MATH. SCAND. 74 (1994), 191-207

COHOMOLOGIES ET EXTENSIONS DE CATEGORIES

GEORGES HOFF

0. Introduction.

Dans des travaux précédents (voir [10] et [11]), nous avons défini une notion d'extension de catégories qui généralise celle, classique, d'extension de groupes (exposée dans [12]). Elle fut introduite dans le but d'interpréter la cohomologie (abélienne) des petites catégories en dimension 2. Elle a été utilisée par T. Porter (dans [14]) pour l'étude des modules croisés dans $\mathscr{C}at$ qu'il relie aux catégories internes. Elle intervient aussi en cohomologie de dimension supérieure, comme l'a montré M. Golasinski (dans [7]), en considérant les extensions n-uples. Des cas particuliers sont utilisés dans divers ouvrages ([5] et [16] par exemple). On verra ici qu'elle contribue à interpréter des cohomologies non nécessairement abéliennes et à coefficients non nécessairement fonctoriels comme, par exemple, celle définie par Z. Wojtkowiak (dans [17]) qui apparait naturellement en théorie de l'obstruction concernant les limites homotopiques.

Considérant ses relations avec les catégories fibrées de Grothendieck (dans [9]), on peut aussi élargir la notion d'extension de catégories et les cohomologies ainsi décrites.

Baues définit, dans [3], une cohomologie abélienne des petites catégories qui généralise la cohomologie à coefficient dans un module (i.e. un foncteur à valeurs dans les groupes abéliens) étudiée dans [10] et [11]. Des extensions définies dans ce cadre contribuent, entre autre, à l'étude de la classification des types d'homotopie d'espaces et des classes d'homotopie d'applications (voir [1] et [2]).

Nous commencerons (section 1) par un exposé des principales propriétés des extensions de catégories définies en [10] et [11]. Cette notion est ensuite élargie (section 2) et l'on voit apparaître naturellemant les cocycles. On a alors une cohomologie (section 3) qui classifie les extensions larges.

La cohomologie est souvent associée à un coefficient, cette notion est ici précisée (section 4) et confrontée aux extensions de catégories. Nous terminons (section 5) par l'étude des cohomologies à coefficients en groupes.

Reçu le 3. juin 1993.

Les catégories considérées C, H, $\mathsf{K}, \ldots$ sont des petites catégories à l'exception de la catégorie des groupes $\mathscr{G}r$, de la catégorie des groupes abéliens $\mathscr{A}b$, de la catégorie des petites catégories $\mathscr{C}at$ ou de catégories dont les objets sont les groupes, $\mathscr{C}gr$ ou $\mathscr{H}gr$, ou les petites catégories $\mathscr{C}cat$.

Si C est une catégorie, on note C_0 l'ensemble de ses objets, on note C_1 l'ensemble de ses morphismes. On considère C_0 comme une partie de C_1 en identifiant chaque objet et son morphisme identique. Pour deux objets C et C' de C, on note $\mathsf{C}(C, C')$ l'ensemble des morphismes $c \in \mathsf{C}_1$ de source $\alpha(c) = C$ et de but $\beta(c) = C'$. On note respectivement C_2 et C_3 les ensembles des couples $(c, c') \in \mathsf{C}_1 \times \mathsf{C}_1$ et des triples $(c, c', c'') \in \mathsf{C}_1 \times \mathsf{C}_1 \times \mathsf{C}_1$ composables, i.e. tels que $\alpha(c) = \beta(c')$ et $\alpha(c') = \beta(c'')$.

1. Extensions de categories.

Rappelons la notion que nous avons définie en [10] et [11]. On la retrouve, pour les groupoïdes dans [5].

DÉFINITION 1.1. Une *extension de catégories* (de la catégorie C par la catégorie K) est une suite

$$E\colon \mathsf{K} \xrightarrow{i} \mathsf{H} \xrightarrow{p} \mathsf{C}$$

où i est un foncteur fidèle et C une catégorie quotient de H, le foncteur projection étant p. De plus, pour h et $h' \in \mathsf{H}_1$ on a

$$(*) \qquad p(h) = p(h') \Leftrightarrow \exists!\ k \in \mathsf{K}_1 \text{ tel que } h' = i(k)h.$$

La définition de catégorie quotient est celle de [13], c'est à dire que p est un foncteur plein et bijectif sur les objets.

PROPOSITION 1.2. (a) *Le foncteur composé* pi *envoie* K_1 *sur* C_0.

(b) *Pour* $h \in \mathsf{H}_1$ *et* $k \in \mathsf{K}_1$ *tels que* $hi(k)$ *est défini, il existe un unique* ${}^h k \in \mathsf{K}_1$ *tel que* $hi(k) = i({}^h k)h$.

(c) *Le foncteur* i *identifie* K *à une sous-catégorie de* H.

PREUVE. (a) et (b) sont des conséquences de la condition $(*)$ de la définition 1.1. tandis que (c) est issu de la définition d'un foncteur fidèle.

PROPOSITION 1.3. *La catégorie* K *est réunion disjointe de groupes* K_C *indexés par* C_0.

PREUVE. La proposition 1.2.(a) nous a dit que K est réunion disjointe de monoïdes. La condition $(*)$ de la définition 1.1. dit alors que chacun de ceux-ci est un groupe.

PROPOSITION 1.4. *Pour* k *et* $k' \in \mathsf{K}_1$ *et* $h \in \mathsf{H}_1$, *on a*

$$kh = k'h \Rightarrow k = k'.$$

PREUVE. Comme k est élément d'une groupe, on a $h = k^{-1}k'h$ et, de par la condition (*) de la définition 1.1., on a $k^{-1}k' = 1$ et donc $k = k'$.

