MATH. SCAND. 74 (1994), 237–248

LA SOLUTION UNIQUE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LIOUVILLE

SHINJI YAMASHITA

Résumé.

Soit Ω un domaine hyperbolique du plan complexe $\mathbf{C}$ avec l'élément de la métrique de Poincaré: $P_\Omega(z)\,|dz|$. Alors, $\phi_\Omega = \log P_\Omega$ est une solution de l'équation de Liouville: $\Delta u = 4e^{2u}$ dans Ω. Nous connaissons que si u satisfait l'inégalité différentielle: $\Delta u \geqq 4e^{2u}$ dans Ω, alors, $u \leqq \phi_\Omega$ dans Ω (le résultat dû à L. V. Ahlfors). Nous démontrons que $u \geqq \phi_\Omega$ dans Ω si $\Delta u \leqq 4e^{2u}$ dans Ω et de plus, $u - \phi_\Omega$ est bornée inférieurement dans Ω. Ces faits, avec leur corollaire, étendent le théorème de B. Gustafsson vrai pour Ω simplement connexe. Supposons que Ω est borné et $\partial\Omega = \partial(\Omega \cup \partial\Omega)$ dans $\mathbf{C}$, où ∂X est la frontière de $X \subset \mathbf{C}$. Supposons que u satisfait l'inégalité: $\Delta u \leqq 4e^{2u}$ dans Ω, et encore que $u(z) \to +\infty$ quand z tend vers chaque point de $\partial\Omega$. Alors $u \geqq \phi_\Omega$ dans Ω. Comme une conséquence nous obtenons le théorème de L. A. Caffarelli et A. Friedman qui supposent une régularité de $\partial\Omega$.

1. Introduction et les résultats.

Un domaine Ω du plan complexe $\mathbf{C} = \{|z| < +\infty\}$ s'appelle hyperbolique si $\partial\Omega$ contient au moins deux points, ∂X étant la frontière de $X \subset \mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$. Nous supposerons une fois pour toutes que Ω est un domaine hyperbolique dans $\mathbf{C}$. Chaque Ω a l'élément de la métrique de Poincaré: $P_\Omega(z)\,|dz|$, $z \in \Omega$. C'est-à-dire, si f est une projection analytique sur Ω du disque unité ouvert $D = \{|z| < 1\}$ regardé comme le revêtement universel de Ω, en notation: $f \in \mathrm{Proj}(\Omega)$, alors,

$$1/P_\Omega(z) = (1 - |w|^2)\,|f'(w)| \tag{1.1}$$

pour la densité de Poincaré P_Ω en $z = f(w)$, $w \in D$; le côté droit de (1.1) est indépendant du choix particulier de f et w, pour autant que $z = f(w)$ soit satisfaite. Il est bien connu que $P_\Omega(z) \to +\infty$ quand z tend vers un point de $\partial\Omega$;

Reçu le 22 fevrier 1993.

voir [J. p. 116]. La densité P_Ω satisfait l'identité de la courbure de Gauss: $P_\Omega^{-2}\Delta \log P_\Omega = 4$ dans Ω, ou, la fonction

$$\phi_\Omega = \log P_\Omega$$

satisfait l'équation différentielle de J. Liouville, citée dans le titre du mémoire présent:

$$\text{(EDL)} \qquad \Delta u = 4e^{2u}$$

dans Ω, où $\Delta = 4\partial^2/\partial z\partial\bar{z} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, $z = x + iy$, est l'opérateur laplacien. Notre but est la démonstration de ce fait que ϕ_Ω est la solution unique de (EDL) dans Ω sous une certaine condition frontière de u en termes de ϕ_Ω (le théorème 1), ou directement, celle de u (le théorème 2 avec le théorème 1). Nous désignons par $\mathrm{RC}^2(\Omega)$ la famille des fonctions à valeurs réelles et deux fois continûment différentiables dans Ω.

THÉORÈME 1. *Soit Ω un domaine hyperbolique de* C, *et supposons que* $u \in \mathrm{RC}^2(\Omega)$ *satisfait l'inégalité différentielle:* $\Delta u \geqq 4e^{2u}$ *dans* Ω. *Alors,* $u \leqq \phi_\Omega$ *dans* Ω. *Encore, supposons que* $u \in \mathrm{RC}^2(\Omega)$ *satisfait l'inégalité différentielle:* $\Delta u \leqq 4e^{2u}$ *dans* Ω *et qu'il y a une constante réelle A telle que*

$$(1.2) \qquad u \geqq \phi_\Omega + A$$

dans Ω. *Alors* $u \geqq \phi_\Omega$ *dans* Ω.

La première part du théorème 1 est due essentiellement à L. V. Ahlfors [A1, Theorem A]. En particulier, $u \leqq \phi_\Omega$ dans Ω si u satisfait (EDL) dans Ω; il y a deux cas: $u \equiv \phi_\Omega$ ou $u < \phi_\Omega$ toujours dans Ω d'après le principe de la comparaison des solutions de (EDL) dû à V. Jørgensen (voir [J, p. 115]).

