résultats qui montrent que *l'existence sur un espace de Stein d'un potentiel parabolique g implique des restrictions* sur la théorie des fonctions à croissance.

Posons $\tau(x) := \exp g(x), \quad x \in X$.

Soit $u : x \to [-\infty, +\infty[$ une fonction p.s.h. sur X. On définit

$$M_g(u; r) := \max\{u(x); \tau(x) = r\}, \quad r > 0.$$

Il résulte facilement de la relation (3.12) du théorème 3.6 que la fonction $M_g(u; r)$ est une fonction convexe croissante de $\log r$. Il en résulte que la limite suivante:

$$\beta_g(u) := \lim_{r \to +\infty} \frac{M_g(u; r)}{\log r} \tag{4.23}$$

existe (finie ou infinie).

Si $\beta_g(u) = \beta < +\infty$, on dira que u est à croissance minimale de type β. Les fonctions p.s.h. de la classe $\mathscr{L}_g(X)$ sont à croissance minimale de type $\leqq 1$.

THÉORÈME 4.6. *Supposons X irréductible. Alors toute fonction u* p.s.h. *sur X à croissance minimale de type nul est constante. En particulier toute fonction* p.s.h. *majorée sur X est constante.*

DÉMONSTRATION. Posons $K := \{x \in X; g(x) \leqq 0\}$ et soit $x_0 \in K$ tel que $u(x_0) = \sup\{u(x); x \in K\}$. Posons $v = u - u(x_0)$, alors pour tout $s > 0$, $\beta_g(s \cdot v) = s\beta_g(v) = s \cdot \beta_g(u) = 0$. Il en résulte d'après la formule (4.23) que $s \cdot v \in \mathscr{L}_g(X)$. Comme $v \leqq 0$ sur K, on en déduit que $sv \leqq g_K(x)$ sur X, ce qui d'après le théorème 3.6 implique:

$$s \cdot v(x) \leqq g^+(x), \quad \forall x \in X, \forall s > 0. \tag{4.24}$$

Puisque $s > 0$ est arbitraire, il résulte de (4.24) que $v \leqq 0$ sur X. Autrement dit $u(x) \leqq u(x_0)$ pour tout $x \in X$. Le principe du maximum classique ([G-R], Prop. 3, p. 272) montre que u est constante, puisque X est irréductible.

REMARQUE 4.7. Sous l'hypothèse X irréductible, on peut généraliser le résultat précédent au cas des fonctions faiblement p.s.h. sur X. *De façon plus précise, toute fonction faiblement* p.s.h. *sur X à croissance minimale de type nul est constante sur X_{reg}. En particulier toute fonction méromorphe bornée sur X est constante.*

En effet si u est faiblement p.s.h. sur X et $\beta_g(u^*) = 0$, soit $\pi: \tilde{X} \to X$ la normalisation de X et $v = u_0\pi$, alors v est p.s.h. sur $\tilde{X} \backslash \pi^{-1}(X_{\text{sing}})$ et $\tilde{X}$ est localement irréductible; par conséquent d'après le théorème 1.5 de Demailly, v^* est p.s.h. sur $\tilde{X}$. Posons $\tilde{g} = g_0 \pi$ sur $\tilde{X}$, on a de façon évidente $M_{\tilde{g}}(v^*, r) = M_g(u, r)$ et donc $\beta_{\tilde{g}}(v^*) = 0$. D'après le théorème 4.6 on a v^* est constante et donc u est constante sur X_{reg}.

Considérons maintenant l'espace des fonctions à croissance polynomiale. Rappelons que $\mathscr{P}_g^d(X)$ est l'espace des fonctions holomorphes f sur X vérifiant l'estimation suivante:

$$|f(x)| \leqq c_f \cdot (1 + r(x))^d, \quad \forall x \in X \tag{4.25}$$

où $r(x) := \exp g(x)$ et $c_f > 0$ est une constante ne dépendant que de f.

THÉORÈME 4.8. *L'espace $\mathscr{P}_g^d(X)$ est de dimension fini et l'on a:*

$$\dim \mathscr{P}_g^d(X) \leqq \binom{n + d \cdot N}{n}, \quad \forall d \geqq 1 \tag{4.26}$$

où $N > 1$ est un entier indépendant de d.

DÉMONSTRATION. Comme X n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles d'après le corollaire 3.12, il suffit de prouver (4.26) lorsque X irréductible. Soit $x_0 \in X_{\text{reg}}$ et U un voisinage de x_0 biholomorphe par une application H à un polydisque U' de $\mathbf{C}^n$. Soit K' un polydisque fermé contenu dans U' et $K = H^{-1}(K')$. Alors K est non pluripolaire dans X, ce qui d'après le théorème 4.2 prouve que $g_K \in L^\infty_{\text{loc}}(X)$.

