MATH. SCAND. 70 (1992), 27-33

APPENDICE A L'ARTICLE PRECEDENT PAR PH. NUSS: UNE FORMULE DE KÜNNETH POUR LA DÉCOMPOSITION DE L'HOMOLOGIE CYCLIQUE DES ALGÈBRES COMMUTATIVES

CHRISTIAN KASSEL

On fixe un corps commutatif k de caractéristique nulle. Pour simplifier, on appellera algèbre toute k-algèbre associative et unifère.

Des travaux récents de [1], [3], [4], [9], [10] et[13] ont fait apparaître sur les groupes d'homologie de Hochschild et cyclique d'une algèbre *commutative* A des décompositions naturelles (nous adoptons ici les notations de [9]):

$$\mathrm{HH}_*(A) = \bigoplus_{p \geqq 0} \mathrm{HH}_*^{(p)}(A) \text{ et } \mathrm{HC}_*(A) = \bigoplus_{p \geqq 0} \mathrm{HC}_*^{(p)}(A).$$

Ces décompositions sont compatibles avec la suite exacte de Connes qui se scinde en longues suites exactes de la forme ($p \geqq 0$):

$$\ldots \xrightarrow{B} \mathrm{HH}_n^{(p)}(A) \xrightarrow{I} \mathrm{HC}_n^{(p)}(A) \xrightarrow{S} \mathrm{HC}_{n-2}^{(p-1)}(A) \xrightarrow{B} \mathrm{HH}_{n-1}^{(p)}(A) \xrightarrow{I} \ldots.$$

Le but de cette note est de montrer qu'elles sont également compatibles avec les produits en homologie cyclique et de Hochschild et notamment avec la formule de Künneth établie dans [5]. Cette dernière se présente sous la forme de la suite exacte

$$\ldots \to \mathrm{HC}_n(A \otimes B) \to (\mathrm{HC}(A) \otimes \mathrm{HC}(B))_n \xrightarrow{S\otimes 1 - 1 \otimes S} (\mathrm{HC}(A) \otimes \mathrm{HC}(B))_{n-2} \to \ldots.$$

Nuss [11] en déduit la compatibilité de la décomposition et du produit général sur les groupes de cohomologie cyclique bivariante. Nous énonçons le

THÉORÈME 1. *Pour tout couple (A, B) d'algèbres commutatives et tout couple (n, p) d'entiers naturels, on a l'isomorphisme*

$$\mathrm{HH}_n^{(p)}(A \otimes B) \cong (\mathrm{HH}(A) \otimes \mathrm{HH}(B))_n^{(p)}$$

et la longue suite exacte

Reçu le 3 décembre 1990.

$$\ldots \to \mathrm{HC}_n^{(p)}(A \otimes B) \to (\mathrm{HC}(A) \otimes \mathrm{HC}(B))_n^{(p)} \xrightarrow{S\otimes 1 - 1 \otimes S}$$

$$(\mathrm{HC}(A) \otimes \mathrm{HC}(B))_{n-2}^{(p-1)}(A \otimes B) \to \mathrm{HC}_{n-1}^{(p)}(A \otimes B) \to \ldots.$$

On a utilisé ici la convention suivante : si $H = \oplus_{n,p \geqq 0} H_n^{(p)}$ et $K = \oplus_{n,p \geqq 0} K_n^{(p)}$ sont deux espaces vectoriels bigradués, alors on bigradue le produit tensoriel $H \otimes K$ par

$$(H \otimes K)_n^{(p)} = \bigoplus_{\substack{i+j=n \\ q+r=p}} H_i^{(q)} \otimes K_j^{(r)}.$$

2. Remarques. a) Comme $\mathrm{HH}^{(0)}(A) = \mathrm{HH}_0^{(0)}(A) = A$, on retrouve grâce au théorème que la décomposition de l'homologie de Hochschild est une décomposition de A-modules.

b) Pour l'homologie de Harrison qui est isomorphe à la composante de poids un de l'homologie de Hochschild : $\mathrm{Harr}_*(A) \cong \mathrm{HH}_*^{(1)}(A)$, on a :

$$\mathrm{Harr}_*(A \otimes B) \cong \mathrm{Harr}_*(A) \otimes B \oplus A \otimes \mathrm{Harr}_*(B).$$

