MATH. SCAND. 69 (1991), 152–160

BI-FONCTIONS MOMENT

DRAGU ATANASIU

1. Introduction.

Soit $(T, \cdot)$ un semi-groupe commutatif sans élément neutre et avec l'involution $*$.

On dit que la fonction $g: T \times T \to \mathbf{C}$ est une bi-fonction définie positive si les deux conditions suivantes sont remplies.

1.1. Pour tout choix d'éléments $t_1, \ldots, t_n$ de T et de nombres complexes $c_1, \ldots, c_n$ on a

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j \bar{c}_k g(t_j, t_k) \geqq 0$$

1.2. Si x, y, t sont dans T alors

$$g(tx, y) = g(x, t^* y)$$

On dit que la fonction g: $T \times T \to \mathbf{C}$ est un noyau défini positif si g satisfait seulement à la condition 1.1.

Soit Q un ensemble non vide, $(a_q)_{q \in Q}$ et $(b_{t,q})_{t \in T, q \in Q}$ deux familles de nombres complexes telles que pour q fixé on a $b_{t,q} \neq 0$ seulement pour un nombre fini de t. Pour $q \in Q$ et une fonction g: $T \times T \to \mathbf{C}$ on note par g_q la fonction $T \times T \to \mathbf{C}$ définie par

$$g_q(x, y) = a_q g(x, y) + \sum_{t \in T} b_{t,q} g(tx, y).$$

Soit $(M_t)_{t \in T}$ une famille de réels strictement positifs. Pour un élément t de T et une fonction g: $T \times T \to \mathbf{C}$ on note par g'_t la fonction $T \times T \to \mathbf{C}$ définie par

$$g'_t(x, y) = M_t^2 g(x, y) - g(tx, ty).$$

Soit

$$\Gamma = \{\rho: T \to \mathbf{C}/\rho \not\equiv 0, \rho(xy) = \rho(x)\rho(y), \rho(t^*) = \overline{\rho(t)}\}$$

l'ensemble de semi-caractères de T.

Reçu Mars 5, 1990; revisé Octobre 10, 1990.

Avec la topologie de convergence ponctuelle Γ est un espace complètement régulier de Hausdorff.

Si $\Delta \subset \Gamma$ on dit que la fonction $g: T \times T \to \mathbf{C}$ est une bi-fonction moment sur Δ si'l existe une mesure de Radon positive μ sur Δ ([2], p. 16) telle que

$$g(x, y) = \int_\Delta \rho(xy^*) d\mu(\rho).$$

On dit que la mesure μ représente g. On remarque qu'une bi-fonction moment est une bi-fonction définie positive.

Soit $\Omega = \{\rho \in \Gamma / \sum_{t \in T} b_{t,q}\rho(t) + a_q \geqq 0, q \in Q; |\rho(t)| \leqq M_t, t \in T\}$.

Soit $g: T \times T \to \mathbf{C}$ un noyau défini positif. Pour $t \in T$ on note par $\pi(t)$ la fonction $T \to \mathbf{C}$ définie par

$$\pi(t)(x) = g(t, x)$$

Soit h_g le sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^T$ engendré par les fonctions $\{\pi(t) \mid t \in T\}$. Comme dans [2], p. 81, 3.1 on considère sur h_g le produit scalaire $\langle,\rangle$ pour lequel $\langle \pi(x), \pi(y) \rangle = g(x, y)$.

Ainsi h_g devient un expace préhilbertien. On note

$D = \{g: T \times T \to \mathbf{C}$, g noyau défini positif$/\{\pi(xy) \mid x, y \in T\}$ est un ensemble total dans $h_g\}$.

2. La représentation intégrale.

2.1. Lemme. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un noyau défini positif $g: T \times T \to \mathbf{C}$ soit dans D est:*

2.1.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout choix d'éléments $t_1, \ldots, t_n$ de T et de nombres complexes $c_1, \ldots, c_n$ il existe des éléments $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m$ de T et des nombres complexes $c_{n+1}, \ldots, c_{n+m}$ tels que*

$$\sum_{j,k=1}^{m+n} c_j \overline{c_k} g(t_j, t_k) \leqq \varepsilon,$$

où pour $1 \leqq p \leqq m$ on a $t_{n+p} = x_p y_p$.

Démonstration. Il résulte de la définition du produit scalaire dans h_g.