D'après (4.25) on a les inégalités suivantes:

$$|f(x)| \leqq \|f\|_K \cdot e^{d \cdot g_K(x)}, \forall f \in \mathscr{P}_g^d(X), \ \forall x \in X. \tag{4.27}$$

A toute fonction $f \in \mathscr{P}_g^d(X)$, on associe la fonction $\tilde{f} = f \circ H^{-1} \in \mathscr{O}(U')$. D'après le théorème de Bernstein-Walsh ([P,1]) (voir aussi §5, corollaire 5.5) il existe $a \in]0, 1[$ et $C_1 > 0$ tels que:

$$\inf\{\|\tilde{f} - P\|_{K'}; P \in \mathscr{P}_m(\mathbf{C}^n)\} \leqq C_1 \cdot \|\tilde{f}\|_{U_0'} \cdot a^m, \forall f \in \mathscr{P}_g^d(X), \forall m \geqq 1 \tag{4.28}$$

où U_0' est un polydisque tel que $K' \subset U_0' \subset\subset U'$ et $\mathscr{P}_m(\mathbf{C}^n)$ désigne l'espace des polynômes de n variables complexes de degré au plus m.

Posons $r_0 = \sup_{x \in \bar{U}_0} e^{g_K(x)}$, où $U_0 = H^{-1}(U'_0)$, il résulte alors de (4.27) et (4.28) que l'on a

$$\inf\{\|\tilde{f} - P\|_{K'};\ P \in \mathscr{P}_m(\mathbf{C}^n)\} \leqq C_1 \cdot a^m \cdot r^d \cdot \|\tilde{f}\|_K, \forall d, \forall m \tag{4.29}$$

pour tout $f \in \mathscr{P}_g^d(X)$ (rappelons que $\tilde{f} = f \circ H^{-1}$ sur U').

Suivant une idée de Plesniak basée sur le "théorème de Projection" dans les expaces de Banach dû à Krasnoselski et Milman [P,1], on va déduire de (4.29) qu'il existe un entier $N > 1$ tel que l'espace vectoriel $\tilde{P}^d := \{\tilde{f} | K' : f \in \mathscr{P}_g^d(X)\}$ soit de dimension plus petite que la dimension de l'espace $\mathscr{P}_{d \cdot N}(\mathbf{C}^m)$.

En effet soit $N > 1$ tel que $C_1 \cdot a^N \cdot r < 1$, ce qui est possible puisque $a \in]0, 1[$. L'inégalité (4.29) s'écrit alors en posant $\rho = C_1 a^N \cdot r$:

$$\operatorname{dist}_{K'}(\tilde{f}; \mathscr{P}_{d \cdot N}(\mathbf{C})) \leqq \rho^d \cdot \|\tilde{f}\|_{K'} < \|\tilde{f}\|_{K'}, \ \forall \tilde{f} \in \tilde{\mathscr{P}}^d \tag{4.30}$$

la distance étant calculée dans l'espace de Banach $\mathscr{C}(K')$ des fonctions continues sur K', $\tilde{\mathscr{P}}_d$ et $\mathscr{P}_{d \cdot N}(\mathbf{C}^n)$ sont considérés comme des sous-espaces de l'espace de Banach $\mathscr{C}(K')$.

Supposons que $\dim \mathscr{P}^d > \dim \mathscr{P}_{d \cdot N}(\mathbf{C}^n)$. L'espace $\mathscr{P}_{d \cdot N}(\mathbf{C}^n)$ étant de dimension finie, le théorème de projection cité plus haut implique qu'il existe $\tilde{f}_0 \in \tilde{\mathscr{P}}^d \backslash (0)$ tel que $\tilde{f}_0$ soit "orthogonal" à $\mathscr{P}_{d \cdot N}(\mathbf{C}^n)$ au sens suivant:

$$\|\tilde{f}_0\|_{K'} \leqq \operatorname{dist}_{K'}(\tilde{f}_0; \mathscr{P}_{d \cdot N}(\mathbf{C}^n)). \tag{4.31}$$

Cette inégalité contredit l'inégalité (4.30) puisque $\tilde{f}_0 \neq 0$ et $\rho < 1$. On a par conséquent prouvé que $\dim \tilde{\mathscr{P}}^d \leqq \dim \mathscr{P}_{d \cdot N}(\mathbf{C}^n) = \binom{n + d \cdot N}{n}$ pour tout $d \geqq 1$. Comme l'application $f \mapsto \tilde{f} = f \circ H^{-1}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, on en déduit les estimations (4.26).

REMARQUES. 1) La propriété de Liouville pour les fonctions méromorphes sur un espace parabolique est dûe à W. Stoll ([St]).

2) J. P. Demailly a prouvé des résultats analogues au théorème 4.6, sous une hypothèse plus faible sur g; cette hypothèse porte sur une condition de croissance modérée du volume de Monge-Ampère de X relativement à g. Il obtient également dans ce cas, un théorème d'algébricité de type Siegel sur le "corps des fractions rationnelles" sur X (relativement à g) en un sens convenable (voir [D]). Nous ne savons pas s'il y a un lien entre son théorème 8.5 ([D]) et notre théorème 4.8.