COROLLAIRE 1.5. *On a une opération de* H *sur* K, i.e.

$$\forall (h, h') \in \mathsf{H}_2 \text{ et } \forall k \in \mathsf{K}_1 \text{ avec } \beta(k) = \alpha(h'),$$
$$\text{on a} \quad {}^{hh'}k = {}^{h}({}^{h'}k).$$

PREUVE. On a les relations:

$$\begin{aligned}(hh')k &= {}^{hh'}k(hh') \\ &= h(h'k) = h({}^{h'}kh') = (h^{h'}k)h' = {}^{h}({}^{h'}k)hh',\end{aligned}$$

ce qui implique, de par la proposition 1.4., la relation annoncée.

DÉFINITION 1.6. Une *section* de l'extension E est la donnée, pour chaque $c \in \mathsf{C}_1$, d'un représentant $s(c)$ tel que $ps(c) = c$ de sorte que $s(c)$ soit une identité quand c en est une.

PROPOSITION 1.7. *La donnée d'une section de l'extension E définit, pour chaque morphisme* $c\colon C \to C'$ *de* C, *un homomorphisme de groupes* $\mathsf{K}_C \to \mathsf{K}_{C'}$ *qui à un* k *associe* ${}^{s(c)}k$. *Cet homomorphisme est une identité quand c en est une.*

PREUVE. On a les relations

$${}^{s(c)}(kk')s(c) = s(c)kk' = {}^{s(c)}ks(c)k' = {}^{s(c)}k^{s(c)}k's(c),$$

et, de par la proposition 1.4., il vient

$${}^{s(c)}(kk') = {}^{s(c)}k^{s(c)}k'.$$

On n'a pas nécessairement un foncteur $\mathsf{C} \to \mathcal{G}r$ car les sections s ne sont pas nécessairement des foncteurs $\mathsf{C} \to \mathsf{H}$. Lorsqu'il existe un foncteur $s\colon \mathsf{C} \to \mathsf{H}$ alors [14] dit que l'extension est scindée et que K a une C-structure.

Nous sommes ici sur le chemin de la définition d'une cohomologie de C à coefficients dans K. Les techniques y seraient semblables à celles de [11], mais nous la considérerons ci-après dans un cadre plus général.

Mettons maintenant en évidence une propriété des extensions de catégories qui permettra d'élargir cette notion. Pour cela, il nous faut rappeler des définitions dues à [9] et souvent exposées (par exemple dans [8] et [15]).

DEFINITION 1.8. Soit $p\colon \mathsf{H} \to \mathsf{C}$ un foncteur. Un morphisme h de H est dit *cocartésien* au dessus de $c = p(h)$ si

$$\forall h' \in \mathsf{H}_1 \text{ tel que } p(h') = c \text{ et } \alpha(h') = \alpha(h)$$

$$\exists!\, \mathrm{k} \text{ tel que } p(k) = \beta(c) \text{ et } kh = h'.$$

On dit que *p possède assez de morphismes cocartésiens* si pour tout morphisme c: $C \to C'$ et pour tout objet H tel que $p(H) = C$, il existe un morphisme de source H cocartésien au dessus de c.

DÉFINITION 1.9. Un foncteur p qui possède assez de morphismes cocartésiens est ce qu'on appelle une *précofibration* (selon [9] et [15]) ou une préopfibration (dans le langage de [3]) au sens de Grothendieck. Les *fibres* de p sont alors les catégories $\mathsf{H}_C = p^{-1}(C)$ avec $C \in \mathsf{C}_0$.

THÉORÈME 1.10. *Les extensions de catégories sont les précofibrations de Grothendieck dont les fibres sont des groupes.*

PREUVE. Soit $\mathsf{K} \xrightarrow{i} \mathsf{H} \xrightarrow{p} \mathsf{C}$ une extension de catégories. La propriété (*) de 1.1. nous dit que tous les morphismes de H sont cocartésiens. Comme p est plein, donc surjectif sur les morphismes et n'ayant qu'un seul objet dans chaque fibre K_C, il est clair que p possède assez de morphismes cocartésiens. Réciproquement, soit p: $\mathsf{H} \to \mathsf{C}$ une précofibration de Grothendieck dont les fibres H_C sont des groupes. Considérons alors $\coprod_{C \in \mathsf{C}_0} \mathsf{H}_C \xrightarrow{i} \mathsf{H} \xrightarrow{p} \mathsf{C}$. L'inclusion i est un foncteur fidèle. Les fibres étant des groupes, elles n'ont qu'un objet et, par ailleurs, ayant assez de morphismes cocartésiens, le foncteur p est bijectif sur les objets et surjectif sur les morphismes: c'est un quotient. Si on remarque alors que tout morphisme est cocartésien, car on a assez de morphismes cocartésiens et car les fibres sont des groupes, on a la propriété (*) de 1.1.: nous sommes bien en présence d'une extension de catégories.

DÉFINITION 1.11. Un *morphisme d'extensions* de E à E' est un triplet de foncteurs $\Gamma = (\eta, \mu, \nu)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{cccccc} E: & \mathsf{K} & \xrightarrow{i} & \mathsf{H} & \xrightarrow{p} & \mathsf{C} \\ {\scriptstyle\Gamma}\big\downarrow & {\scriptstyle\eta}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\mu} & & \big\downarrow{\scriptstyle\nu} \\ E': & K' & \xrightarrow{i'} & \mathsf{H}' & \xrightarrow{p'} & \mathsf{C}'. \end{array}$$

La composition des morphismes d'extensions est définie de manière évidente. Le morphisme Γ est appelé *isomorphisme d'extensions* si les foncteurs η, μ et ν sont inversibles.

Les isomorphismes d'extensions Γ tels que η et ν sont des foncteurs identiques fournissent une congruence entre les extensions de C par K. Ceci permet de décrire, en termes d'extensions, la cohomologie évoquée à la suite de la proposition 1.7.

2. Extensions larges et cocycles.

On peut être amené à souhaîter que les extensions de catégories aient des fibres possédant plus d'un objet. Du point de vue de la cohomologie, il s'agit d'avoir des foncteurs "surjectifs" p: $\mathsf{H} \to \mathsf{C}$ tels qu'une bonne notion de section permette de définir des cocycles sur C_2 à valeurs dans une catégorie "noyau" K. Le théorème 1.10. nous suggère la généralisation suivante.