Avant de donner quelques applications, montrons que le théorème implique une formule de Künneth pour l'homologie diédrale des algèbres commutatives à involution triviale. Posons avec [8] :

$$\mathrm{HH}_*^+(A) = \oplus_{p \geqq 0} \mathrm{HH}_*^{(2p)}(A) \quad \text{et} \quad \mathrm{HH}_*^-(A) = \oplus_{p \geqq 0} \mathrm{HH}_*^{(2p+1)}(A)$$

et de même

$$\mathrm{HD}_*^+(A) = \oplus_{p \geqq 0} \mathrm{HC}_*^{(2p)}(A) \quad \text{et} \quad \mathrm{HD}_*^-(A) = \oplus_{p \geqq 0} \mathrm{HC}_*^{(2p+1)}(A).$$

Ce sont des espaces-vectoriels $(\mathbf{N} \times \mathbf{Z}/2)$-gradués. Le théorème implique immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 3. *Pour tout couple (A, B) d'algèbres commutatives à involution triviale, on a pour tout n l'isomorphisme*

$$\mathrm{HH}_n^{\pm}(A \otimes B) \cong (\mathrm{HH}(A)^+ \otimes \mathrm{HH}(B)^{\pm})_n \oplus (\mathrm{HH}(A)^- \otimes \mathrm{HH}(B)^{\mp})_n$$

et la longue suite exacte

$$\ldots \to \mathrm{HD}_n^{\pm}(A \otimes B) \to (\mathrm{HD}^+(A) \otimes \mathrm{HD}^{\pm}(B))_n \oplus (\mathrm{HD}^-(A) \otimes \mathrm{HD}^{\mp}(B))_n$$

$$\xrightarrow{S\otimes 1 - 1 \otimes S} (\mathrm{HD}^+(A) \otimes \mathrm{HD}^{\mp}(B))_{n-2} \oplus (\mathrm{HD}^-(A) \otimes \mathrm{HD}^{\pm}(B))_{n-2}$$

$$\to \mathrm{HD}_{n-1}^{\pm}(A \otimes B) \to \ldots.$$

En pratique, la plupart des algèbres dont on sait calculer l'homologie cyclique vérifie la propriété (P) introduite dans [5]. Rappelons qu'une algèbre B vérifie cette propriété si le $\mathrm{HC}(k)$-comodule $\mathrm{HC}(B)$ est somme d'un comodule étendu

$\mathrm{HC}(k) \otimes U$ et d'un comodule trivial V. On suppose de plus que U et V sont bigradués et que la somme précédente est une somme d'espaces vectoriels gradués. Comme $\mathrm{HC}_{2n}(k) = \mathrm{HC}_{2n}^{(n)}(k)$ et que $\mathrm{HC}_{2n+1}(k) = 0$, on a

$$\mathrm{HC}_n^{(p)}(B) = \bigoplus_{i \geqq 0} U_{n-2i}^{(p-i)} \oplus V_n^{(p)}.$$

En procédant comme dans [5], §3, on a le

COROLLAIRE 4. *Avec les notations précédentes, si l'algèbre commutative B vérifie la propriété* (P), *on a, pour toute algèbre commutative A et pour tout couple* (n, p) *d'entiers naturels,*

$$\mathrm{HC}_n^{(p)}(A \otimes B) = (\mathrm{HC}(A) \otimes U)_n^{(p)} \oplus (\mathrm{HH}(A) \otimes V)_n^{(p)}.$$

Nous en donnons quelques applications qui sont des raffinements des formules 3.3-3.6 de [5]. On trouve aussi une version de 5.1b et 5.2b dans [7] et de 5.4a dans [2] avec $P = t^m$.

5. *Applications.* 5.1. L'algèbre $k[t]$ de polynômes vérifie la propriété (P) avec

$$U = U_0^{(0)} = k \quad \text{et} \quad V = V_0^{(0)} = d\Omega_{k[t]}^0.$$

On a alors $(n, p \geqq 0)$

$$\mathrm{HC}_n^{(p)}(A[t]) \cong \mathrm{HC}_n^{(p)}(A) \oplus \mathrm{HH}_n^{(p)}(A) \otimes d\Omega_{k[t]}^0 \tag{5.1a}$$

$$\mathrm{HD}_n^{\pm}(A[t]) \cong \mathrm{HD}_n^{\pm}(A) \oplus \mathrm{HH}_n^{\pm}(A) \otimes d\Omega_{k[t]}^0. \tag{5.1b}$$