§5. Fonction de Green pluricomplexe sur une variété algébrique et application à l'application polynomiale et rationelle.

Dans ce paragraphe X désignera une variété algébrique (singulière) de dimension pure n, plongée dans l'espace $\mathbf{C}^N$.

Nous allons montrer qu'il existe sur X un potentiel parabolique naturel g sur X vérifie la propriété suivante:

$$c_1 + \log^+ |x| \leqq g(x) \leqq c_2 + \log^+ |x| \quad \forall x \in X \tag{5.1}$$

où $|x|$ est la norme euclidienne sur $\mathbf{C}^N$ restreinte à X.

En effet d'après le théorème de Normalisation de Noether (voir [R], [Sa,1]) il existe un changement linéaire de coordonneés $w = a(z)$ dans $\mathbf{C}^N$ tel que:

$$a(X) \subset \{w \in \mathbf{C}^N; |w''| \leqq c(1 + |w'|)\} \tag{5.2}$$

où $w' = (w_1, \dots, w_n)$, $w'' = (w_{n+1}, \dots w_N)$ et c est une constante > 0.

L'application $\pi : X \to \mathbf{C}^n$ définie par $\pi(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$ est holomorphe et propre sur X d'après (5.2). Par conséquent la fonction $g(x) := \log |\pi(x)|$ est p.s.h. continue (et même de classe C^∞) exhaustive sur X et vérifie l'équation de Monge-Ampère complexe $(dd^c g)^n = 0$ sur $X \backslash g^{-1}(-\infty)$. D'après (5.2) le potentiel parabolique g sur X vérifie la condition (5.1).

La classe $\mathscr{L}_g(X)$ est alors d'après (5.1) l'ensemble des fonctions p.s.h. sur X vérifiant $v(x) \leqq \gamma_v + \log^+ |x|$ pour tout $x \in X$.

On notera alors $\mathscr{L}(X) = \mathscr{L}_g(X)$. On en déduit que si $V \in \mathscr{L}(\mathbf{C}^N)$ alors $v = V | X \in \mathscr{L}(X)$.

Soit K un compact de X, K est alors un compact de $\mathbf{C}^N$ et soit l_K sa fonction p.s.h. extrémale sur $\mathbf{C}^N$ on a alors l'inégalité:

$$l_K(x) \leqq g_K(x) \quad \forall x \in X \tag{5.3}$$

Il est naturel de se demander s'il y a égalité dans (5.3). Nous allons montrer que c'est le cas.

Désignons par $A(X)$ l'algèbre des fonctions régulières sur X, alors $A(X)$ s'identifie au quotient $\mathbf{C}[z_1, \dots, z_N]/I(X)$, où $I(X)$ est l'idéal de la variété X i.e. $I(X) = \{P \in \mathbf{C}[z]; P | X = 0\}$.

Pour chaque entier $d \geqq 1$, on désignera par $A_d(X)$ l'espace vectoriel des fonctions $f \in A(X)$ telle que $\sup_{x \in X} \{(1 + |x|)^{-d} |f(x)|\} < +\infty$.

D'après (5.1) on a $A_d(X) \subset \mathscr{P}_g^d(X)$, pour tout $d \geqq 1$.

THÉORÈME 5.1. *Pour tout compact $K \subset X$, on a:*

$$g_K(x) = \sup \left\{ \frac{1}{d} \log |f(x)|; f \in A_d(X), \|f\|_K \leqq 1, d \geqq 1 \right\} \tag{5.4}$$

pour tout $x \in X$.

La démonstration du théorème repose sur le lemme d'approximation suivant:

LEMME 5.2. *Soit $v \in \mathscr{L}(X) \cap \mathscr{C}(X)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, et tout compact $E \subset X$, il existe $d_1, \dots, d_m \in \mathbf{N}^*$ et $f_1, \dots, f_m$ tels que $f_i \in A_{d_i}(X)$ $i = 1, \dots, m$ et* *vérifiant:*

$$v(x) - \varepsilon \leqq \sup_{1 \leqq i \leqq m} \frac{1}{d_i} \log |f_i(x)| \leqq v(x), \quad \forall x \in E. \tag{5.5}$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 5.2. Soient $P_1, \ldots, P_s \in \mathbf{C}[z_1, \ldots, z_N]$ tels que $X = \{z \in \mathbf{C}^N; P_1(z) = \ldots = P_s(z) = 0\}$. Considérons les polynômes homogénéises $\tilde{P}_j(z, t) = t^{d_j} P_j(z/t)$ pour $(z, t) \in \mathbf{C}^N \times \mathbf{C}$, où $d_j = \deg(P_j)$ et Posons $\tilde{X} := \{(z, t) \in \mathbf{C}^N \times \mathbf{C};\ \tilde{P}_j(z, t) = 0, j = 1, \ldots, z\}$. $\tilde{X}$ est un cône algébrique de $\mathbf{C}^{N+1}$ tel que $\tilde{X} \cap \{(z, t) \in \mathbf{C}^{N+1}; t = 1\} = X \times \{1\} \simeq X$.

