MATH. SCAND. 72 (1993), 120–130

IDEAUX FERMÉS DE $L^1(\mathsf{R}_+)$

O. EL-FALLAH

§ 1. Introduction.

Soit $L^1(\mathsf{R}_+)$l'algèbre des fonctions intégrables sur $[0, +\infty[$, munie du produit de convolution usuel. La transformée de Laplace, définie par la formule $\mathscr{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-tz}\, dt\,(\mathrm{Re} z \geqq 0 : f \in L^1(\mathsf{R}_+))$ est un homomorphisme continu de $L^1(\mathsf{R}_+)$ dans l'algèbre $A_0(P)$ des fonctions continues sur $P = \{z \in \mathsf{C} \mid \mathrm{Re} z \geqq 0\}$, holomorphes sur l'intérieur de P et tendant vers 0 à l'infini. Si J est un idéal fermé de $L^1(\mathsf{R}_+)$ on pose $h(J) = \{z \in P \mid \mathscr{L}(f)(z) = 0\,(f \in J)\}$. Nyman [14] a caractérisé les idéaux fermés J de $L^1(\mathsf{R}_+)$ tels que $h(J) = \emptyset$. Ce sont les idéaux de la forme $\mathscr{M}_\beta = \{f \in L^1(\mathsf{R}_+) \mid f \equiv 0 \text{ p.p sur } [0, \beta]\}$, (voir également [4], [9]).

A notre connaissance le résultat le plus général concernant les idéaux fermés de $L^1(\mathsf{R}_+)$ est le théorème de Gurarii [10]: si J est un idéal fermé de $L^1(\mathsf{R}_+)$, et si $h(J)$ est dénombrable alors $J = \mathscr{L}^{-1}(\mathscr{L}(J)^\infty)$ ou $\mathscr{L}(J)^\infty$ désigne l'adhérence de $\mathscr{L}(J)$ dans $A_0(P)$. Les idéaux fermés de $A_0(P)$ sont décrits par le théorème de Beurling-Rudin (via la transformation conforme usuelle du demi-plan sur le disque) en termes de leur facteur intérieur et de leur ensemble de zéros sur l'axe imaginaire [12, p. 85].

On a donc en général $\mathscr{L}(J)^\infty = T_J H^\infty(P) \cap \mathscr{M}(h(J) \cap i\,\mathsf{R})$ où T_J désigne le PGCD des facteurs intérieurs des éléments non suls de $\mathscr{L}(J)$ et où $\mathscr{M}(E) = \{F \in A_0(P) \mid F(E) = \{0\}\}$ pour une partie fermée E de P.

Nous obtenons ici un certain nombre de résultats concernant les idéaux fermés J de $L^1(\mathsf{R}_+)$ dans le cas où $h(J)$ est non dénombrable. Les complications dues aux problèmes de synthèse dans $L^1(\mathsf{R})$ font que l'extension naturelle de la description de Gurarii est une décomposition de la forme $J = \mathscr{E}(J) \cap \mathscr{L}^{-1}(T_J H^\infty(P) \cap A_0(P))$ où $\mathscr{E}(J) = J^{L^1(\mathsf{R})} \cap L^1(\mathsf{R}_+)$, $J^{L^1(\mathsf{R})}$ désignant l'idéal fermé de $L^1(\mathsf{R})$ engendré par J. On dira, par analogie avec la terminologie utilisée par J. Esterle [7] pour l'algèbre A^+, qu'une partie fermée E de $i\mathsf{R}$ est un ensemble de Bennet-Gilbert (BG) si, et seulement si,

Reçu le 2 janvier, 1992.

$$(1) \qquad J = \mathscr{E}(J) \cap \mathscr{L}^{-1}(T_J H^\infty(P) \cap A_0(P)) \text{ pour tout idéal fermé } J \text{ de } L^1(\mathsf{R}_+) \text{ tel que } h(J) \cap i\mathsf{R} = E.$$

Il ressort de notre travail qu'il existe à la fois des ensembles parfait de BG pour $L^1(\mathsf{R}_+)$ et des ensembles parfaits qui ne le sont pas (Corollaires 3.9 et 3.10). On ne peut donc décrire en général les idéaux fermés de $L^1(\mathsf{R}_+)$ en termes de fonctions intérieures et de synthèse sur R.

Notre méthode consiste à ramener les problèmes sur l'algèbre A^+ des séries de Taylor absolument convergentes grâce à des méthodes de transfert dues à H. Hedenmalm [11] (qui font appel à des résultats de Y. Domar [5]). Ces méthodes sont décrites au §2. De même que dans [7], on dira qu'une partie fermée F du cercle unité est un ensemble de Bennett-Gilbert pour A^+ si tout idéal fermé I de A^+, tel que $h(I) \cap \Gamma = F$ a la forme

$$(2) \qquad I = \mathscr{E}(I) \cap S_I H^\infty$$

où $\mathscr{E}(I) = I^{A(\Gamma)} \cap A^+$ et où $I^{A(\Gamma)}$ est l'idéal fermé engendré par I dans l'algêbre de Wiener $A(\Gamma) = \{f \in \mathscr{C}(\Gamma) \mid \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)| < +\infty\}$ (ici $h(I) = \{z \in \bar{D} \mid f(z) = 0 (f \in I)\}$), H^∞ désigne l'algébre des fonctions holomorphes bornées dans le disque unité D, et S_I désigne le PGCD des facteurs intérieurs des éléments non nuls de I.