DÉFINITION 2.1. Une *extension large de catégories* (de la catégorie C par la catégorie K) est une suite

$$E\colon \mathsf{K} \xrightarrow{i} \mathsf{H} \xrightarrow{p} \mathsf{C}$$

telle que

(1) le foncteur p possède assez de morphismes cocartésiens,

(2) le foncteur i est fidèle (on pourra identifier K à la souscatégorie $i(\mathsf{K})$ de H),

(3) $\mathsf{K} = \coprod_{C\in \mathsf{C}_0} \mathsf{K}_C$ et $i(\mathsf{K}_C) = p^{-1}(C)$ $\forall C \in \mathsf{C}_0$.

En vertu du théorème 1.10., on retrouve les extensions de catégories dans le cas où les catégories K_C sont des groupes.

DÉFINITION 2.2. Soit E: $\mathsf{K} \xrightarrow{i} \mathsf{H} \xrightarrow{p} \mathsf{C}$ une extension large de catégories. On appelle *section* de E la donnée s, pour chaque morphisme $c\colon C \to C'$ de C et chaque objet H tel que $p(H) = C$ d'un morphisme $s_H(c)$ de source H et cocartésien au dessus de c de sorte que $s_H(c)$ soit une identité quand c en est une.

Selon la terminologie issue de [9], une section de l'extension E ust un clivage de la précofibration p.

PROPOSITION 2.3. *La donnée d'une section s de E définit*

(a) *pour chaque morphisme* $c\colon C \to C'$ *de* C, *un foncteur* $S(c)\colon \mathsf{K}_C \to \mathsf{K}_{C'}$, *qui est le foncteur identique quand c est une identité,*

(b) *pour chaque* $(c, c') \in \mathsf{C}_2$, *une transformation naturelle* $S(c,c')\colon S(cc') \Rightarrow S(c)S(c')$ *qui est la transformation identique quand c ou c' est une identité,*

(c) *et pour chaque* $(c, c', c'') \in \mathsf{C}_3$, *on a*

$$S(c,c')S(c'')_{\circ}S(cc',c'') = S(c)S(c',c'')_{\circ}S(c,c'c'')\colon S(cc'c'') \Rightarrow S(c)S(c')S(c''),$$

ce qui se traduit par la commutativité du 2-diagramme ci-dessous.

La composition $_{\circ}$ *des transformations naturelles est la composition "verticale" définie dans* [13].

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{K}_{C'''} \arrow[rrr, "S(cc'c'')"] \arrow[dr, "S(c'')"'] \arrow[drr, "S(c'c'')" description] \arrow[rr, phantom, shift right=3, "\Downarrow S(c,c'c'')"] \arrow[d, phantom, shift left=4, "\Downarrow S(c',c'')"] & & & \mathsf{K}_C \arrow[l, phantom, shift right=3, "\Downarrow S(cc',c'')"'] \\
& \mathsf{K}_{C''} \arrow[r, "S(c')"'] \arrow[urr, "S(cc')" description] & \mathsf{K}_{C'} \arrow[ur, "S(c)"'] \arrow[ur, phantom, shift left=4, "\Downarrow S(c,c')"] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C''' \arrow[rrr, "cc'c''"] \arrow[dr, "c''"'] \arrow[drr, "c'c''" description] & & & C \\
& C'' \arrow[r, "c'"'] \arrow[urr, "cc'" description] & C' \arrow[ur, "c"'] &
\end{tikzcd}$$

Preuve. (a) Si K est un objet de $\mathsf{K}_C \subset \mathsf{H}$, l'objet $S(c)(K)$ de K_C est le but de $s_K(c)$. Si $k\colon K \to K'$ est un morphisme de K_C, le morphisme $S(c)(k)$ est l'unique morphisme de $\mathsf{K}_{C'}$ tel que $S(c)(k)s_K(c) = s_{K'}(c)k$. Depar la cocartésianité de $s_K(c)$, on a aussi $S(c)(k')S(c)(k) = S(c)(k'k)$ quand $k'k$ est défini dans K_C.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "s_K(c)"] \arrow[d, "k"'] & S(c)(K) \arrow[d, dashed, "S(c)(k)"] \arrow[dd, dashed, bend left=60, "S(c)(k'k)"] \\
K' \arrow[r, "s_{K'}(c)"] \arrow[d, "k'"'] & S(c)(K') \arrow[d, dashed, "S(c)(k')"] \\
K'' \arrow[r, "s_{K''}(c)"] & S(c)(K'')
\end{tikzcd}$$

(b) Pour chaque K, la cocartésianité de $s_K(cc')$ donne l'existence d'un unique $S(c,c')(K)$ tel que $S(c,c')(K)s_K(cc') = s_{S(c')(K)}(c)s_K(c')$. Pour chaque $k\colon K \to K'$, elle donne aussi

$$S(c)[S(c')(k)]S(c,c')(K) = S(c,c')(K')S(cc')(k).$$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rrr, "s_K(cc')"] \arrow[dr, "s_K(c')"] \arrow[dd, "k"'] & & & S(cc')(K) \arrow[dl, dashed, "S(c,c')(K)"'] \arrow[dd, dashed, "S(cc')(k)"] \\
& S(c')(K) \arrow[r, "{}^sS(c')(K)^{(c)}"] \arrow[dd, dashed, "S(c')(k)"] & S(c)S(c')(K) \arrow[dd, dashed, "S(c)S(c')(k)"'] & \\
K' \arrow[rrr, "s_{K'}(cc')"] \arrow[dr, "s_{K'}(c')"] & & & S(cc')(K') \arrow[dl, dashed, "S(c,c')(K')"] \\
& S(c')(K') \arrow[r, "S(c')(K')^{(c)}"] & S(c)S(c')(K') &
\end{tikzcd}$$