2.2. Remarque. Pour que g soit dans D il suffit qu'on puisse approximer les fonctions $\{\pi(t) \mid t \in T\}$ par des combinaisons linéaires des fonctions $\{\pi(xy) \mid x, y \in T\}$. Par conséquent 2.1.1 est équivalente avec la condition suivante: Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t \in T$ il existe des éléments $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m$ et des nombres complexes $c_1, \ldots, c_m$ tels que

$$\sum_{j,k=0}^{m} c_j \overline{c_k} g(t_j, t_k) \leqq \varepsilon$$

où $t_0 = t$, $c_0 = 1$ et pour $1 \leqq p \leqq m$ on a $t_p = x_p y_p$.

2.3. THÉORÈME. *Une bi-fonction définie positive $g: T \times T \to \mathbf{C}$ est une bi-fonction moment sur Ω si et seulement si on a les conditions suivantes:*

2.3.1. *Les $(g_q)_{q \in Q}$ et les $(g'_t)_{t \in T}$ sont des noyaux définis positifs.*

2.3.2. $g \in D$.

De plus la mesure qui représente g est unique.

DÉMONSTRATION. Au commencement nous allons démontrer la suffisance des conditions. Pour $t \in T$ soit $U(t)$ l'opérateur linéaire $h_g \to h_g$ tel que

$$U(t)(\pi(x)) = \pi(tx).$$

Grâce à la condition 1.2 l'opérateur $U(t)$ est bien défini. Parce que g'_t est un noyau défini positif on a

$$\|U(t)(\sum_{j=1}^{n} c_j \pi(t_j))\| \leqq M_t \| \sum_{j=1}^{n} c_j \pi(t_j)\|.$$

Par suite $U(t)$ est continu et peut être considéré comme un opérateur borné sur le completé H_g de h_g. (H_g peut être considéré toujours comme un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^T$, [2], p. 82.)

On a $U(xy) = U(x)U(y)$, $U(t^*) = (U(t))^*$. Soit I l'opérateur identité de H_g. Si B est l'algèbre fermée (d'opérateurs de H_g), engendrée par $(U(t))_{t \in T}$ alors $A = B + \mathbf{C}I$ est toujours une algèbre fermée. Soit X l'ensemble de caractères de A. X est un compact de $\mathbf{C}^A$.

Si $K = \{\rho: T \to \mathbf{C}/\rho = \delta \circ U, \delta \in X\}$,
alors la fonction $\omega: X \to K$ définie par $\omega(\delta) = \delta \circ U$ est une bijection continue (X et K sont munis de la topologie de convergence ponctuelle et la famille $(U(t))_{t \in T}$ est dense dans B) et par suite un homéomorphisme parce que X est compact.

Si $\theta: T \to \mathbf{C}$ est la fonction nulle alors $K \subset \Gamma \cup \{\theta\}$.

Soit $\mathscr{C}(K) = \{f: K \to \mathbf{C}/f \text{ continue}\}$.

On considère sur $\mathscr{C}(K)$ la norme $\|f\| = \sup_{\rho \in K} |f(\rho)|$. Du théorème de Gelfand-Neumark et du fait que ω est un homéomorphisme on obtient que la fonction $\varphi: A \to \mathscr{C}(K)$ définie par

2.3.3 $$\varphi(V)(\rho) = \omega^{-1}(\rho)(V)$$

est un isomorphisme isométrique d'algèbres de Banach. Soit

$$L = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \mathbf{C}^n \times T^n.$$

Si $\alpha = (c_1, \ldots, c_n, t_1, \ldots, t_n)$ est dans L alors la fonction $A \to \mathbf{C}$ définie par

$$V \mapsto \sum_{j,k=1}^{n} c_j \bar{c}_k \langle V(\pi(t_j)), \pi(t_k) \rangle$$

est linéaire continue et par suite on peut définir une mesure de Radon ν_α sur K par

2.3.4 $$\int_K \omega^{-1}(\rho)(V)\, d\nu_\alpha(\rho) = \sum c_j \bar{c}_k \langle V(\pi(t_j)), \pi(t_k) \rangle.$$

Nous avons aussi

2.3.5 $$\int_K \omega^{-1}(\rho)(U(t))\, d\nu_\alpha(\rho) = \int_K \rho(t)\, d\nu_\alpha(\rho)$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} c_j \bar{c}_k \langle U(t)(\pi(t_j)), \pi(t_k) \rangle = \sum_{j,k=1}^{n} c_j \bar{c}_k g(tt_j, t_k)$$

et

2.3.6 $$\int_K \omega^{-1}(\rho)(I)\, d\nu_\alpha(\rho) = \int_K d\nu_\alpha(\rho) = \sum_{j,k=1}^{n} c_j \bar{c}_k g(t_j, t_k).$$