Il ressort des travaux de J. P. Kahane [13] et Bennett-Gilbert [1] que tout ensemble dénombrable du cercle est de BG pour A^+ (on a même dans ce cas une forme plus précise analogue à celle de Gurarii), et les travaux récents de [7] et [8] font apparaître à la fois une large classe d'ensembles parfaits du cercle qui sont de BG pour A^+ et une large classe d'ensemble parfaits du cercle qui ne le sont pas.

Nous montrons au théorème 3.8 que si $E \subset]-\pi, \pi[$ est fermé alors iE est de BG pour $L^1(\mathsf{R}_+)$ si, et seulement si, e^{iE} est de BG pour A^+. Notre méthode (voir remarque à la fin du § 3) s'applique en fait à tous les compacts de l'axe imaginaire.

Nous donnons également au §4 une description des idéaux fermés J de $L^1(\mathsf{R}_+)$ liée à la topologie faible de $L^1(\mathsf{R}_+)$ induite par la topologie faible* des mesures.

Ce travail fait partie de la thèse d'Université de l'auteur [6].

Je remercie les membres du groupe d'Analyse de l'UniversitéBordeaux I, et en particulier mon directeur de thèse J. Esterle, pour leurs consiels pendant la préparation de ce travail.

§2. Préliminaires.

Pour tout idéal fermé J de $L^1(\mathsf{R}_+)$, on pose $\beta_J = \inf \beta_f (f \in I)$ où $\beta_f = \sup \{\beta \geqq 0 \mid f|_{[0,\beta]} = 0 \text{ p.p}\}$.

Nyman [14] (voir aussi la référence [4], plus accessible) a démontré que le seul idéal fermé J de $L^1(\mathsf{R}_+)$ tel que $h(J) = \varnothing$ et $\beta_J = 0$ est $L^1(\mathsf{R}_+)$.

On en déduit une caractérisation certainement bien connue des idéaux fermés modulaires de $L^1(\mathsf{R}_+)$.

Proposition 2.1. *Soit J un idéal fermé de $L^1(\mathsf{R}_+)$. Alors J est modulaire si, et seulement si, $h(J)$ est compact et $\beta_J = 0$.*

Preuve. ($\Rightarrow$). Puisque $h(J)$ est homéomorphe à $L^1(\mathsf{R}_+)/J$, $h(J)$ est compact. Comme $J \subset L^1([\beta_J, +\infty[)$ l'algèbre radicale $L^1(\mathsf{R}_+)/L^1([\beta_J, +\infty[)$ est unitaire, donc réduite à $\{0\}$ et $\beta_J = 0$.

($\Leftarrow$). D'après le théorème d'idempotence de Šilov, il existe $p \in L^1(\mathsf{R}_+)$ tel que $\mathscr{L}(p) = 1$ sur $h(J)$ et $p^2 - p \in J$.

Posons $\tilde{J} = \{f \in L^1(\mathsf{R}_+) \mid p * f - f \in J\}$. Alors $\tilde{J}$ est un idéal fermé de $L^1(\mathsf{R}_+)$ qui contient J donc $h(\tilde{J}) \subset h(J)$ et $\beta_{\tilde{J}} = 0$. Or $p \in \tilde{J}$ donc $h(\tilde{J}) = \varnothing$. Donc d'après le théorème de Nyman $\tilde{J} = L^1(\mathsf{R}_+)$, et $p + J$ est l'élément unité de $L^1(\mathsf{R}_+)/J$.

Nous décrivons maintenant un résultat de transfert de H. Hedenmalm [11] qui va jouer un rôle essentiel dans ce travail.

On note Δ l'ensemble $\{z \in P / |\mathrm{Im}\, z| < \pi\}$, et pour $t \in \mathsf{R}$ on note δ_t la mesure de Dirac au point t.

Soit I un idéal fermé de A^+ tel que $h(I) \subset \bar{D} \backslash [-1, 0]$. Soit $\Pi : A^+ \to A^+/I$ la surjection canonique et soit $\alpha : z \to z$. Posons $\chi_z(\Pi(f)) = f(z)$ pour $f \in A^+, z \in h(I)$. L'application $z \to \chi_z$ est alors un homémorphisme de $h(I)$ sur l'ensemble des caractères de A^+/I; en notant $\mathrm{Sp}\Pi(\alpha)$ le spectre de $\Pi(\alpha)$ dans A^+/I on obtient $\mathrm{Sp}\Pi(\alpha) = h(I)$. La détermination principale $\mathrm{Log}\, z$ du logarithme complexe est analytique au voisinage de $\mathrm{Sp}(\Pi(\alpha))$, ce qui permet de définir $\mathrm{Log}(\Pi(\alpha))$ par le calcul fonctionnel usuel [3, p. 33]. Posons $\Pi(\alpha)^z = e^{z \,\mathrm{Log}\, \Pi(\alpha)}$ pour tout $z \in \mathsf{C}$. La fonction $z \to \Pi(\alpha)^z$ est alors entière de type exponentiel fini, et on a $\|\Pi(\alpha)^t\| \leqq \sup_{0 \leqq u \leqq 1} \|\Pi(\alpha)^u\|$ $(t \geqq 0)$.

Soit

$$\Phi_I : L^1(\mathsf{R}_+) \to A^+/I : f \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)\, \Pi(\alpha)^t \, dt.$$

L'application Φ_I est un homomorphisme continu.

On note par:

$\mathscr{I}$ l'lensemble des idéaux fermés I de A^+ tels que $h(I) \subset \bar{D} \backslash [-1, 0]$.

$\mathscr{J}$ l'ensemble des idéaux fermés modulaires J de $L^1(\mathsf{R}_+)$ tels que $h(J) \subset \Delta$.