Soit $\theta \in]0, 1[$, on associe à $v \in \mathscr{L}(X) \cap \mathscr{C}(X)$ la fonction

$$h_\theta(\zeta) := \begin{cases} |t| \exp \theta\, v(x \,|\, t) & \text{si } \zeta = (x, t) \in \tilde{X} \text{ et } t \neq 0 \\ & \text{si } \zeta = (x, 0) \in \tilde{X} \end{cases}$$

Alors h_θ est faiblement p.s.h. et continue sur $\tilde{X}$. D'après le théorème 1.5 h_θ est p.s.h. continue et $\mathbf{C}$-homogène et on a $h_\theta(x, 1) = \exp \theta \cdot v(x)$, $\forall x \in X$.

D'après [F-N], l'ouvert défini par:

$$\Omega = \{\zeta \in \tilde{X};\ h_\theta(\zeta) < 1\}$$

est ouvert de Stein de $\tilde{X}$.

Soit $\zeta_0 \in \tilde{X}$. Suivant une idée de N. Sibony [Sb], la fonction définie par la formule

$$\varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} h_g^k(\zeta_0) \cdot \lambda^k, \quad |\lambda| < h_\theta^{-1}(\zeta_0) \tag{5.6}$$

est holomorphe sur $\Omega \cap \mathbf{C} \cdot \zeta_0$. D'après le théorème *B* de Cartan, φ se prolonge en une application holomorphe F sur Ω. Comme Ω est disqué (i.e. $\zeta \in \Omega$, $\lambda \in \mathbf{C}$ et $|\lambda| \leqq 1 \Rightarrow \lambda\zeta \in \Omega$) on montre facilement que F se développe en série de fonctions holomorphes hmogènes:

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(\zeta), \quad \zeta \in \Omega \tag{5.7}$$

où F_k est holomorphe sur $\tilde{X}$, nulle ou homogène de degré k; la convergence étant uniforme sur tout compact de Ω. Comme la restriction de F au disque $\Omega \cap \mathbf{C} \cdot \zeta_0$ coïncide avec (5.6), l'identification des deux développements (5.6) et (5.7) donne:

$$F_k(\zeta_0) = h_\theta^k(\zeta_0), \quad \forall k \geqq 0. \tag{5.8}$$

D'autre part posons $f_k(x) = F_k(x, 1)$ pour $x \in X$. Par homogénéité on obtient à partir de (5.7) l'estimation suivante:

$$\limsup_{k \to \infty} |f_k(x)|^{1/k} \leqq \exp \theta \cdot v(x), \quad \forall x \in X \tag{5.9}$$

Soit $\delta > 0$, la continuité de v et l'estimation (5.9) entraîne grâce au lemme de Hartogs (Théorème 1.6) qu'il existe un entier $k_\delta > 1$ tel que:

$$(5.10) \qquad \frac{1}{k}\log|f_k(x)| \leqq \theta\cdot v(x) + \delta, \quad \forall x \in \delta,\ \forall k \geqq k_\delta.$$

Soit $\zeta_0 = (x_0, 1)$ avec $x_0 \in E$. La continué de v et la relation (5.8) montrent qu'il existe un entier $k_0 > k_\delta$ et un voisinage $U(x_0)$ de x_0 dans X tels que:

$$\frac{1}{k_0}\log|f_{k_0}(x) > \theta\cdot v(x) - \delta, \quad \forall x \in U(x_0).$$

Par compacité de E, on en déduit compte tenu de (5.10) qu'il existe un nombre fini d'indices $k_1, \ldots, k_m > k_\delta$ tels que:

$$(5.11) \qquad \theta\cdot v(x) - \delta \leqq \sup_{1 \leqq i \leqq m} \frac{1}{k_i}\log|f_{k_i}(x)| \leqq \theta\cdot(x) + \delta,\ \forall x \in E.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit $\delta > 0$ tel que $4\delta = \varepsilon$ et $\theta \in]0, 1[$ tel que $-\delta \leqq (1 - \theta)v(x) \leqq \delta$ pour tout $x \in E$. L'inégalité (5.11) s'écrit alors

$$(5.12) \qquad v(x) - 2\delta \leqq \sup_{1 \leqq i \leqq m} \frac{1}{k_i}\log|f_{k_i}(x)| \leqq v(x) + 2\delta,\ \forall x \in E.$$

En posant $d_i = k_i$ et $f_i = e^{-2\delta d_i}\cdot f_{k_i}$ pour $i = 1, \ldots, m$, on obtient des fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_m$ sur X qui d'après (5.12) vérifient les inégalités (5.5). De plus chaque f_i est la restruction à X d'une fonction holomorphe sur le cône $\tilde{X}$ et homogène de degré d_i. Le fait que f_i est la restriction à X d'un polynôme de degré au plus d_i est alors une conséquence du lemme suivant:

LEMME 5.3. *Soit Y un cône algébrique de $\mathbf{C}^N$ et f une fonction holomorphe sur Y à croissance polynômiale vérifiant l'estimation:*

$$(5.13) \qquad |f(y)| \leqq c\cdot(1 + |y|)^d,\ \forall y \in Y$$

où $c > 0$ et $d > 0$ sont des constantes ne dépendant que de f.