5.2. Pour l'algèbre $k[t, t^{-1}]$ des polynômes de Laurent, on a:

$$U = U_0^{(0)} \oplus U_1^{(1)} \quad \text{et} \quad V = V_0^{(0)} = d\Omega_{k[t,t^{-1}]}^0$$

avec $U_i^{(i)} = H_{DR}^i(k[t, t^{-1}]) = k\,(i = 0, 1)$. Par conséquent,

$$\mathrm{HC}_n^{(p)}(A[t, t^{-1}]) \cong \mathrm{HC}_n^{(p)}(A) \oplus \mathrm{HC}_{n-1}^{(p-1)}(A) \oplus \mathrm{HH}_n^{(p)}(A) \otimes d\Omega_{k[t,t^{-1}]}^0 \tag{5.2a}$$

$$\mathrm{HD}_n^{\pm}(A[t, t^{-1}]) \cong \mathrm{HD}_n^{\pm}(A) \oplus \mathrm{HD}_{n-1}^{\mp}(A) \oplus \mathrm{HH}_n^{\pm}(A) \otimes d\Omega_{k[t,t^{-1}]}^0. \tag{5.2b}$$

5.3. Plus généralement toute algèbre lisse B vérifie la propriété (P) avec

$$U_n = U_n^{(n)} = H_{DR}^n(B) \quad \text{et} \quad V_n = V_n^{(n)} = d\Omega_B^n,$$

ce qui donne (5.3a):

$$\mathrm{HC}_n^{(p)}(A \otimes B) \cong \bigoplus_{i \geqq 0} \mathrm{HC}_{n-i}^{(p-i)}(A) \otimes H_{DR}^i(B) \oplus \bigoplus_{i \geqq 0} \mathrm{HH}_{n-i}^{(p-i)}(A) \otimes d\Omega_B^i$$

et (5.3b):

$$\mathrm{HD}_n^{\pm}(A \otimes B) \cong \bigoplus_{i \geq 0} (\mathrm{HD}_{n-2i}^{\pm}(A) \otimes H_{DR}^{2i}(B) \oplus \mathrm{HD}_{n-2i-1}^{\mp}(A) \otimes H_{DR}^{2i+1}(B))$$

$$\oplus \bigoplus_{i \geq 0} (\mathrm{HH}_{n-2i}^{\pm}(A) \otimes d\Omega_B^{2i} \oplus \mathrm{HH}_{n-2i-1}^{\mp}(A) \otimes d\Omega_B^{2i+1}).$$

5.4. Soit P un polynôme de degré d et ayant r racines distinctes dans une clôture algébrique de k. L'algèbre $k[t]/(P)$, qui n'est lisse que pour $r = d$, vérifie la propriété (P) avec

$$U = U_0^{(0)} = k^r, V_{2n} = V_{2n}^{(n)} = k^{d-r} \text{ er } V_{2n+1} = 0.$$

D'où les isomorphismes

(5.4a) $$\mathrm{HC}_n^{(p)}(A[t]/(P)) \cong \mathrm{HC}_n^{(p)}(A)^r \oplus \bigoplus_{i \geq 0} \mathrm{HH}_{n-2i}^{(p-i)}(A)^{d-r}$$

et (5.4b)

$$\mathrm{HD}_n^{\pm}(A[t]/(P)) \cong \mathrm{HD}_n^{\pm}(A)^r \oplus \bigoplus_{i \geq 0} (\mathrm{HH}_{n-4i}^{\pm}(A) \oplus \mathrm{HH}_{n-4i-2}^{\pm}(A))^{d-r}.$$

5.5. Comme il apparaît dans la démonstration du théorème, les résultats précédents sont encore vrais pour les algèbres différentielles graduées commutatives, en particulier pour l'algèbre Λ graduée commutative libre engendrée par un élément ε de degré 1. Dans [6] nous avons montré que Λ vérifie la propriété (P) avec

$$U = U_0^{(0)} = k \text{ et } V_n = V_n^{(n)} = k \cdot \varepsilon^{\otimes(n+1)}.$$

D'où:

(5.5a) $$\mathrm{HC}_n^{(p)}(A \otimes \Lambda) \cong \mathrm{HC}_n^{(p)}(A) \oplus \bigoplus_{i \geq 0} \mathrm{HH}_{n-i}^{(p-i)}(A)$$

(5.5b) $$\mathrm{HD}_n^{\pm}(A \otimes \Lambda) \cong \mathrm{HD}_n^{\pm}(A) \oplus \bigoplus_{i \geq 0} (\mathrm{HH}_{n-2i}^{\pm}(A) \oplus \mathrm{HH}_{n-2i-1}^{\mp}(A)).$$

6. Pour terminer avec les résultats, rappelons avec Nuss [11], §5 que *l'homologie cyclique périodique* d'une algèbre commutative A est $\mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}$-graduée:

$$\mathrm{HP}_*(A) = \prod_{i \in Z} \mathrm{HP}_*^{(i)}(A).$$

Si B vérifie la propriété (P), alors l'isomorphisme de [5], Théorème 3.10

$$\mathrm{HP}_*(A \otimes B) \cong \mathrm{HP}_*(A) \otimes \mathrm{HP}_*(B)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels $\mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}$-gradués.

7. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. Notre démonstation repose sur deux observations bien connues:

(a) La première est que, pour toute algèbre commutative A (y compris dans la catégorie des algèbres différentielles graduées), il existe un quasi-isomorphisme $S(V)$, $\partial \to A$ où V est un k-espace vectoriel gradué, $S(V)$ est l'algèbre graduée commutative libre sur V et ∂ est une différentielle de degré-1.

(b) La seconde est que, si A et B sont des algèbres commutatives, alors il existe un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{array}{ccccc} C_*(A) \otimes C_*(B) & \xrightarrow{\nabla} & C_*(A \otimes B) & \xrightarrow{f} & C_*(A) \otimes C_*(B) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^*_A \otimes \Omega^*_B & \xrightarrow{i} & \Omega^*_{A\otimes B} & \xrightarrow{i^{-1}} & \Omega^*_A \otimes \Omega^*_B \end{array}$$

où $C_*(A)$ est le complexe de Hochschild de A, Ω^*_A est l'algèbre des différentielles de Kähler de A au-dessus de k, ∇ est l'application "shuffle" d'Eilenberg-MacLane, f est l'application d'Alexander-Whitney qui est quasi-inverse à la précédente et enfin i est l'isomorphisme évident. Ce diagramme appliqué à des "modèles" libres de A et B va nous permettre de remplacer le "shuffle-produit" qui ne commute pas avec l'opérateur B de Connes par l'isomorphisme i qui, lui, commute avec la différentielle extérieure de de Rham.

Pour commencer, nous rappelons, à la suite de [12], §8, [3] et [1], comment on définit les décompositions de l'homologie de Hochschild et de l'homologie cyclique.

La différentielle ∂ de $S(V)$ s'étend naturellement à l'algèbre $\Omega^*_{S(V)}$ et on a: $H_*(\Omega^*_{S(V)}, \partial) \cong \mathrm{HH}_*(A)$. Avec la différentielle d de de Rham, on obtient sur les formes différentielles une structure $(\Omega^*_{S(V)}, \partial, d)$ de complexe mixte au sens de [5], ce qui permet de définir le bicomplexe $\mathfrak{B}(S(V))$:

$$\Omega^*_{S(V)} \xleftarrow{d} \Omega^*_{S(V)}[1] \xleftarrow{d} \Omega^*_{S(V)}[2] \xleftarrow{d} \cdots.$$

On a: $H_*(\mathfrak{B}(S(V))) = \mathrm{HC}_*(\Omega^*_{S(V)}, \partial, d) \cong \mathrm{HC}_*(A)$.

La décomposition cherchée s'obtient à l'aide des sous-complexes $\Omega^p_{S(V)} = S(V) \otimes \Lambda^p(V)$ et des sous-bicomplexes $\mathfrak{B}^{(p)}(S(V))$:

$$\Omega^p_{S(V)} \xleftarrow{d} \Omega^{p-1}_{S(V)}[1] \xleftarrow{d} \Omega^{p-2}_{S(V)}[2] \xleftarrow{d} \cdots.$$

On a:

$$\mathrm{HH}^{(p)}_*(A) = H_*(\Omega^p_{S(V)}) \text{ et } \mathrm{HC}^{(p)}_*(A) = H_*(\mathfrak{B}^{(p)}(S(V))).$$

Ces groupes sont indépendants du "modèle" $S(V)$ choisi. La suite exacte de complexes

$$0 \to \Omega^p_{S(V)} \to \mathfrak{B}^{(p)}S(V)) \xrightarrow{S} \mathfrak{B}^{(p-1)}(S(V))[2] \to 0 \tag{7.1}$$

induit les suites exactes longues mentionnées plus haut.

On se donne maintenant une deuxième algèbre commutative B et un quasi-isomorphisme $S(W), \partial \to B$. Il en résulte un quasi-isomorphisme: $S(V \oplus W)$, $\partial = \partial \otimes 1 + 1 \otimes \partial \to A \otimes B$. Le morphisme naturel de complexes

$$\Omega^q_{S(V)} \otimes \Omega^r_{S(V)} \to \Omega^{q+r}_{S(V)}$$

donne l'isomorphisme de complexes:

$$\bigoplus_{q+r=p} \Omega^q_{S(V)} \otimes \Omega^r_{S(V)} \to \Omega^p_{S(V)},$$

d'où la première partie du théorème.