Theoreme 2.2. (H. Hedenmalm [11]). *L'application*

$$\theta : \mathscr{I} \to \mathscr{J} : I \to \ker \Phi_I$$

est une bijection et $\theta^{-1}(J) = \{f \in A^+ \mid \sum_{n \geq 0} \hat{f}(n)(\delta_n * g) \in J\ (g \in L^1(\mathbb{R}_+))\}$ *pour tout* $J \in \mathscr{J}$.

De plus Φ_I *est surjective et*

$$\tilde{\Phi}_I : L^1(\mathbb{R}_+)/_{\mathrm{Ker}\Phi_I} \to A^+/I : f + \mathrm{Ker}\Phi_I \to \Phi_I(f)$$

est un isomorphisme bicontinu, pour tout $I \in \mathscr{I}$.

Soit $\Pi : A^+ \to A^+/I$ (resp. $\rho : L^1(\mathbb{R}_+) \to L^1(\mathbb{R}_+)/J$) l'application canonique. Pour $\ell \in I^\perp$ (resp. $h \in J^\perp$) posons $< \Pi(f), \bar{\ell} > = \langle f, \ell \rangle$ pour $f \in A^+$ (resp. $< \rho(g), \bar{h} > = \langle g, h \rangle$ pour $g \in L^1(\mathbb{R}_+)$).

L'application $\ell \to \bar{\ell}$ (resp. $h \to \bar{h}$) définit un isomorphisme de $I^\perp$ sur $(A^+/I)^*$ (resp. de $J^\perp$ sur $(L^1(\mathbb{R}_+)/J)^*$). L'application $\psi_I : I^\perp \to L^\infty(\mathbb{R}_+)$ définie par $\psi_I(\ell)(t) = \langle \Pi(\alpha)^t, \bar{\ell} \rangle$ $(t \geqq 0)$ définit alors l'isomorphisme de $I^\perp$ sur $J^\perp$ associé à $\tilde{\Phi}_I^*$. Tout $h \in J^\perp$ est donc la restriction à $\mathbb{R}_+$ d'une fonction entière, et l'application réciproque ψ_I^{-1} est l'application restriction $h \to h|_{\mathbb{Z}^+}$. Notons que $h(\theta^{-1}(J)) = e^{h(J)}\ (J \in \mathscr{J})$.

Nous utiliserons également un résultat classique (voir [2, Théorème 5.7.15 et Corollaire 10.6.6]) sur les fonctions entières de type exponentiel.

THEOREME 2.3. *Soit* $c \in]0, \pi[$. *Alors il existe deux constantes* m, M *strictement positives ne dépendant que de* c *telles que*

$$m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(n)|^2 \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\, dx \leqq M \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(n)|^2$$

pour toute fonction entière f *de type exponentiel inférieur ou égal à* c.

En particulier $f|_{\mathbb{R}} \in L^1(\mathbb{R})$ *si, et seulement si,* $f_{|\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$.

§ 3. Ensembles de Bennett-Gilbert pour $L^1(\mathbb{R}_+)$.

LEMME 3.1. *Soient* $I_1, I_2 \in \mathscr{I}$. *Alors* $\theta(I_1 \cap I_2) = \theta(I_1) \cap \theta(I_2)$.

PREUVE. Ceci résulte du fait que θ est une bijection croissante.

Soient I un idéal fermé de $L^1(\mathbb{R}_+)$. Rappelons que $I^{A(\Gamma)}$ et $J^{L^1(\mathbb{R})}$ désignent les idéaux fermés engendrés respectivement pat I et J dans $A(\Gamma)$ et $L^1(\mathbb{R})$.

Posons $\mathscr{E}(I) = I^{A(\Gamma)} \cap A^+$ et $\mathscr{E}(J) = J^{L^1(\mathbb{R})} \cap L^1(\mathbb{R}_+)$. D'après [8] on a $\mathscr{E}(I) = \{f \in A^+ \mid \|\Pi(\alpha^n f)\| \to 0\ (n \to +\infty)\}$. De manière analogue on a le lemme suivant:

LEMME 3.2. *Soit* J *un idéal fermé de* $L^1(\mathbb{R}_+)$. *Alors* $\mathscr{E}(J) = \{f \in L^1(\mathbb{R}_+) \mid \|\rho(f * \delta_t)\| \to 0\ (t \to +\infty)\}$, *où* $\rho : L^1(\mathbb{R}_+) \to L^1(\mathbb{R}_+)/J$ *est la surjection canonique.*

PREUVE. On a $J^{L^1(\mathbb{R})} = \overline{\bigcup_{t \geqq 0} \delta_{-t} * J}$ et la famille $(\delta_{-t} * J)_{t \geqq 0}$ est croissante. Donc $f \in \mathscr{E}(J)$ si, et seulement si, il existe $(f_t)_{t \geqq 0} \in J$ telle que $\|f - \delta_{-t} * f_t\| \underset{t \to \infty}{\to} 0$ c'est-à-dire si, et seulement si $\|\rho(f * \delta_t)\| \to 0\,(t \to +\infty)$.

LEMME 3.3. *Soit $I \in \mathscr{I}$. Alors $\theta(\mathscr{E}(I)) = \mathscr{E}(\theta(I))$.*

PREUVE. Soit ρ la surjection canonique associée à $\theta(I)$. Alors $f \in L(\theta(I))$ si, et seulements si, $\|\rho(f * \delta_t)\| \to 0\,(t \to +\infty)$. Comme $\tilde{\Phi}_I$ est un isomorphisme bicontinu et comme $\tilde{\Phi}_I \circ \rho = \Phi_I$, cette condition équivaut à $\|\Phi_I(f).\ \Pi(\alpha)^t\| = \|\Phi_I(f * \delta_t)\| \to 0\,(t \to +\infty)$, c'est-à-dire $\|\Phi_I(f)\Pi(\alpha)^n\| \to 0\,(n \to +\infty)$. Donc $f \in \mathscr{E}(\theta(I))$ si, et seulement si, $\Phi_I(f) \in \Pi(\mathscr{E}(I))$, c'est-à-dire $s(\Phi_I(f)) = 0$ où $s: A^+/_I \to A^+/\mathscr{E}(I)$ est l'application canonique. Le lemme en résulte puisque $s \circ \Phi_I = \Phi_{\mathscr{E}(I)}$.