Alors f est la restriction à Y d'un polynôme de N variables complexes de degré au plus d.

DÉMONSTRATION DU LEMME 5.3. D'après le théorème B de Cartan, f se prolonge en une fonction holomorphe F sur $\mathbf{C}^N$. Cette fonction se développe en série de polynômes homogènes:

$$(5.14) \qquad F(z) = \sum_{k=p}^{\infty} Q_k(z), \quad \forall z \in \mathbf{C}^N$$

où Q_k est un polynôme de N variables complexes nul ou homogène de degré k. La convergence étant uniforme sur tout compact de $\mathbf{C}^N$. Fixons $y \in Y$ et considérons la fonction d'une variable complexe $\lambda \mapsto F(\lambda \cdot y) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(y)\lambda^k$. D'après l'inégalité (5.13) on a $|F(\lambda y) \leqq c(1 + |\lambda| \cdot |y|)^d$ pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$. Les inégalités de Cauchy classiquent impliquent alors que $Q_k(y) = 0$ pour tout $k \geqq d + 1$. On en déduit d'après (5.14) que $f(y) = \sum_{k=0}^{d} Q_k(y)$ pour tout $y \in Y$.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 5.1.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.1. Si $f \in A_d(X)$, on a $\frac{1}{d} \log |f| \in \mathscr{L}(X)$, et donc on a l'inégalité:

(5.15) $$\sup\left\{\frac{1}{d}\log|f|; f \in A_d(X),\, d \geqq 1,\, \|f\|_K \leqq 1\right\} \leqq g_K, \text{ sur } X.$$

Pour prouver l'autre inégalité, désignons par γ_K le premier membre de (5.15). Soit $v \in \mathscr{L}(X) \cap \mathscr{C}(X)$ telle que $v \leqq 0$ sur K, E un compact quelconque de X contenant K et $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 5.2, on peut trouver des entiers $d_1, \ldots, d_m \geqq 1$, des fonctions $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}(X)$ avec $f_i \in A_{d_i}(X)$ pour $i = 1, \ldots, m$ tels que l'inégalité (5.5) soit vérifiée. Il en résulte alors puisque $K \subset E$, que, l'on a

(5.16) $$\operatorname{sum}_{1 \leqq i \leqq m}\left\{\frac{1}{d_i}\log|f_i|\right\} \leqq \gamma_K, \text{ sur } X.$$

L'inégalité (5.16) jointe à (5.5) implique alors que $v(x) - \varepsilon \leqq \gamma_K(x)$ pour tout $x \in E$. Comme $\varepsilon > 0$ et $E \subset\subset X$ sont arbitraires, on déduit que $v \leqq \gamma_K$ sur X et donc $g_K \leqq \gamma_K$ sur X, ce qui prouve l'inégalité (5.4)

Comme application de ce qui précède nous allons prouver une version généralisée du théorème d'approximation classique de Bernstein-Walsh dû à Siciak dans $\mathbf{C}^n$ ([Sc,1]) (voir aussi [Za,2]).

Si U est un ouvert de X, on désignera par $\mathcal{O}(U)$ l'espace des fonctions holomorphes sur U. Muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de U, $\mathcal{O}(U)$ est une espace de Fréchet ([G-R, Théorème 5, p. 158).

Si K est un compact de X, $\mathcal{O}(K)$ désignera la limite inductive des espaces $\mathcal{O}(U)$, lorsque U décrit un système fondamental de voisinages ouverts de K.

Pour chaque entier $d \geqq 1$, on pose pour $f \in \mathscr{C}(K)$:

(5.16) $$\varepsilon_d(f; K) := \inf\{\|f - P\|_K;\, P \in A_d(X)\}.$$

Nous allons prouver le résultat suivant:

THÉORÈME 5.4. *Soit K un compact L-régulier de X tel que g_K soit plurisousharmonique sur X. Alors pour tout $r > 1$ et $\theta > 0$, il existe une constante $c(r, \theta) >$ telle que:*

$$\varepsilon_d(f; K) \leqq c(r, \theta) \cdot r^{-d} \cdot \|f\|_{\Omega_{r+\theta}}, \ \forall f \in \mathcal{O}(\bar{\Omega}_{r+\theta}), \ \forall d \geqq 1. \tag{5.17}$$

où $\Omega_p := \{x \in X; g_K(x) < \log \rho\}$.

DÉMONSTRATION. Comme dans la preuve du lemme 5.2, considérons le cône X de $\mathbf{C}^{N+1}$ obtenu en homogénéisant X, et soit $\tilde{K}$ l'image de K par l'application $x \mapsto (x, 1)$ qui identifie X à une hypersurface de $\tilde{X}$.