(c) Pour chaque objet K, on a les diagrammes commutatifs suivants:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rr, "s_K(cc'c'')"] \arrow[dr, "s_K(c'c'')"] \arrow[d, "s_K(c'')"'] & & S(cc'c'')(K) \arrow[d, "S(c,c'c'')(K)"] \\
{} \arrow[dr, "{}^sS(c'')(K)^{(c')}"'] & S(c'c'')(K) \arrow[r, "{}^sS(c'c'')(K)^{(c)}"] \arrow[d, "S(c',c'')(K)"] & S(c)S(c'c'')(K) \arrow[d, "S(c)S(c',c'')(K)"] \\
& S(c')S(c'')(K) \arrow[r, "{}^sS(c')S(c'')(K)^{(c)}"] & S(c)S(c')S(c'')(K)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "s_K(cc'c'')"] \arrow[d, "s_K(c'')"'] & S(cc'c'')(K) \arrow[d, "S(cc',c'')(K)"] \\
S(c'')(K) \arrow[r, "{}^sS(c'')(K)^{(cc')}"] \arrow[d, "{}^sS(c'')(K)^{(c')}"'] & S(cc')S(c'')(K) \arrow[d, "S(c,c')S(c'')(K)"] \\
S(c')S(c'')(K) \arrow[r, "{}^sS(c')S(c'')(K)^{(c)}"] & S(c)S(c')S(c'')(K)
\end{tikzcd}$$

De par la cocartésianité de $s_K(cc'c'')$, on a alors

$$S(c, c')S(c'')(K)S(cc', c'')(K) = S(c)S(c', c'')(K)S(c, c'c'')(K),$$

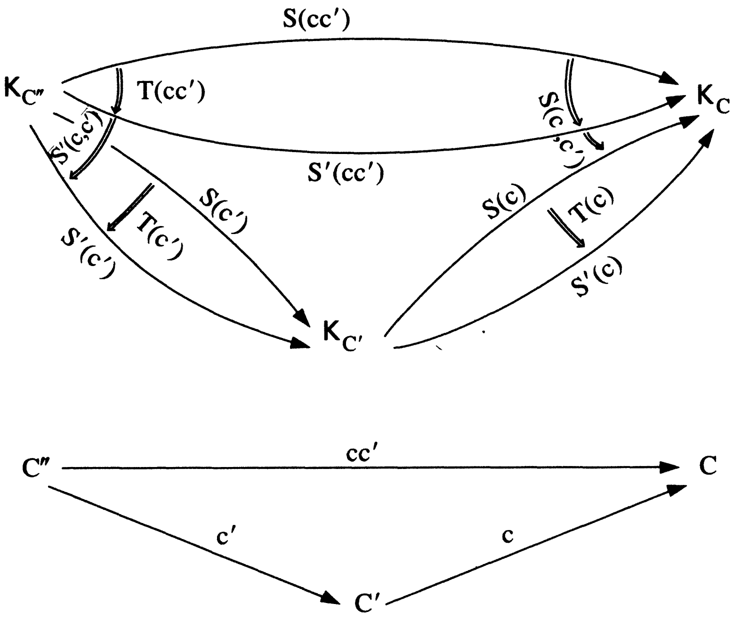
d'où le résultat annoncé.

DÉFINITION 2.4. Un tel "pseudofoncteur" S de $\mathbf{C}$ dans $\mathscr{C}at$ est appelé *2-cocycle associé à l'extension E* par la section s.

PROPOSITION 2.5. *Soient S et S' des 2-cocycles associés à l'extension E par des sections s et s' respectivement. Pour chaque $c \in \mathbf{C}_1$, on a une équivalence naturelle $T(c)$: $S(c) \Rightarrow S'(c)$ telle que pour chaque $(c, c') \in \mathbf{C}_2$, on a*

$$S'(c, c')_\circ T(cc') = [T(c)_* T(c')]_\circ S(c, c'): S(cc') \Rightarrow S'(c)S'(c'),$$

ce qui se traduit par la commutativité du 2-diagramme suivant.



La composition $*$ des transformations naturelles est la composition "horizontale" définie dans [13].

PREUVE. (a) Pour chaque K, le morphisme $T(c)(K)$ est l'unique tel que $T(c)(K)s_K(c) = s'_K(c)$. L'unique morphisme t tel que $ts'_K(c) = s_K(c)$ est évidemment inverse de $T(c)(K)$. Pour k: $K \to K'$, on a aussi $T(c)(K')S(c)(k) = S'(c)(k)\,T(c)(K)$ de par la cocartésianité de $s_K(c)$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rr, "s_K(c)"] \arrow[dr, "s'_K(c)"] \arrow[dd, "k"'] & & S(c)(K) \arrow[dl, dashed, "T(c)(K)"'] \arrow[dd, "S(c)(K)"] \\
& S(c')(K) \arrow[ur, dashed, bend right, "t"'] \arrow[dd, "S'(c)(k)"] & \\
K' \arrow[rr, "s_{K'}(c)"] \arrow[dr, "s'_{K'}(c)"'] & & S(c)(K') \arrow[dl, dashed, "T(c)(K')"] \\
& S'(c)(K') &
\end{tikzcd}$$

(b) Pour chaque objet K, on a les diagrammes commutatifs suivants:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rr, "s_K(cc')"] \arrow[drr, "S'_K(cc')"] \arrow[dd, "s'_K(c')"'] & & S(cc')(K) \arrow[d, "T(cc')(K)"] \\
& & S(cc')(K) \arrow[d, "S'(c{,}c')(K)"] \\
S'(c')(K) \arrow[rr, "{}^{s'}S'(c')(K)^{(c)}"] & & S'(c)S'(c')(K)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[rrr, "s_K(cc')"] \arrow[dr, "s_K(c')"] \arrow[ddr, "s'_K(c')"'] & & & S(cc')(K) \arrow[d, "S(c{,}c')(K)"] \\
& S(c')(K) \arrow[rr, "{}^{s'}S(c')(K)^{(c)}"] \arrow[d, "T(c')(K)"] & & S(c)S(c')(K) \arrow[d, "S(c)T(c')(K)"] \\
& S'(c')(K) \arrow[rr, "{}^{s'}S'(c')(K)^{(c)}"] \arrow[drr, "{}^{s'}S'(c')(K)^{(c)}"'] & & S(c)S'(c')(K) \arrow[dl, "T(c')S'(c)(K)"] \\
& & S'(c)S'(c')(K) &
\end{tikzcd}$$