Le lemme suivant est une variante du lemme de McIntyre [2, Lemme 5.6.8].

LEMME 3.4. *Soit $I \in \mathscr{I}$ et soit Π la surjection canonique associée à I. Posons $G(z) = \Pi(\alpha)^z\,(z \in \mathbb{C})$. Alors il existe deux fonctions entières H et L à valeurs dans A^+/I telles que L soit de type exponentiel $c < \pi$ et $G = H + L$ avec:*

$$\|H(x)\| = 0\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to +\infty)$$

$$\|L(x)\| = 0\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad (x \to -\infty).$$

PREUVE. On a $\operatorname{Sp}(\Pi(\alpha)) \subset \bar{D} \setminus [-1,0]$. Donc il existe deux constantes positives a, b telles que:

$$|\operatorname{Arg} z| < a < \pi \text{ et } -b < \operatorname{Log}|z| \leqq 0 \quad (z \in h(I)).$$

On considère la courbe γ orientée positivement formée par le demi-cercle à droite γ_1 de diamètre $[-ai, ai]$ et les segments $\gamma_2 = [ai, -b + ai]$, $\gamma_3 = [-b + ai, -b - ai]$, $\gamma_4 = [-b - ai, -ai]$. Puisque $z \to (z - \operatorname{Log}\Pi(\alpha))^{-1}$ est la transformée de Borel vectorielle de G, et puisque $\operatorname{Sp}(\Pi(\alpha))$ est situé à l'intérieur de γ, on a d'après [2, Théorème 5.3.5],

$$G(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{\xi z} (\xi - \operatorname{Log}\Pi(\alpha))^{-1}\, d\xi.$$

On pose $L(z) = \dfrac{1}{2i\gamma\pi} \int_{\gamma_1} e^{\xi z} (\xi - \operatorname{Log}\Pi(\alpha))^{-1}\, d\xi$, et $H = G - L$.

Comme $|e^{\xi z}| \leqq e^{a|z|}$ pour tout $\xi \in \gamma_1$, L est de type exponentiel $c \leqq a < \pi$.

Pour $x < 0$, on a $\|L(x)\| \leqq K\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{ax\cos\theta}\,d\theta = 2K\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax\sin\theta}\,d\theta$ où K est une constante positive.

Donc $\|L(x)\| \leqq 2K\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{amx\theta}\,d\theta$ où $m = \inf\limits_{0<\theta\leqq\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) > 0$. On obtient $\|L(x)\| = 0\left(\frac{1}{|x|}\right)(x \to -\infty)$. En décomposant H en somme d'intégrales sur γ_2, γ_3 et γ_4 on vérifie de même que $\|H(x)\| = 0\left(\frac{1}{x}\right)(x \to +\infty)$.

On a vu au § 2 que pour $I \in \mathscr{I}$ l'application Ψ_I définie par $\Psi_I(\ell)(t) = \langle \Pi(\alpha)^t, \bar{\ell}\rangle$ $(t \geqq 0)$ est un isomorphisme de $I^\perp$ sur $\theta(I)^\perp$. On a le lemme suivant.

LEME 3.5. *Soit $I \in \mathscr{I}$. Alors $\Psi_I(\ell) \in L^2([0, +\infty[)$ si et seulement si, $\ell \in \ell^2(\mathsf{Z}^+)$.*

PREUVE. Les notations étant celles du Lemme 3.4, posons $R(t) = \langle L(t), \bar{\ell}\rangle$ $(t \in \mathsf{R})$. Alors $\Psi_I(\ell) \in L^2(\mathsf{R}_+)$ si, et seulement si, $R \in L^2(\mathsf{R})$. D'après le Théorème 2.3, cette condition équivaut à $R|_{\mathsf{Z}} \in \ell^2(\mathsf{Z})$, c'est-à-dire $R|_{\mathsf{R}^+} \in \ell^2(\mathsf{Z}^+)$. Le résultat découle alors de la décomposition donnée au Lemme 3.4.

Si $U \subset L^\infty(\mathsf{R}_+)$, on note ${}^\perp U = \{f \in L^1(\mathsf{R}_+)\langle f, h\rangle = 0(h \in U)\}$.

LEMME 3.6. *Soit $J \in \mathscr{J}$, et soit T_J le* PGCD *des facteurs intérieurs des éléments non nuls de $\mathscr{L}(J)$. Alors*

$$\mathscr{L}^{-1}(T_J H^\infty(P) \cap A_0(P)) = {}^\perp(J^\perp \cap L^2(\mathsf{R}_+)).$$

PREUVE. Posons $T = T_J$. Alors $T(z) = S\left(\frac{z-1}{z+1}\right)(\mathrm{Re} z \geqq 0)$ où S est une fonction intérieure du disque unité.