Soit $\alpha \in]0, 1[$, considérons l'application h_α définie sur $\tilde{X}$ par:

$$h_\alpha(x, t) = \begin{cases} |t| \exp \alpha g_K(x/t) & \text{si } (x, t) \in \tilde{X} \text{ et } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x, 0) \in \tilde{X} \end{cases}$$

D'après le théorème 1.6, h_α est p.s.h. continue sur $\tilde{X}$. De plus h_α est C-homogène et vérifie

$$h_\alpha(x, 1) = \exp \alpha \cdot g_K(x), \ \forall x \in X. \tag{5.18}$$

Posons pour $r > 1$:

$$\Omega_r := \{x \in X; g_K(x) < \log r\}$$

$$D_r := \{y \in \tilde{X}; h_\alpha(y) < r\}$$

D'après (5.18) on a $D_{\rho^\alpha} \cap \pi(X) = \pi(\Omega_\rho)$ pour tout $\rho > 1$. D'après Fornaess et Narasimhan [F-N] D_ρ est un espace de Stein pour tout $\rho > 1$. Il résulte alors du théorème B de Cartan que pour chaque $\rho > 1$, l'application restriction

$$\mathcal{O}(D_{\rho^\alpha}) \to \mathcal{O}(\Omega_\rho) \tag{5.19}$$

est un opérateur linéaire *continu et surjectif.*

Soit $r > 1$ et $\theta > 0$, on choisit $\alpha \in]0, 1[$ tel que $r > (r + \theta)^\alpha < r + \theta$. Alors l'ensemble $\tilde{K}_r := \{\lambda \cdot y; |\lambda| = r, y \in \tilde{K}\}$ est un compact $\subset D_{(r+\theta)^\alpha}$. En applicant le théorème de l'application ouverte à (5.19) avec $\rho = r + \theta$, on en déduit qu'il existe un compact $L \subset \Omega_{r+\theta}$ et une constante $c_1(r, \theta)$ tels que pour tout $f \in \mathcal{O}(D_{(r+\theta)^\alpha})$ telle que $\tilde{f}(x, 1) = f(x)$, $\forall x \in \Omega_{r+\theta}$ et

$$\|\tilde{f}\|_{\tilde{K}_r} \leqq c_1(r, \theta) \cdot \|f\|_L. \tag{5.20}$$

Fixons $f \in \mathcal{O}(\Omega_{r+\theta})$. L'ouvert $D := D_{(r+\theta)^\alpha}$ est disqué dans le cône algébrique $\tilde{X}$ et donc la fonction $\tilde{f} \in \mathcal{O}(D)$ se développe en série de fonctions holomorphes homogènes:

$$\tilde{f}(y) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(y), \quad y \in D \tag{5.21}$$

où F_j est holomorphe nulle ou homogène de degré j sur $\tilde{X}$; la convergence étant uniforme sur tout compact de D. D'après le lemme 5.3, F_j est alors la restriction à $\tilde{X}$ d'un polynôme de $N + 1$ variables complexes de degré au plus j. Par conséquent puisque $\tilde{K} \subset D$, il résulte de (5.21) que l'on a:

$$\varepsilon_d(\tilde{f}; \tilde{K}) \leqq \sum_{j=d+1}^{\infty} \|F_j\|_{\tilde{K}}, \quad \forall d \geqq 1. \tag{5.22}$$

Soit $y \in \tilde{K}$, en appliquant les inégalités de Cauchy à la fonction d'une variable complexe $\lambda \to \tilde{f}(\lambda y) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(y)\lambda^j$ holomorphe dans le disque $\{\lambda \in \mathbf{C}; \lambda\zeta \in D\} = \{\lambda \in \mathbf{C}; \lambda\zeta \in D\} = \{\lambda \in \mathbf{C}; |\lambda| < (r + \theta)^\alpha\}$, on obtient:

$$|F_j(y)| \leqq r^{-j} \cdot \sup_{|\lambda| = r} |F(\lambda y)|, \quad \forall j \geqq 1. \tag{5.23}$$

Des estimations (5.22) et (5.23), on déduit facilement la suivante:

$$\varepsilon_d(\tilde{f}; \tilde{K}) \leqq \frac{r}{r-1} \cdot \frac{\|\tilde{f}\|_{\tilde{K}_r}}{r^{d+1}}, \quad \forall d \geqq 1. \tag{5.24}$$

Il est bien connu qu'il existe pour chaque entier $d \geqq 1$, $Q_d \in A_d(Y)$ tel que $\varepsilon_d(\tilde{f}; \tilde{K}) = \|\tilde{f} - Q_d\|_{\tilde{K}}$. En posant $P_d(x) = Q_d(x, 1)$, on en déduit, en tenant compte des estimations (5.24) et (5.20), les estimations suivantes:

$$\varepsilon_d(f; K) \leqq \|f - P_d\|_K \leqq c_1(r, \theta) \cdot \frac{r}{r-1} \frac{\|f\|_L}{r^{d+1}}, \quad \forall d \geqq 1 \tag{5.25}$$

puisque $L \subset \Omega_{r+\theta}$, on en déduit que l'inégalité (5.17) a lieu avec $c(r, \theta) = c_1(r, \theta) \cdot \dfrac{1}{r-1}$.