De par la cocartésianité de $s_K(cc')$, on a alors

$$S'(c,c')(K)\,T(cc')(K) = T(c')S'(c)(K)S(c)T(c')(K)S(c,c')(K)$$

d'où le résultat annoncé, compte tenu de la définition de

$$[T(c) * T(c')](K) = T(c')S'(c)(K)S(c)T(c')(K).$$

Comme pour les extensions de catégories en 1.11., on peut parler de morphisme d'extensions larges dont on ne considère ici que le cas particulier suivant.

DÉFINITION 2.6. Deux extensions larges de catégories, E: $\mathsf{K} \xrightarrow{i} \mathsf{H} \xrightarrow{p} \mathsf{C}$ et E': $\mathsf{K} \xrightarrow{i'} \mathsf{H}' \xrightarrow{p'} \mathsf{C}$, sont dites *congrues* s'il existe un foncteur inversible μ: $\mathsf{H} \to \mathsf{H}'$ tel que

$$\mu i = i' \text{ et } p'\mu = p.$$

On notera $\mathrm{Ext}(\mathsf{C}, \mathsf{K})$ l'ensemble des classes de congruence d'extensions de C par K.

PROPOSITION 2.7. *Soient E et E' deux extensions de* C *par* K.

(a) *Si E et E' sont congrues et si S est un 2-cocycle associé à E, alors S est aussi un 2-cocycle associé à E'.*

(b) *Réciproquement, si un même 2-cocycle S est associé à E et E', alors E et E' sont congrues.*

Preuve. (a) Soit s la section qui associe S à E. En posant $s'_H(c) = \mu(s_{\mu^{-1}(H)}(c))$, on définit une section s' qui associe S à E'. Notons que $H = \mu^{-1}(H)$ car $H \in \mathsf{H}_0 = \mathsf{K}_0$.

(b) Soient s et s' les sections qui associent S à E et E' respectivement. Un morphisme h: $K \to H$ de H s'écrit de manière unique sous la forme $ks_K(p(h))$ avec $k \in \mathsf{K}_1 \subset \mathsf{H}_1$. En posant $\mu(h) = ks'_K(p(h))$, on définit un foncteur μ: $\mathsf{H} \to \mathsf{H}'$ qui fait de E et E' des extensions congrues.

3. Cohomologie.

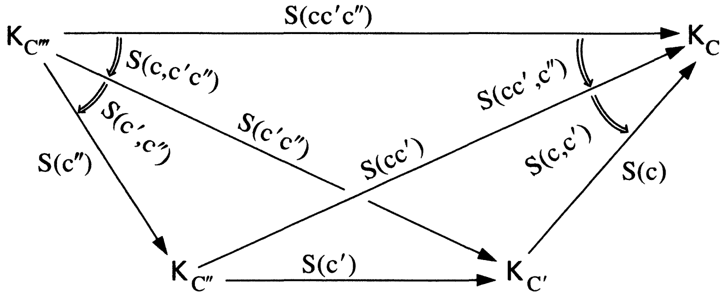
Soient C et $\mathsf{K} = \coprod_{C \in \mathsf{C}_0} \mathsf{K}_C$ deux catégories.

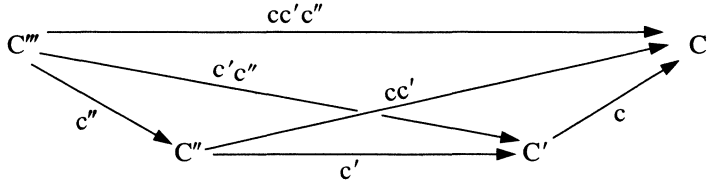
DÉFINITION 3.1. Un 2-*cocycle* de C vers K est la donnée S:

(a) pour chaque morphisme c: $C \to C'$ de C, d'un foncteur $S(c)$: $\mathsf{K}_C \to \mathsf{K}_{C'}$ qui est le foncteur identique quand c est une identité,

(b) pour chaque couple composable $(c, c') \in \mathsf{C}_2$, d'une transformation naturelle $S(c,c')$: $S(cc') \Rightarrow S(c)S(c')$ qui est la transformation identique quand c ou c' est une identité, de sorte que pour chaque triple composable $(c, c', c'') \in \mathsf{C}_3$, on a

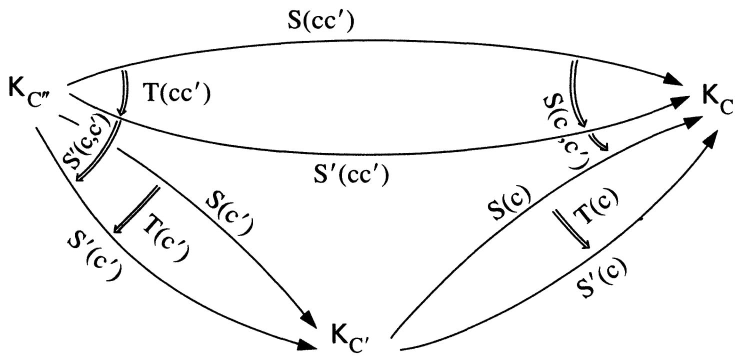
$$S(c,c')S(c'')_\circ T(cc',c'') = S(c)S(c',c'')_\circ S(c,c'c''): S(cc'c'') \Rightarrow S(c)S(c')S(c'').$$