On a $f \in \mathscr{L}^{-1}(TH^\infty(P) \cap A_0(P))$ si, et seulement si, l'application $z \to \mathscr{L}f\left(\frac{1+z}{1-z}\right)(|z| < 1)$ appartient à SH^∞ c'est-à-dire

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathscr{L}(f)\left(\frac{1+e^{it}}{1-e^{it}}\right)e^{int}\,\bar{S}*(e^{it})\,dt = 0\,(n \geqq 1)$$

où S^* est la limite non tangentielle de S sur le cercle. En faisant le changement de variable $s = 1/\mathrm{tg}\frac{t}{2}$, cette condition est équivalente à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{L}(f)(is)\,\bar{S}^*(-e^{-2i\,\mathrm{Arctgs}})\,e^{-2in\,\mathrm{Atctgs}}\frac{ds}{1+s^2} = 0\,(n \geqq 1).$$

D'après le théorème de Fubini, ceci équivaut à

$$\int_0^\infty f(t)\hat{h}_n(t)\,dt = 0 \quad (n \geqq 1)$$

où

$$h_n(s) = \frac{\bar{S}^*(-e^{-2i\,\mathrm{Arctg}s})e^{-2in\,\mathrm{Arctg}s}}{1+s^2} (s \in \mathsf{R}).$$

On a $h_n \in L^1(\mathsf{R}) \cap L^2(\mathsf{R})$, donc $\hat{h}_n|_{[0,+\infty[} \in J^\perp \cap L^2(\mathsf{R}_+)$. On obtient l'inclusion ${}^\perp(J^\perp \cap L^2(\mathsf{R}_+)) \subset \mathscr{L}^{-1}(TH^\infty(P) \cap A_0(P))$. Soit $\overline{J \cap L^2(\mathsf{R}_+)}^{L^2(\mathsf{R}_+)}$ l'adhérence de $J \cap L^2(\mathsf{R}^+)$ dans $L^2(\mathsf{R}^+)$. L'ensemble $V = \mathscr{L}\overline{J \cap L^2(\mathsf{R}_+)}^{L^2(\mathsf{R}_+)})$ est un sous espace fermé de $H^2(P)$ invariant par la multiplication par les fonctions $z \to e^{-\lambda z}$ $(\lambda \geqq 0)$. Donc d'après le théorème de Lax [12, chap. 7], $V = \mathscr{C} H^2(P)$, où $\mathscr{C}$ est le PGCD des facteurs intérieurs des éléments non nuls de V, c'est-à-dire le PGCD des facteurs intérieurs des éléments non nuls de $\mathscr{L}(J \cap L^2(\mathsf{R}_+))$. Posons $u(t) = e^{-t}$ $(t \geqq 0)$. Alors $J * u \subset J \cap L^2(\mathsf{R}_+)$, et $\mathscr{L}(u)$ est extérieure, donc $\mathscr{C} = T$ et $V = TH^2(P)$.

Soit maintenant $f \in \mathscr{L}^{-1}(TH^\infty(P) \cap A_0(P))$, soit $g \in L^1(\mathsf{R}_+)$ et soit $h \in J^\perp \cap L^2(\mathsf{R}_+)$. On a $f * u * g \in \overline{J \cap L^1(\mathsf{R}_+)}^{L^2(\mathsf{R}_+)}$ car $\mathscr{L}(f * u * g) \in T.H^\infty(P) \cap H^2(P) = T.H^2(P)$, donc $\langle f * u * g, h\rangle = 0$. D'autre part $\overline{u * L^1(\mathsf{R}_+)} = L^1(\mathsf{R}_+)$ et $L^1(\mathsf{R}_+)$ possède une unité approchée bornée (donnée par exemple par $e_n(t) = n\,1_{[0,1/n]}$) donc $f \in \overline{f * u * L^1(\mathsf{R}_+)}$. On a alors $\langle f, h\rangle = 0$ $(h \in J^\perp \cap L^2(\mathsf{R}_+))$, ce qui achève la démonstration.

On pose $\mathscr{C}(I) = S_I H^\infty \cap A^+$ et $\mathscr{C}(J) = \mathscr{L}^{-1}(T_J H^\infty(P) \cap A_0(P))$ pour $I \in \mathscr{I}$ et $J \in \mathscr{J}$. Il résulte immédiatement du théorème de Beurling concernant les sous-espaces invariants du shift unilatéral que $\mathscr{C}(I) = \bar{I}^{H^2} \cap A^+$ ($\bar{I}^{H^2}$ désignant l'adhérence de I dans H^2) et que $\mathscr{C}(I) = {}^\perp(I^\perp \cap \ell^2(\mathsf{Z}^+))$.

Lemme 3.7. *Soit $I \in \mathscr{I}$. Alors $\theta(\mathscr{C}(I)) = \mathscr{C}(\theta(I))$.*

Preuve. Posons $J = \theta(I)$. Soit $g \in \mathscr{C}(J)$ et soit $\ell \in I^\perp \cap \ell^2(\mathsf{Z}^+)$. Désignons par $\tilde{\ell}$ l'élément de $(A^+/\mathscr{C}(I))^*$ associé à ℓ, et par $\bar{\ell}$ l'élément de $(A^+/I)^*$ associé à ℓ.

$$\text{On a } \langle \Phi_{\mathscr{C}(I)}(g), \tilde{\ell}\rangle = \int_0^\infty g(t)\langle \Pi_{\mathscr{C}(I)}(\alpha)^t, \tilde{\ell}\rangle\,dt$$
$$= \int_0^\infty g(t)\langle \Pi_I(\alpha)^t, \bar{\ell}\rangle\,dt.$$

Donc d'après le Lemme 3.5 et le Lemme 3.6 $\langle \Phi_{\mathscr{C}(I)}(g), \tilde{\ell}\rangle = 0$. Comme $\mathscr{C}(I) = {}^\perp(I^\perp \cap \ell^2(\mathsf{Z}^+))$ *on obtient* $\Phi_{\mathscr{C}(I)}(g) = 0$, d'ou $g \in \theta(\mathscr{C}(I))$ c'est-à-dire $\mathscr{C}(J) \subset \theta(\mathscr{C}(I))$. L'autre inclusion se démontre de manière analogue.