Pour $\alpha \in L$, $\alpha = (c_1, \ldots, c_n, t_1, \ldots, t_n)$ on note par f_α la fonction $K \to \mathbf{C}$ définie par

$$\rho \mapsto \Big| \sum_{j=1}^{n} c_j \rho(t_j) \Big|^2.$$

En utilisant 2.3.4 on a pour $\alpha, \beta \in L$,

$$\alpha = (c_1, \ldots, c_n, t_1, \ldots, t_n)$$
$$\beta = (d_1, \ldots, d_m, z_1, \ldots, z_m)$$

2.3.7 $$\sum_{j,k=1}^{n} \sum_{q,p=1}^{m} c_j \bar{c}_k d_q \bar{d}_p \langle V\pi(t_j z_q), \pi(t_k z_p) \rangle$$

$$= \int_K \omega^{-1}(\rho)(V) f_\beta(\rho) \mathrm{d}\nu_\alpha(\rho) = \int_K \omega^{-1}(\rho)(V) f_\alpha(\rho)\, d\nu_\beta(\rho)$$

parce que pour $x, y, z, t \in T$ on a

$$\langle V(\pi(xy)), \pi(zt) \rangle = \langle U(t^*)\, V U(y)(\pi(x)), \pi(z) \rangle.$$

En faisant $V = I$ dans 2.3.7 on obtient

2.3.8 $$\int_K f_\beta(\rho)\,d\nu_\alpha(\rho) = \sum_{j,k=1}^{n} \sum_{q,p=1}^{m} c_j \bar{c}_k d_q \bar{d}_p g(t_j z_q, t_k z_p) \geqq 0 \quad \alpha, \beta \in L$$

Si G est une fonction positive continue sur K alors en utilisant le théorème de Stone-Weierstrass on peut approximer la fonction $G^{1/2}$ par des fonctions du type $\rho \mapsto \sum_{j=1}^{m} d_j \rho(z_j)$ et par suite il résulte de 2.3.8 que la mesure ν_α est positive pour tout $\alpha \in L$.

Nous allons montrer qu'il existe une mesure unique ν sur $O = K - \{\theta\}$ telle que

2.3.9 $$f_\alpha|_O \cdot \nu = \nu_\alpha|_O \quad \alpha \in L.$$

En vertu de 2.3.7 on a $f_\alpha \cdot \nu_\beta = f_\beta \cdot \nu_\alpha$.

Si $O_\alpha = \{\rho \in K / f_\alpha(\rho) > 0\}$ on peut définir $\nu|_{O_\alpha} = (1/f_\alpha|_{O_\alpha})\,\nu_\alpha|_{O_\alpha}$.

On a $\bigcup_{\alpha \in L} O_\alpha = O$ d'où il résulte que ν est entièrement définie.

On obtient de 2.3.5 et 2.3.9 les relations suivantes:

$$g(tx, x) = \int_O \rho(t)\,|\rho(x)|^2\,d\nu(\rho)$$

$$g(ty, y) = \int_O \rho(t)\,|\rho(y)|^2\,d\nu(\rho)$$

$$g(tx, x) + g(tx, y) + g(ty, x) + g(ty, y) = \int_O \rho(t)\,|\rho(x) + \rho(y)|^2\,d\nu(\rho)$$

$$g(tx, x) - ig(tx, y) + ig(ty, x) + g(ty, y) = \int_O \rho(t)\,|\rho(x) + i\rho(y)|^2\,d\nu(\rho).$$

Il en résulte:

2.3.10 $$g(tx, y) = \int_O \rho(txy^*)\,d\nu(\rho).$$

Soit $\alpha \in L$, $\alpha = (c_1, \ldots, c_n, t_1, \ldots, t_n)$ et soit $\gamma \in L$

$$\gamma = (c_1, \ldots, c_n, c_{n+1}, \ldots, c_{n+m}, t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}, \ldots, t_{m+n})$$

telle que la condition 2.1.1 soit remplie.