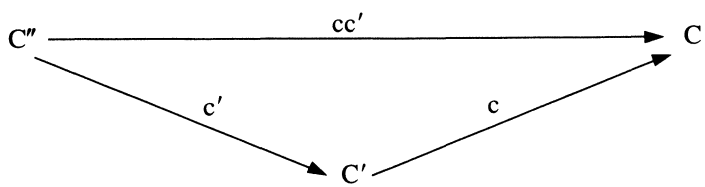




DÉFINITION 3.2. Des 2-cocycles S et S' de C vers K sont dits *cohomologues* si pour chaque morphisme $c \in \mathsf{C}_1$ on a une équivalence naturelle $T(c)$: $S(c) \Rightarrow S'(c)$ de sorte que pour chaque couple composable $(c, c') \in \mathsf{C}_2$ on a

$$S(c,c')_{\circ} T(cc') = [T(c)_{*} T(c')]_{\circ} S(c,c') \colon S(cc') \Rightarrow S'(c)S'(c').$$





On retrouve le même type de relations dans la 2-cohomologie non-abélienne étudiée par les gerbes, comme en [6], ou par les bitorseurs, comme en [4]. Comme on y travaille dans ses groupoïdes, il se peut que l'on ait alors des 2-flèches allant dans le sens inverse.

DÉFINITION 3.3. L'ensemble des classes de cohomologie de 2-cocycles de C vers K est noté $H^2(\mathsf{C}, \mathsf{K})$ et est appelé ensemble de *cohomologie de dimension* 2 de C vers K.

THÉORÈME 3.4. *L'application qui à chaque extension de* C *par* K *associe la classe de cohomologie d'un de ses* 2*-cocycles associés définit une bijection*

$$\omega\colon \operatorname{Ext}(\mathsf{C}, \mathsf{K}) \to H^2(\mathsf{C}, \mathsf{K}).$$

PREUVE. (a) La proposition 2.3. montre comment à une extension E on associe un 2-cocycle et la proposition 2.5. que la classe d'icelui dans $H^2(\mathsf{C}, \mathsf{K})$ ne dépend que de E. La proposition 2.7. nous dit qu'à deux extensions congrues on associe un même élément de $H^2(\mathsf{C}, \mathsf{K})$. L'application ω est donc bien définie.

(b) Si à deux extensions E et E' on associe des 2-cocycles S et S' cohomologues, comme dans la démonstration de la proposition 2.7. (b), on construit une congruence entre E et E'. L'application ω est donc injective.

(c) Il reste à montrer la surjectivité de ω. Soit S un 2-cocycle de C vers K, nous allons construire une extension à la quelle S est associée. Notre modèle est l'écriture unique des morphismes de H vue dans la démonstration de la proposition 2.7. (b). Soit H la catégorie dont les morphismes sont les triples (c, K, k) tels que

$$c \in \mathsf{C}_1,\ K \in (\mathsf{K}_{\alpha(c)})_0,\ k \in (\mathsf{K}_{\beta(c)})_1 \text{ avec } \alpha(k) = S(c)(K);$$

la source de (c, K, k) est K, son but est $\beta(k)$; la composition dans H est définie par

$$(c', K', k')(c, K, k) = (c'c, K, k'S(c')(k)S(c', c)(K)).$$

$$\begin{tikzcd}
 & & S(c'c)(K) \arrow[d, "S(c'{,}c)(K)"] \\
K \arrow[dr, dashed, "(c{,}K{,}k)"] \arrow[ddrr, dashed, bend right, "(c'{,}K'{,}k')(c{,}K{,}k)"'] & S(c)(K) \arrow[d, "k"] & S(c')S(c)(K) \arrow[d, "S(c')(k)"] \\
 & K' \arrow[dr, dashed, "(c'{,}K'{,}k')"] & S(c')(K') \arrow[d, "k'"] \\
 & & \beta(k')
\end{tikzcd}$$

$$C \xrightarrow{\quad c \quad} C' \xrightarrow{\quad c' \quad} C''$$

La définition d'un 2-cocycle permet de vérifier que cette composition est bien associative et donc que H est bien une catégorie. Les foncteurs i: $\mathsf{K} \to \mathsf{H}$: $k \mapsto (1_C, \alpha(k), k)$ pour $k \in (\mathsf{K}_C)_1$ et p: $\mathsf{H} \to \mathsf{C}$: $(c, K, k) \mapsto c$ font de $\mathsf{K} \xrightarrow{i} \mathsf{H} \xrightarrow{p} \mathsf{C}$ une extension large à laquelle le 2-cocycle S est associé par la section définie par

$$s_K(c) = (c, K, 1_{S(c)(K)}).$$

4. Coefficients.

Précisons cette notion qui, souvent, définit la cohomologie.

DÉFINITION 4.1. Un *coefficient* M: $\mathsf{C} \nrightarrow \mathscr{C}at$ sur une catégorie C est la donnée d'application $\mathsf{C}_0 \to \mathscr{C}at_0$: $C \mapsto M(C)$ et $\mathsf{C}(C, C') \to \mathscr{C}at(M(C), M(C'))$: $c \mapsto M(c)$ de sorte que $M(c)$ est une identité quand c en est une.

Un coefficient $\mathsf{C} \nrightarrow \mathscr{C}at$ n'est pas en général un foncteur $\mathsf{C} \to \mathscr{C}at$ ni même un pseudofoncteur. Dans le cas où M est un foncteur à valeurs dans $\mathscr{A}b$, c'est un C-module au sens de [11], le cas particulier des modules sur un groupoïde est considéré dans [16].

DÉFINITION 4.2. Une *extension de* C *par le coefficient* M: $\mathsf{C} \nrightarrow \mathscr{C}at$ est une extension de categories

$$E\colon \coprod_{C \in \mathsf{C}_0} M(C) \xrightarrow{i} \mathsf{H} \xrightarrow{p} \mathsf{C}$$

telle que $x \in M(C)$ si et seulement si $pi(x) = C$ et il existe une section s telle que le 2-cocycle S associé à E par s vérifie

$$S(c) = M(c) \ \ \forall c \in \mathsf{C}_1.$$

On dit alors que S est *compatible* à M.