Nous sommes alors en mesure de démontrer le résultat principal de cet article.

Theoreme 3.8. *Soit $E \subset\,]-\pi i, \pi i[$ un fermé.*

Alors E est de Bennett-Gilbert pour $L^1(\mathsf{R}_+)$ si, et seulement si, e^E est de Bennett-Gilbert pour A^+.

PREUVE. Soit $I \in \mathscr{I}$; posons $J = \theta(I)$. D'après ce qui précède on a $\theta(\mathscr{C}(I) \cap \mathscr{E}(I)) = \mathscr{E}(\mathrm{J})$.

Supposons que E est de BG pour $L^1(\mathsf{R}_+)$, et soit I un idéal fermé de A^+ tel que $h(I) \cap A^+ = e^E$. Donc $h(I) \cap [-1,0]$ es fini ou vide et il existe alors $p \in A^+$ tel que $p^2 - p \in I$, $p = 1$ sur $h(I) \backslash [-1,0]$ et $p = 0$ sur $h(I) \cap [-1,0]$. Posons $I_1 = \{f \in A^+ \mid pf - f \in I\}$ et $I_2 = \{f \in A^+ \mid pf \in I\}$. Alors

$$h(I_1) = h(I) \cap [-1,0],, h(I_2) = h(I) \backslash [-\dot{1},0]$$

et $I_1 \cap I_2 = I$. Il est clair que $I_1 = I_1^\infty \cap A^+$ où I_1^∞ est l'adhérence de I_1 pour la norme de la convergence uniforme sur D. Soit $J_2 = \theta(I_2) \in \mathscr{J}$. Alors $\theta(\mathscr{C}(I_2) \cap A(I_2)) = L(J_2) = J_2$. Comme θ est injective $I_2 = \mathscr{C}(I_2) \cap A(I_2) = I_2^\infty \cap A(I_2)$, d'après le théorème de Beurling-Rudin. Donc $I^\infty \cap \mathscr{E}(I) \subset (I_1^\infty \cap A^+) \cap (I_2^\infty \cap A(I_2)) = I$. D'où $I = I^\infty \cap \mathscr{E}(I) = S_1 H^\infty \cap \mathscr{E}(I)$ où S_1 est le facteur intérieur de I. Par conséquent e^E est de BG pour A^+.

Supposons que e^E est de BG pour A^+. Soit a une constante positive telle que $|t| < a < \pi (it \in E)$. Posons $\mathscr{D} = \{z \in \mathsf{C} \mid 0 \leqq \operatorname{Re} z \leqq 1 \text{ et } -a \leqq \operatorname{Im} z \leqq a\}$. Soit J un idéal fermé de $L^1(\mathsf{R}_+)$ tel que $h(J) \cap i\mathsf{R} = E$. Il faut montrer que $J = \mathscr{C}(J) \cap \mathscr{E}(J)$; pour cela on peut se limiter au cas où $\beta_J = 0$. D'après le Théorème d'idempotence de Šilov il existe $p \in L^1(\mathsf{R}_+)$ tel que $p^2 - p \in J$, $\mathscr{L}(p) = 1$ sur $h(J) \cap \mathscr{D}$ et $\mathscr{L}(p) = 0$ sur $h(J) \backslash \mathscr{D}$. On pose

$$J_1 = \{f \in L^1(\mathsf{R}_+)/p * f - f \in J\} \text{ et } J_2 = \{f \in L^1(\mathsf{R}_+)/p * f \in J\}.$$

On a alors $h(J_1) = h(J) \backslash \mathscr{D}$, $h(J_2) = h(J) \cap \mathscr{D}$ et $J = J_1 \cap J_2$. Comme $h(J_1) \cap i\mathsf{R} = \varnothing$, il résulte du Théorème de Gurarii [10] que $J_1 = \mathscr{L}^{-1}(\mathscr{L}(J_1)^\infty)$ où $\mathscr{L}(J_1)$ désigne l'adhérence de $\mathscr{L}(J_1)$ dans $A_0(P)$. D'après la proposition 2.1, J_2 est modulaire. Soit $I = \theta^{-1}(J_2)$; on a $h(I) \cap \Gamma = e^E$ donc $J_2 = \theta(I) = \theta(\mathscr{C}(I) \cap \mathscr{E}(I)) = \mathscr{C}(J_2) \cap \mathscr{E}(J_2)$. De même que plus haut on obtient $J = \mathscr{L}^{-1}(\mathscr{L}(J)^\infty) \cap \mathscr{E}(J) = \mathscr{L}^{-1}(T_J H^\infty(P) \cap \mathscr{E}(J)$ et E est de BG pour $L^1(\mathsf{R}_+)$.

Notons que pour $a > 0$ l'application τ_a définie par $\tau_a(f)(t) = af(at)$ $(t > 0)$ est un automorphisme isométrique de $L^1(\mathsf{R}_+)$. Si J est un idéal fermé de $L^1(\mathsf{R}_+)$, $\mathscr{E}(\tau_a(J)) = \tau_a(\mathscr{E}(J))$ et $\tau_a(\mathscr{C}(J)) = \mathscr{C}(\tau_a(J))$. On en déduit facilement qu'un fermé $F \subset i\mathsf{R}$ est de Bennett-Gilbert pour $L^1(\mathsf{R}_+)$ si et seulement si, cF l'est aussi, c désignant un réel positif arbitraire. Le Théorème 3.8 permet donc de ramener entièrement l'étude des ensembles de BG compacts pour $L^1(\mathsf{R}_+)$ à l'étude des ensembles de BG pour A^+.