On a

$$\nu_\alpha(\{\theta\}) = \int_K d\nu_\alpha - \int_O d\nu_\alpha = \qquad \text{(en vertu de 2.3.6 et 2.3.9)}$$

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j \bar{c}_k g(t_j, t_k) - \int_O |c_1 \rho(t_1) + \ldots + c_n \rho(t_n)|^2 \, d\nu(\rho) =$$

(en vertu de 2.1.1 et 2.3.10)

$$\sum_{j,k=1}^{m+n} c_j \bar{c}_k g(t_j, t_k) - \int_O |c_1 \rho(t_1) + \ldots + c_{m+n} \rho(t_{m+n})|^2 \, d\nu(\rho) \leqq \varepsilon.$$

Par conséquent on a:

2.3.11 $$\nu_\alpha(\{\theta\}) = 0 \quad \alpha \in L.$$

En utilisant 2.3.6 et 2.3.11 on obtient

$$g(x, y) = \int_O \rho(xy^*) \, d\nu(\rho).$$

Comme les fonctions $(g_t')_{t \in T}$ (resp. $(g_q)_{q \in Q}$) sont des noyaux définis positifs il résulte que les opérateurs

$$(M_t^2 I - U(tt^*))_{t \in T} \, (\text{resp. } (a_q I + \sum_{t \in T} b_{t,q} U(t))_{q \in Q})$$

sont positifs ce qui implique en vertu de [4], p. 303, 15.3.1 que si $\delta \in X$ alors

$$M_t^2 - \delta \circ U(tt^*) \geqq 0, \, t \in T (\text{resp. } a_q + \sum_{t \in T} b_{t,q} \delta \circ U(t) \geqq 0, q \in Q)$$

et cela signifie à cause de la définition de K que O est un sous-ensemble (évidemment fermé) de Ω. Par conséquent g est une bi-fonction moment et la mesure qui représente g sera l'extension canonique de ν à Ω.

Ainsi la suffisance des conditions est complètement démontrée.

L'unicité de la mesure qui représente g se démontre comme dans [5], p. 106.

Pour démonstrer la nécessité des conditions supposons que pour la fonction g: $T \times T \to \mathbf{C}$ il existe une mesure de Radon positive μ sur Ω telle que

$$g(x, y) = \int_\Omega \rho(xy^*) \, d\mu(\rho)$$

La nécessité de la condition 2.3.1 résulte de la représentation intégrale de g dans ce cas. Soit Λ le compact $\Omega \cup \{\theta\}$.

Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^{\Lambda}$ engendré par les fonctions

$$\rho \mapsto \rho(x)\rho(y) \quad x, y \in T$$

Si $\rho_1, \rho_2 \in \Lambda$, $\rho_1 \neq \rho_2$ alors il existe $t \in T$ avec $\rho_1(t) \neq \rho_2(t)$ et par suite on a ou $(\rho_1(t))^2 \neq (\rho_2(t))^2$ ou $(\rho_1(t))^3 \neq (\rho_2(t))^3$.

Il en résulte d'après le théorème Stone-Weierstrass que l'algèbre $Y = \{\varphi \in \mathbf{C}^{\Lambda}/\varphi = \lambda + \psi, \lambda \in \mathbf{C}, \psi \in W\}$ est dense dans l'algèbre des fonctions continues $\Lambda \to \mathbf{C}$.

Soit $\alpha \in L$, $\alpha = (c_1, \ldots, c_n, t_1, \ldots, t_n)$ et soit $\varepsilon > 0$. On note φ_α la fonction $\Lambda \to \mathbf{C}$ définie par

$$\varphi_\alpha(\rho) = \sum_{j=1}^{n} c_j \rho(t_j)$$

Comme les fonctions continues à support compact sont denses dans l'espace des fonctions à carré intégrable il existe une fonction continue u: $\Omega \to \mathbf{C}$ à support compact telle que

2.3.12 $$\int_\Omega |\varphi_\alpha(\rho) - u(\rho)|^2 \, \mathrm{d}\mu(\rho) \leqq \varepsilon.$$

Si $\mu(\operatorname{supp}(u)) = 0$ la nécessité de la condition 2.3.2 (pour α et ε fixés) est triviale. Supposons donc que $\mu(\operatorname{supp}(u)) > 0$. Si $\rho \in \operatorname{supp}(u)$ alors il existe $t \in T$ tel que $\rho(t) \neq 0$.