Si l'on reprend la terminologie de 1.5., étendue aux extensions larges à l'aide de 1.8., on peut dire qu'alors les "opérations" de C (par M) et de H sur K sont compatibles.

DÉFINITION 4.3. Suivant 2.5., on peut parler de *classes de congruence d'extensions de* C *par* M. On notera $\operatorname{Ext}(\mathsf{C}, M)$ l'ensemble de ces classes.

DÉFINITION 4.4. Un *2-cocycle de* C *de coefficient* M est un 2-cocycle de C vers $\coprod_{C\in\mathsf{C}_0} M(C)$ vérifiant

$$S(c) = M(c) \ \forall c \in \mathsf{C}_1.$$

DÉFINITION 4.5. L'ensemble des classes de cohomologie de 2-cocycles de coefficient M est noté $H^2(\mathsf{C}, M)$ et est appelé ensemble de *cohomologie de dimension* 2 *de coefficient* M.

THÉORÈME 4.6. *L'application qui à chaque extension de* C *par le coefficient* M *associe la classe de cohomologie d'un de ses 2-cocycles compatibles à* M *définit une bijection*

$$\omega\colon \operatorname{Ext}(\mathsf{C}, M) \to H^2(\mathsf{C}, M).$$

PREUVE. Ceci découle directement de la démonstration du théorème 3.4.

EXEMPLES 4.8. On peut voir, à la lecture de [17] par exemple, que ceci, avec éventuellement des coefficients contravariants (on remplace alors dans ce qui précède la catégorie C par la catégorie opposée C^{op}), recouvre nombre de cohomologies que l'on peut trouver dans la littérature. En particulier, on retrouve la cohomologie à coefficients dans un module de [11].

Notre notion de coefficient peut encore être élargie. Montrons comment dans une définition que nous étudierons dans la suite.

Soit $\mathscr{C}cat$ une catégorie dont les objets sont les petites catégories munie d'un foncteur $H\colon \mathscr{C}at \to \mathscr{C}cat$ identique sur les objets et soit $\tilde{M}\colon \mathsf{C} \to \mathscr{C}cat$ un foncteur.

DÉFINITION 4.9. Un *coefficient* $M\colon \mathsf{C} \nrightarrow \mathscr{C}at$ est dit *compatible* avec le foncteur $\tilde{M}$ si pour chaque $C \in \mathsf{C}_0$ on a $M(C) = \tilde{M}(C)$ et si les diagrammes du type suivant sont tous commutatifs.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(C,C') \arrow[rr, "\tilde{M}"] \arrow[dr, "M"'] & & \mathscr{C}cat(M(C), M(C')) \\
& \mathscr{C}at(M(C), M(C')) \arrow[ur, "H"'] &
\end{tikzcd}$$

Une *extension de* C *par* $\tilde{M}$ est une extension de C par un coefficient M compatible avec $\tilde{M}$.

Il est utile de revenir maintenant au cas particulier des extensions de catégories initiales, celles de 1.1., car elles nous permettent de donner une expression intéressante de ce que nous avons décrit. On verra ainsi concrètement que nous avons obtenu une généralisation de ce que l'on rencontre souvent (par exemple dans [12], [11] ou [17]) en cohomologie.

5. Le cas des coefficients en groupes.

La catégories $\mathcal{G}r$ étant une sous-catégorie de $\mathcal{C}at$, soit M: $\mathsf{C} \nrightarrow \mathcal{G}r$ un coefficient en groupes sur la catégorie C.

REMARQUES 5.1. (1) Il est clair que les extensions de C par M sont des extensions de catégories au sens de 1.1.

(2) Dans le cas où M est un foncteur à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens $\mathcal{A}b$, on retrouve exactement les extensions de C par le C-module M définies en [11].

Quand il n'y aura pas de risque de confusion, on notera $c \cdot x = M(c)(x)$ pour $c \in \mathsf{C}_1$ et $x \in M(\alpha(c))$.

THÉORÈME 5.2. *L'ensemble des 2-cocycles de* C *de coefficient M est en bijection avec l'ensemble des applications*

$$\Psi\colon \mathsf{C}_2 \to \coprod_{C \in \mathsf{C}_0} M(C)$$

telles que

(a) $\psi(c, c') \in M(\beta(c))$ est une identité si c ou c' en est une,

(b) $c,c')(c' \cdot x) = \psi(c, c')(cc' \cdot x)\psi(c, c')^{-1} \quad \forall x \in M(\alpha(c'))$,

(c) $(c \cdot \psi(c', c''))\psi(c, c'c'') = \psi(c, c')\psi(cc', c'') \quad \forall (c, c', c'') \in \mathsf{C}_3$.

PREUVE. Les 2-cocycles S de C de coefficient M sont tous tels que $S(c) = M(c)$ par définition. Les groupes $M(C)$ ayant un seul objet, la donnée d'une transformation naturelle $S(c, c')$ de $M(cc')$ vers $M(c)M(c')$ est exactement la donnée d'un morphisme de $M(\beta(c))$, i.e. d'un élément $\psi(c, c')$ de ce groupe, qui vérifie (b). On a bien sûr la propriété (a) quand S est un 2-cocycle. La relation (c) n'est autre que la traduction de la relation de cocycle de 3.1.

THÉORÈME 5.3. *Des 2-cocycles S et S' de* C *de coefficient M sont cohomologues si, et seulement si, les applications correspondantes* ψ *et* ψ' *sont telles qu'il existe une application*

$$\tau\colon \mathsf{C}_1 \to \coprod_{C \in \mathsf{C}_0} M(C)$$

telle que

(a) $\tau(c) \in M(\beta(c))$,
(b) $c \cdot x = \tau(c)(c \cdot x)\tau(c)^{-1} \quad \forall x \in M(\alpha(c))$,
(c) $\psi'(c, c') = \tau(c)(c \cdot \tau(c'))\psi(c, c')\tau(cc')^{-1} \quad \forall (c, c') \in \mathsf{C}_2$.