COROLLAIRE 3.9. *Pour* $\xi \in (0, \frac{1}{2})$, *soit* $\mathscr{E}_\xi = \left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \xi^{n-1}(1-\xi)\right), \varepsilon_n = 0 \text{ ou } 1\right\}.$

Alors tout fermé $F \subset ic\mathscr{E}_{\frac{1}{p}}$ *est de Bennett-Gilbert pour* $L^1(\mathsf{R}_+)$ *pour tout entier* $p \geqq 3$ *et pour tout réel positif* c.

Preuve. D'après la remarque ci-dessus il suffit de prouver le corollaire pour $c = \frac{\pi}{2}$. L'argument de la démonstration du Corollaire 3.3 de [8] montre que si F est un fermé du cercle tel que $\bigcup_{k \geqq 1} F^{n^k}$ est inclus dans un ensemble de Carleson G (voir [8, § 1]) pour une certaine suite strictement croissante (n_k) d'entiers alors F est de BG pour $A^+(\Gamma)$. Cette propriété est vérifiée pour $F = e^{i\mathscr{E}_{1/p}}$ avec $G = F^4$, $n_k = 4p^k$, et le Corollaire résulte alors du Théorème 3.8.

Rappelons qu'un fermé F de R est dit de synthèse s'il vérifie la synthèse pour $L^1(\mathsf{R}_+)$, c'est-à-dire si toute fonction $f \in L^1(\mathsf{R}_+)$ telle que $\hat{f}|_E = 0$ est limite dans $L^1(\mathsf{R}_+)$ d'une suite (f_n) d'éléments de $L^1(\mathsf{R}_+)$ tels que $\hat{f}_n$ est nulle au voisinage de E pour tout n.

Corollaire 3.10. *Il existe un fermé de synthèse* $F \subset]-\pi, \pi[$ *tel que* iF *n'est pas de Bennett-Gilbert pour* $L^1(\mathsf{R}_+)$.

Preuve. D'après [7], §4 il existe un ensemble de synthèse G du cercle ne contenant pas -1 qui n'est pas de Bennett-Gilbert pour $A^+(\Gamma)$. Soit $F \subset]-\Pi, \Pi[$ le fermé vérifiant $e^{iF} = G$. D'après [11], G est de synthèse pour $L^1(\mathsf{R}_+)$, et il résulte du théorème 3.8 que F n'est pas de Bennett-Gilbert pour $L^1(\mathsf{R}_+)$.

Notons qu'il résulte du Lemme 3.7 et des résultats de [7, § 4] que F désignant l'ensemble associé comme ci-dessus à l'ensemble de Kronecker G construit dans [7, § 4], il existe en fait un idéal fermé J de $L^1(\mathsf{R}_+)$ sans facteur intérieur tel que $h(J) = iF$, et une fonction $f \in L^1(\mathsf{R}_+)$, avec $\mathscr{L}(f)(iF) = \{0\}$ telle que $f \notin J$.

Notons enfin que si un fermé $F \subset i\mathsf{R}$ est à la fois BG et de syntèse alors $J = \mathscr{L}^{-1}(\mathscr{L}(J)^\infty$ pour tout idéal J de $L^1(\mathsf{R}_+)$ tel que $h(J) = F$. Ceci est le cas pour les ensembles de la forme $c\,i\,\mathscr{E}_{\frac{1}{p}}$ $(c > 0, p \geqq 3$ entier).

§ 4. Topologie faible sur $L^1(\mathsf{R}_+)$.

A^+ s'identifie au dual de $c_0(\mathsf{Z}^+)$, la dualité donnée par la formule $\langle \mu, f \rangle = \sum_{n \geqq 0} \hat{f}(n)\,\hat{u}(n)$ pour $f \in A^+$, $\mu = (\hat{\mu}(n))_{n \geqq 0} \in c_0(\mathsf{Z}^+)$.

Ceci permet de munir A^+ de la topologie faible $\sigma(A^+, c_0(\mathsf{Z}^+))$ notée w*.

De même la formule $\langle \varphi, f \rangle = \int_0^\infty \varphi(t)\,f(t)\,dt$ pour $f \in L^1(\mathsf{R}_+)$, $\varphi \in \mathscr{C}_0(\mathsf{R}_+)$ permet d'identifier $L^1(\mathsf{R}_+)$ à un sous-espace fermé du dual de $\mathscr{C}_0(\mathsf{R}_+)$. La topologie faible correspondante sur $L^1(\mathsf{R}_+)$ sera également notée w^*.

Soit I (resp. J) un idéal fermé de A^+ (resp. $L^1(\mathsf{R}_+)$). On note I^{w*} (resp. J^{w*}) l'adhérence de I (resp. J) pour la topologie $w*$.