COROLLAIRE 5.5. *Supposons X localement irréductible et K L-régulier dans X. Alors les estimations (5.17) du théorème 5.4 sont satisfaites.*

REMARQUE 5.6. 1) En reprendant la démonstration du théorème 5.4, on peut montrer que si X est *localement irréductible* et $K \subset X$ est un compact non pluripolaire, alors on a encore les astimations suivantes:

$$\varepsilon_d(f; K) \leqq c(r; \theta) r^{-d} \cdot \|f\|_{\bar{\Omega}_{r+\theta}}, \forall r > r_0 := \sup_K \exp g_K^*$$

pour tout $f \in \mathcal{O}(\bar{\Omega}_{r+\theta})$.

2) Dans le cas où X est une intersection complète lisse d'hypersurfaces algébriques, nous avons montré dans [Ze,1] que la constante $c(r, \theta)$ est majorée par r^{N_θ} pour $r \to \infty$, où N_θ est un entier ne dépendant que de la variété X, et du nombre réel $\theta > 0$. Nous ne savons pas si cette majoration reste vraie dans le cas général.

Signalons pour terminer une conséquence intéressante du Théorème 5.4 concernant l'approximation rationelle des fonctions holomorphes à singularités algébriques.

Soit X une variété algébrique affine de dimension n dans $\mathbf{C}^N$ et $Q \in A_d(X)$, $Q \not\equiv 0$ sur chaque composante irréductible de X. On supposera pour simplifier que X est localement irréductible.

On pose $Y := X \backslash Q^{-1}(0)$. Y est alors une variété algébrique affine via l'application rationelle birégulière:

$$H : Y \to \tilde{Y} \subset \mathbf{C}^{N+1}$$

$$x \mapsto \left(x, \frac{1}{Q(x)}\right)$$

on peut donc définir sur Y, grâce à l'application H, un potentiel parabolique g tel que $g(x) - \log\left(|x| + \dfrac{1}{|Q(x)|}\right)$ soit borné sur Y. Posons $A_m(Y) = \mathbf{C}_m\left[x, \dfrac{1}{Q(x)}\right]$, $m \geqq 1$. Les éléments de $A_m(Y)$ sont des fractions rationnelles sur Y qui s'écrivent $\dfrac{P_m(x)}{Q(x)^m}$, où $P_m \in A_{(m+1)d}(X)$.

La fonction de Green associée à un compact $K \subset Y$ s'écrit alors d'après le théorème 5.1:

$$g_K(x) = \sup\left\{\frac{1}{m}\log|f(x)|; f \in A_m(Y), \|f\|_K \leqq 1, m \geqq 1\right\}.$$

Notons pour $s > 1$:

$$Y_s := \{x \in Y; g_K(x) < \log s\}.$$

Du théorème 5.4 on déduit un théorème à la Bernstein Walsh concernant l'approximation rationnelle des fonctions holomorphes sur X à singularités dans l'hypersurface algébrique $Q^{-1}(0)$ dans X.

Théorème 5.7. *Soit K un compact P-réglier de Y. Alors pour tout $s > 1$ et $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c(\varepsilon, s) > 0$ vérifiant la propriété suivante:*

Pour tout $f \in \mathcal{O}(\bar{Y}_{s+\varepsilon})$ il existe une suite de fractions rationnelles sur X de la forme $r_j(x) = P_j(x)/Q^j(x)$, où $P_j \in A_{(j+1)d}(X)$ telle que

$$\max_{x \in K}|f(x) - r_j(x)| \leqq c(\varepsilon, s)s^{-j\cdot d}\|f\|_{Y_{s+\varepsilon}}, \quad \forall j \geqq 1.$$

Ce théorème qui à notre connaissance n'est pas connu, a des conséquences intéressantes que nous développerons dans un travail ultérieur.

REFERENCES

[Bd] E. Bedford, *The operator $(dd^c)^n$ on complex spaces*, Séminaire d'Analyse Lelong-Skoda, Lecture Notes in Math., 919 (1981), 294–324.

[B-T,2] E. Bedford et B. A. Taylor, *A new capacity for plurisubharmonic functions*, Acta Math., 149 (1982), 1–40.

[B-T,3] E. Bedford et B. A. Taylor, *Fine topology, Shilov boundary and $(dd^c)^n$*, J. Funct. Anal. 72 (1987), 115–251.

[Bs] S. Bernstein, *Sur l'ordre de la meilleure approximation polynômiale des fonctions continues*, Bruxelles, 1912.