Pour ce qui est de l'homologie cyclique, rappelons avec [5], Théorème 1.7, que le foncteur $\mathfrak{B}(-)$ transforme les produits tensoriels de complexes mixtes en produit cotensoriel de $HC_*(k)$-comodules différentiels gradués, ce qui se traduit par la suite exacte courte de complexes (7.2)

$$0 \to \mathfrak{B}(S(V \oplus W)) \xrightarrow{j} \mathfrak{B}(S(V)) \otimes \mathfrak{B}(S(W)) \xrightarrow{S\otimes 1 - 1 \otimes S} \mathfrak{B}(S(V) \otimes \mathfrak{B}(S(W))[2] \to 0.$$

Considérons maintenant la restriction de $S \otimes 1 - 1 \otimes S$ au sous-complexe

$$\bigoplus_{q+r=p} \mathfrak{B}^{(q)}(S(V)) \otimes \mathfrak{B}^{(r)}(S(W)).$$

Il résulte aussitôt de (7.1) et (7.2) que son image est exactment

$$\bigoplus_{q+r=p-1} \mathfrak{B}^{(q)}(S(V)) \otimes \mathfrak{B}^{(r)}(S(W))[2].$$

Quant à son noyau, en utilisant la formule explicite donnée dans [5] pour l'injection j, on voit que c'est $\mathfrak{B}^{(p)}(S(V \oplus W))$. On obtient la longue suite exacte du théorème en passant à l'homologie.

8. REMARQUES. a) Le théorème et ses applications restent valides pour les algèbres différentielles graduées commutatives.

b) La démonstration précédente permet aussi de redonner une preuve rapide et sans calcul de la formule de Künneth pour l'homologie cyclique dans le cas des algèbres *commutatives* en *caractéristique nulle*. Elle évite d'avoir à se soucier du fait que ni le "shuffle-produit", ni l'application d'Alexander-Whitney ne sont des morphismes de complexes mixtes. Il est cependant possible, comme me l'a signalé Loday, de démontrer le théorème par des calculs sur le complexe de Hochschild.

RÉFÉRENCES

1. D. Burghelea, M. Vigué-Poirrier, *Cyclic homology of commutative algebras*, Springer Lecture Notes in Math. 1318 (1988), 51–72.

2. J.-L. Cathelineau, *λ-structures in algebraic K-theory and cyclic homology*, K-Theory 4 (1991), 591–606.
3. B. L. Feigin, B. L. Tsygan, *Additive K-theory and crystalline cohomology*, Funkts. Anal. Pril. 19 : 2 (1985), 52–62; trad. anglaise: Functional Anal. Appl. 19 (1986), 124–132.
4. M. Gerstenhaber, S. D. Schack, *A Hodge-type decomposition for commutative algebra cohomology*, J. Pure Appl. Algebra 48 (1987), 229–247.
5. Chr. Kassel, *Cyclic homology, comodules and mixed complexes*, J. Algebra 107 (1987), 195–216.
6. Chr. Kassel, *A Künneth formula for the cyclic cohomology of $\mathbf{Z}/2$-graded algebras*, Math. Ann. 275 (1986), 683–699.
7. S. V. Lapin, *Dihedral homologies of $A[x]$ and $A[x, x^{-1}]$ and other algebras*, Mat. Zametki 41 : 2 (1987), 238–247; trad. anglaise : Math. Notes, 41 (1987), 137–142.
8. J.-L. Loday, *Homologies diédrale et quaternionique*, Adv. in Math. 66 (1987), 119–148.
9. J.-L. Loday, *Opérations sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives*, Invent. Math. 96 (1989), 205–230.
10. T. Natsume, S. D. Schack, *A decomposition for the cyclic cohomology of a commutative algebra*, J. Pure Appl. Algebra 61 (1989), 273–282.
11. Ph. Nuss, *Décomposition de la cohomologie cyclique bivariante des algèbres commutatives*, Math. Scand. 70 (1992), 5–26.
12. D. Quillen, *On the (co)homology of commutative rings*, Proc. Symp. Pure Math., A.M.S., 17 (1970), 65–87.
13. M. Vigué-Poirrier, *Décomposition de l'homologie cyclique des algèbres différentielles graduées commutatives*, K-theory 4 (1991), 399–410.

CHRISTIAN KASSEL
INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
C.N.R.S.-UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR
7, RUE RENÉ DESCARTES
67084 STRASBOURG CEDEX
FRANCE