PROPOSITION 4.1. *Soit $I \in \mathscr{I}$. Alors $\theta(I^{w*}) \subset (\theta(I))^{w*}$.*

PREUVE. Posons $J = \theta(I)$. On a $I^{w*} = {}^{\perp}(I^{\perp} \cap c_0(\mathsf{Z}))$ et $J^{w*} = {}^{\perp}(J^{\perp} \cap \mathscr{C}_0(\mathsf{R}_+))$.
Soit $f \in J^{w*}$ et soit $\ell \in I^{\perp} \cap c_0(\mathsf{Z}^+))$. Notons $\tilde{\ell}$ (resp. $\bar{\ell}$) l'élément de $(A^+/I^{w*})^*$ (resp. $(A^+/_I)^*$) associé à ℓ.
On a alors:

$$\langle \Phi_{I^{w*}}(f), \tilde{\ell} \rangle = \int_0^{+\infty} f(t) \langle \Pi_*(\alpha)^t, \tilde{\ell} \rangle \, dt = \int_0^{+\infty} f(t) \langle \Pi(\alpha)^t, \bar{\ell} \rangle \, dt$$

où Π_* (resp. Π) désigne la surjection canonique associée à I^{w*} (resp. I).
Donc $\langle \Phi_{I^{w*}}(f), \tilde{\ell} \rangle = \langle f, h \rangle$ où $h(t) = \langle \Pi(\alpha)^t, \bar{\ell} \rangle$ $(t \geqq 0)$.
D'après le théorème 2.2, $h \in J^{\perp}$ et d'après le théorème de Cartwright [2, Théorème 10.2.1], $h \in \mathscr{C}_0(\mathsf{R}_+)$. Donc $\langle \Phi_{I^{w*}}(f), \tilde{\ell} \rangle = 0$. Par conséquent $J^{w*} \subset \operatorname{Ker} \Phi_{I^{w*}}$. On démontre de manière analogue l'autre inclusion.

J. Esterle a démontré dans [7] que si I est un idéal fermé de A^+ tel que $\mathscr{E}(I)$ est $w*$-dense dans A^+ alors $I = \mathscr{E}(I) \cap I^{w*}$. On déduit facilement de la proposition 4.1 qu'on a un résultat analogue pour les idéaux $J \in \mathscr{J}$. En fait on a le résultat général suivant:

PROPOSITION 4.2. *Soit J un idéal fermé de $L^1(\mathsf{R}_+)$. On a:*

$$J^{w*} * \mathscr{E}(J) \subset J \subset \mathscr{E}(J) \cap J^{w*}.$$

De plus si $\mathscr{E}(J)$ est $w*$-dense dans $L^1(\mathsf{R}_+)$ alors $J = \mathscr{E}(\mathrm{J}) \cap \mathrm{J}^{w*}$.

PREUVE. Soit $\varphi \in \mathrm{J}^{\perp}$; pour $f \in \mathscr{E}(J)$ on pose $\varphi_f(t) = \langle \varphi, \delta_t * f \rangle$ $(t \geqq 0)$. On a alors $\langle \varphi_f, g \rangle = \langle \varphi, f * g \rangle$ $(g \in L^1(\mathsf{R}_+))$. Donc $\varphi_f \in J^{\perp\langle}$ et d'après le lemme 3.2 $\varphi_f \in \mathscr{C}_0(\mathsf{R}_+)$. On a alors $\langle \varphi, f * g \rangle = \langle \varphi_f, g \rangle = 0$ $(f \in \mathscr{E}(J), g \in J^{w*})$.
Donc $\mathscr{E}(J) * J^{w*} \subset J$ (l'autre inclusion est triviale). Supposons maintenant que $\mathscr{E}(J)$ est $w*$-dense dans $L^1(\mathsf{R}_+)$, et soient $g \in \mathscr{E}(J) \cap J^{w*}$, $\varphi \in J^{\perp}$. On a $\varphi_g \in \mathscr{C}_0(\mathsf{R}_+)$ puisque $g \in \mathscr{E}(J)$ et $\varphi_g \perp \mathscr{E}(J)$ puisque $g \in J^{w*}$. Donc $\varphi_g = 0$, $\varphi \perp g * L^1(\mathsf{R}_+)$ et en fait $\varphi \perp g$ puisque $L^1(\mathsf{R}_+)$possède une unité approchée bornée. D'où le résultat.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. Bennett and J. E. Gilbert, *Homogeneous algebras on the circle: I-Ideals of analytic functions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 22 (1972), 1–19.
2. R. P. Boas, *Entire Functions*, Academic Press, New-York, 1954.

3. F. F. Bonsall and J. Duncan, *Complete Normed Algebras*, Ergebnisse der Math. 80, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1973.
4. H. G. Dales, *Convolution algebras on the real line*, Lect. Note 975, Springer-Verlag (1983), 180–209.
5. Y. Domar, *On the ideal structure of commutative Banach algebras*, Banach Center Publ. (P.W.N. Warsaw) 8 (1982), 241–249.
6. O. El-Fallah, *Thèse*, Université de Bordeaux, 1992.
7. J. Esterle, *Distributions on Kronecker sets, strong forms of uniqueness and closed ideals of A^+*, preprint.
8. J. Esterle, E. Strouse and F. Zouakia, *Closed ideals of A^+ and the Cantor set*, preprint.
9. J. Esterle, E. Strouse et F. Zouakia, *Stabilité asymptotique de certains semi-groupes d'opérateurs, et idéaux primaires de $L^1(\mathbb{R}_+)$*, à praître au J. Operator Theory.
10. V. P. Guararii, *Spectral synthesis of bounded functions on the half-axis*, Func. Anal. i Prilozen 3(4) 1969, 34–48 (en Russe).
11. H. Hedenmalm, *A comparison between the closed ideals in ℓ^1_w and L^1_w*, Math. Scand. 58 (1986), 275–300.
12. K. Hoffman, *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New-Yersey, 1962.
13. J. P. Kahane, *Idéaux fermés dans certaines algèbres de fonctions analytiques*, Actes Table Ronde Int. C.N.R.S. Montpellier, Lect. Notes 336, Springer-Verlag 1973, 5–14.
14. B. Nyman, *On the one dimensional translation group and semi-group in certain function spaces*, Thesis, Uppsala, 1951.

O. EL-FALLAH
U.F.R. DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ BORDEAUX I
351, COURS DE LA LIBÉRATION
33405 TALENCE
FRANCE