[D] J. P. Demailly, *Mesures de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variété algébriques affines*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) 19 (1985), 1–124.

[F-N] J. E. Fornaess et R. Narasimhan, *The Levi Problem on complex spaces with singularities*, Math. Ann. 248 (1980), 47–72.

[G-R] R. C. Gunning et H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prince Hall, INC, Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[H] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North Holland, second edition, 1973.

[J] B. Josefson, *On the equivalence between locally polar and globally polar sets for plurisubharmonic functions on* $\mathbf{C}^n$, Ark. Mat 16 (1978), 109–115.

[K] M. Klimek, *Extremal Plurisubharmonic Functions and L-regular sets in* $\mathbf{C}^n$, Jagellonian University, Institute of Mathematics, Thesis, 1981.

[Lej] F. Leja, *Sur les suites de ploynômes, les ensembles fermés et la fonction de Green*, Ann. Soc. Polon. Math. 12 (1934), 57–71.

[Lel,1] P. Lelong, *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables)*, Presses de l'Université de Montréal, 28, 1967.

[Lel,2] P. Lelong, *Fonctions entières de type exponentiel dans* $\mathbf{C}^n$, Ann. Inst. Fourier, 16 (1966), 269–318.

[Lev] N. Levenberg, *Monge Ampère measures associated to plurisubharmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. (1985), 333–343.

[Loj] S. Lojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques*, I.H.E.S. Bures sur Yvette, 1964.

[Na] R. Narasimhan, *Introduction to the Theory of Analytic Spaces*, Lectures Notes in Math. Springer-Verlag , 25, 1966.

[N-Z] T. V. Nguyen et A. Zeriahi, *Familles de polynômes presque partout bornées*, Bull. Sci Math 179 (1983), 81–91.

[P,1] W. Plesniak, *Remarques sur une généralisation de l'inégalité de S. Bernstein*, C.R. Acad. Sc. Paris. 284 (1977), 1211–1213.

[P,2] W. Plesniak, *L-regularity of subanalytic sets in* $\mathbf{R}^n$, Bull. Acad. Polon. Sc. Math. 32 (1984), 647–651.

[R] W. Rudin, *A geometric criterion for algebraic varieties*, J. Math. and Mec 17 (1968), 671–683.

[Sa,1] A. Sadullaev, *A criterion for the algebraicity of analytic sets*, Inst. Fiz. Sibirsk. Otdel. Akad. USSR, Krasnoyarsk (1976), 107–122.

[Sa,2] A. Sadullaev, *Plurisubharmonic measures and capacities on complex manifolds*, Russian Math. Surveys 36 (1981), 61–119.

[Sa,3] A. Sadullaev, *An estimate for polynomials on analytic sets*, Math. USSR Izv. 20 (1983), 493–502.

[Sb] N. Sibony, *Prolongement des fonctions holomorphes bornées et métrique de Caratheodory*, Invent. Math. 29 (1975), 205–230.

[Sc,1] J. Siciak, *On some extremal functions and their applications in the theory of analytic functions of several variables*, Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), 332–357.

[Sc,2] J. Siciak, *Extremal plurisubharmonic functions in* $\mathbf{C}^n$, Ann. Polon. Math. 34 (1981), 175–211.

[St] W. Stoll, *Value distribution theory on parabolic spaces*, Lecture Notes in Math., Springer Verlag, 600, 1977.

[U] J. Ullman, *Orthogonal polynomials for general measures*, I. Proc. Tampa Conference on Rational approximation and interpolation, 1983.

[W] J. L. Walsh, *Interpolation et Approximation by Rational Functions*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 20, Providence, Boston, 1960.

[Za,1] V.P. Zaharyuta, *Extremal plurisubharmonic functions, Hilbert scales and the isomorphism of spaces of analytic functions of several variables*, I, II, Teor. Funcii Funkcional. Anal. Priložen. 19 (1974), 133–157; 21 (1974), 65–83 (Russian).

[Za,2] V. P. Zaharyuta, *Extremal plurisubharmonic functions, orthogonal polynomials and Bernstein-Wals theorem for analytic functions of several variables*, Ann. Polon. Math. 33 (1976), 137–148 (Russian).

[Ze,1] A. Zeriahi, *Meilleure approximation polynomiale et croissance des fonctions holomorphes sur certaines variétés algébriques affines*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 37, 79–104.

[Ze,2] A. Zeriahi, *Fonctions plurisousharmoniques extremales, Approximation et croissance des fonctions holomorphes sur des ensembles algébriques*, Thèse de Doctorat d'Etat, U.P.S. Toulouse, 1986.

[Ze,3] A. Zeriahi, *Blases de Schauder et Isomorphismes d'espaces de fonctions holomorphes* , C.R. Acad. Sc. Paris 310 (1990), 691–694.

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER
LABORATOIRE D'ANALYSE COMPLEXE
U.F.R. - M.I.G.
118, ROUTE DE NARBONNE
31062 TOULOUSE
FRANCE