PREUVE. On a encore ici $S(c) = S'(c) = M(c)$. La donnée d'une transformation naturelle $T(c)$: $M(c) \to M(c)$ est exactement la donnée d'un élément $\tau(c)$ du groupe $M(\beta(c))$ tel que

$$M(c)(x) = \tau(c) M(c)(x) \tau(c)^{-1} \quad \forall x \in M(\alpha(c)).$$

La relation de cohomologie entre S et S' de 3.2. se traduit alors par la relation (c).

Considérons maintenant une catégorie $\mathscr{C}_{\mathscr{gr}}$ dont les objets sont les groupes, munie d'un foncteur H: $\mathscr{G}r \to \mathscr{C}_{\mathscr{gr}}$ identique sur les objets, et un foncteur $\tilde{M}$: $\mathsf{C} \to \mathscr{C}_{\mathscr{gr}}$.

EXEMPLE 5.4. Dans [17], on considère la catégorie $\mathscr{C}_{\mathscr{gr}} = \mathscr{H}_{\mathscr{gr}}$ dont les morphismes sont définis par

$$\mathscr{H}_{\mathscr{gr}}(G, G') = [K(G, 1); K(G', 1)]$$

les classes d'homotopie libre d'applications entre espaces d'Eilenberg-MacLane définis par les groupes G et G'. Le foncteur H est alors le foncteur naturel de $\mathscr{G}r$ vers $\mathscr{H}_{\mathscr{gr}}$.

DÉFINITION 5.5. La *cohomologie* $H^2(\mathsf{C}, \tilde{M})$ est définie comme suit. On considère tous les coefficients M compatibles avec $\tilde{M}$ et les applications de 5.2. correspondantes. La relation d'équivalence sur ces dernières est alors définie par les applications

$$\tau \colon \mathsf{C}_1 \to \coprod_{C \in \mathsf{C}_0} M(C)$$

telles que
(a) $\tau(c) \in \tilde{M}(\beta(c))$,
(b) $c_{\circ} x = \tau(c)(c \cdot x)\tau(c)^{-1} \quad \forall x \in \tilde{M}(\alpha(c))$,
(c) $\psi'(c, c') = \tau(c)(c \cdot \tau(c'))\psi(c, c')\tau(cc')^{-1} \quad \forall (c, c') \in \mathsf{C}_2$,
quand M et M' sont deux coefficients compatibles avec $\tilde{M}$ et où l'on note:

$$c \cdot x = M(c)(x) \text{ et } c_{\circ} x = M'(c)(x).$$

THÉORÈME 5.6. *La relation précédente détermine une congruence entre extensions de* C *par* $\tilde{M}$ *et on a une interprétation de* $H^2(\mathsf{C}, \tilde{M})$ *en termes d'extensions de catégories.*

PREUVE. La définition 5.5. étend la relation de cohomologie aux 2-cocycles associés à toutes les extensions de C par M avec M compatible avec $\tilde{M}$. On reprend, mutatis mutandis, les démonstrations des théorèmes 3.4. et 4.6. adaptées aux extensions à coefficients en groupes par les théorèmes 5.2 et 5.3.

EXEMPLE 5.7. Dans l'exemple 5.4., avec des coefficients contravariants, on retrouve la cohomologie de dimension 2 de [17] et donc une interpretation de celle-ci en termes d'extensions, où les coefficients M compatibles avec $\tilde{M}$ interviennent dans la recherche de l'obstruction à un problème posé par les limites homotopiques.

REFERENCES

1. H. J. Baues, *Algebraic Homotopy*, Cambridge Univ. Press, 1989.
2. H. J. Baues, *Combinatorial Homotopy and 4-dimensional Complexes*, De Gruyter, 1991.
3. H. J. Baues, G. Wirsching, *Cohomology of small categories*, J. Pure Appl. Alg. 38 (1985), 187–211.
4. L. Breen, *Bitorseurs et cohomologie non abélienne*, The Grothendieck Festschrift 1, Birkhäuser, 1990, 401–476.
5. R. Brown, P. Higgins, *Crossed complexes and non-abelian extensions, Category theory*, Lectures Notes in Math. 962 (1982), 39–50.
6. J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Springer, 1971.
7. M. Golasinski, *n-fold extensions and cohomologies of small categories*, Mathematica 31 (1989), 53–59.
8. J. Gray, *Fibred and cofibred categories*, Proc. of the conf. on categorical Alg. La Jolla, Springer, 1966, 21–83.
9. A. Grothendieck, *Catégories fibrées et descente*, SGA 1 – *Revêtements étales et groupe fondamental*, Lectures Notes in Math. 224 (1971), 145–194.
10. G. Hoff, *Sur une cohomologie des catégories*, Thèse, Fac. des Sciences Univ. de Paris, 1970.
11. G. Hoff, *On the cohomology of categories*, Rend. Mat. 7 (1974), 169–192.
12. S. MacLane, *Homology*, Springer, 1963.
13. S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, Springer, 1971.
14. T. Porter, *Crossed modules in Cat and a Brown-Spencer theorem for 2-categories*, Cahiers de Topologie et Géom. Differentielle Catégoriques 26 (1985), 381–387.
15. D. Quillen, *Higher algebraic K-theory* I, *Higher K-theories*, Lecture-Notes in Math. 341 (1973), 85–147.
16. J. Renault, *A groupoid approach to C*-algebras*, Springer Lecture Notes in Math. 793 (1980).
17. Z. Wojtkowiak, *On maps from holim F to Z*, Proc. Symp. on Algebraic Topology, Lecture Notes in Math. 1298 (1987), 227–236.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
INSTITUT GALILÉE
UNIVERSITÉ PARIS-NORD
AVENUE J. B. CLÉMENT
93430 VILLETANEUSE
FRANCE