Il en résulte en tenant compte que le support de u est compact qu'il existe $z_1, \ldots, z_p$ éléments de T tels que la fonction v: $\Lambda \to \mathbf{C}$ définie par $v(\rho) = \sum_{j=1}^{p} |\rho(z_j)|^2$ soit $\neq 0$ sur $\operatorname{supp}(u)$. De l'hypothèse il résulte que $\int_\Omega (v(\rho))^2 \, d\mu(\rho) > 0$. La fonction w: $\Lambda \to \mathbf{C}$ définie par $w(\rho) = u(\rho)/v(\rho)$ pour $\rho \in \operatorname{supp}(u)$ et 0 pour $\rho \in \Lambda \backslash \operatorname{supp}(u)$ est continue et par suite il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ et $\psi \in W$ tels que

$$\sup_{\rho \in \Lambda} |w(\rho) - \lambda - \psi(\rho)| \leqq \sqrt{\varepsilon} \Big/ \left(2 \sqrt{\int_\Omega (v(\rho))^2 \, d\mu(\rho)} \right).$$

En tenant compte que $w(\theta) = \psi(\theta) = 0$ on obtient

$$\int_\Omega |u(\rho) - v(\rho)\,\psi(\rho)|^2 \, d\mu(\rho) \leqq \varepsilon$$

ce qui avec 2.3.12 démontre la nécessité de la condition 2.3.2.

2.4. REMARQUE. Comme dans [5] on peut obtenir le théorème 2.3 à partir du théorème fondamental Berg-Maserick sur les fonctions définies positives et exponentiellement bornées [3], p. 169, théorème 2.1.

2.5. REMARQUE. Avec les notations utilisées pour la démonstration de la suffisance des conditions du théorème 2.3. soit f une fonction $O \to \mathbf{C}$, à support compact, positive et telle que $\{\rho \in O \mid f(\rho) > 0\} \neq \varnothing$. Si on pose $F(\theta) = 0, F|_O = f$ on obtient une fonction continue $K \to \mathbf{C}$.

Soit $\nu(f) = 0$. Il résulte de 2.3.9 que pour tout $\alpha \in L$ on a

$$\nu_\alpha(F) = \nu_\alpha|_O(f) = \nu(f_\alpha|_O \cdot f) = 0$$

Mais de la relation 2.3.3 il résulte qu'il existe un élément V de A tel que F soit de la forme $\rho \mapsto \omega^{-1}(\rho)(V)$. En utilisant 2.3.4 et le fait que l'ensemble $\{\pi(t) \mid t \in T\}$ est total dans H_g on obtient que V est 0 et par conséquent que $f \equiv 0$. Cette contradiction avec l'hypothèse montre que le support de la mesure ν est O.

2.6. REMARQUE. En adaptant le théorème 2.3 pour un semi-groupe avec élément neutre on peut reobtenir le théorème fondamental Berg-Maserick et la résolution du problème des moments donnée dans [1], théorème 2.5.

2.7. REMARQUE. Le théorème 2.3 est une extension des théorèmes 1, 4 et 5 de [5].

2.8. REMARQUE. La condition que les $(g_t')_{t\in T}$ soient des noyaux définis positifs peut être exprimée par des conditions apparemment plus faibles. On va le montrer dans la suite.

On dit qu'une fonction v: $T \to]0, \infty[$ est une valeur absolue sur T si

$$v(xy) \leqq v(x)\,v(y) \text{ et } v(t^*) = v(t).$$

PROPOSITION. *Soient g: $T \times T \to \mathbf{C}$ une bi-fonction définie positive et v une valeur absolute sur T. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *Pour tout $t \in T$ la fonction*

$$(x, y) \mapsto v(tt^*)\,g(x, y) - g(tx, ty) \text{ est un noyau défini positif.}$$

b) *On a pour tout $(t, x) \in T^2$*

$$g(tx, tx) \leqq (v(t))^2\,g(x, x).$$

c) *Pour tout $x \in T$ il existe un nombre positif $b(x)$ tel que pour tout $t \in T$ on a*

$g(tx, tx) \leqq (v(t))^2\,b(x).$

Démonstration. Les implications a) $\Rightarrow$ b) et b) $\Rightarrow$ c) sont triviales. c) $\Rightarrow$ a) résulte de [5], p. 103 et [2], p. 90, 1.12.

REFERENCES

1. D. Atanasiu, *Un théorème du type Bochner-Godement et le problème des moments*, J. Funct. Anal. 92 (1990), 92–102.
2. C. Berg, J. P. R. Christensen and P. Ressel, *Harmonic Analysis on Semigroups*, Springer Verlag, 1984.
3. C. Berg and P. H. Maserick, *Exponentially bounded positive definite functions*, Illinois J. Math. 28 (1984), 162–179.
4. J. Dieudonné, *Eléments d'Analyse*, Tome II, Gauthier-Villars, Paris, 1982.
5. P. Ressel, *Integral representations on convex semigroups*, Math. Scand. 61 (1987), 93–111.

MATEMATISKA INSTITUTIONEN
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
S-412 96 GÖTENBORG
SWEDEN