On ne peut pas conclure que: $u \geqq \phi_\Omega$ dans Ω de la seule condition: $\Delta u \leqq 4e^{2u}$ (ou plus fortement: $\Delta u = 4e^{2u}$) sans (1.2) dans Ω. Si c'était vrai, au contraire, alors ϕ_Ω serait la seule solution de (EDL) dans Ω. Mais, il y a solutions en nombre infini de (EDL) dans chaque Ω, fait indiqué dans [J, p. 116]; pour les détails, voir la section 2 du mémoire présent qui se compose des huit sections.

Nous allons démontrer, dans la section 2, que le théorème de B. Gustafsson [G1, p. 105, Theorem 7.3] pour Ω simplement connexe est obtenu par le théorème 1.

Un domaine $\Omega \subset$ C est dit admissible si Ω est borné et $\partial\Omega = \partial(\Omega \cup \partial\Omega)$ dans C. En particulier, pour Ω admissible $\partial\Omega$ n'a aucun point isolé.

THÉORÈME 2. *Supposons que* $u \in \mathrm{RC}^2(\Omega)$ *satisfait l'inégalité différentielle:* $\Delta u \leqq 4e^{2u}$ *dans un domaine admissible* $\Omega \subset$ C. *Supposons encore que*

$$(1.3) \qquad u(z) \to +\infty$$

quand z tend vers chaque point de $\partial\Omega$. *Alors,* $u \geqq \phi_\Omega$ *dans* Ω.

Nous ne pouvons pas enlever l'admissibilité de Ω dans le théorème 2: voir Σ et $D_{\#}$ dans la section 5.

Une conséquence immédiate des théorèmes 1 et 2 est la proposition suivante:

Supposons que $u \in \mathrm{RC}^2(\Omega)$ *satisfait* (EDL) *dans* Ω *admissible. Supposons encore que* $u(z) \to +\infty$ *quand* z *tend vers chaque point de* $\partial\Omega$. *Alors,* $u = \phi_\Omega$ *dans* Ω.

Le cas spécial de cette proposition sous une certaine régularité de $\partial\Omega$ est le théorème de L. A. Caffarelli et A. Friedman [CF, p. 448, Theorem 3.3]. Le résultat de S. Richardson [R, p. 331, Theorem 2] pour Ω borné et limité par une courbe de Jordan se suit aussi.

2. Domaines du type fini, les corollaires du théorème 1 et un théorème de Gustafsson.

Étant donné des constantes $a > 0$ et $b > 0$, on peut réduire l'inégalité ($\Delta v \leqq ae^{bv}$, respectivement) dans Ω à $\Delta u \geqq 4e^{2u}$ ($\Delta u \leqq 4e^{2u}$, respectivement) dans Ω par la transformation: $u = (b/2)v + (1/2)\log(ab/8)$. En particulier, (EDL) est équivalente à l'équation: $\Delta v = e^v$ par la transformation: $v = 2u + \log 8$.

Le théorème dû à É. Picard [P1, P2], en la forme spéciale, est, alors, suivant: *Fixons des points distincts:* $a_1, \ldots, a_n$ *de* $\mathbf{C}$ $(n \geqq 2)$. *Soient* $\beta_j > -1$ $(1 \leqq j \leqq n)$ *et* $\gamma > 1$ *des constantes telles que* $\gamma + \beta_1 + \ldots + \beta_n < 0$ *(d'où,* $\gamma < n$*). Alors, il y a une et seulement une solution* u *de* (EDL) *dans* $\Omega(a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{C}\backslash\{a_1, \ldots, a_n\}$ *telle que des limites* $\neq \infty$ *existent:*

$$\lim_{z \to a_j} (u(z) - \beta_j \log|z - a_j|),\ 1 \leqq j \leqq n;\ \lim_{z \to \infty} (u(z) + \gamma \log|z|).$$

Soient $a_1, a_2 \in \partial\Omega$ $(a_1 \neq a_2)$ et soient u_j les solutions de (EDL) dans $\Omega(a_1, a_2)$ correspondantes aux trios des constantes donnés: $(\beta_1^{(j)}, \beta_2^{(j)}, \gamma^{(j)})$, j = 1, 2, avec $\beta_1^{(1)} \neq \beta_1^{(2)}$. Alors, la différence $u_1 - u_2$ n'est pas bornée dans un voisinage de a_1 relatif à Ω. En particulier, $u_1 \neq u_2$ considerée dans Ω. Cette observation montre qu'il y a solutions en nombre infini de (EDL) dans chaque Ω.

Soit $\partial^*\Omega$ la frontière de Ω dans la sphère de Riemann: $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Évidemment, $\partial\Omega = \partial^*\Omega$ si et seulement si Ω est borné dans $\mathbf{C}$. La condition (1.2) est donc équivalente à l'inégalité:

$$u(z) \geqq \phi_\Omega(z) + O(1)$$

quand z tendvers chaque point $\zeta \in \partial^*\Omega$ en ce sens qu'il y a deux constantes $r(\zeta) > 0$ et $A(\zeta)$ dépendantes de ξ telles qu'on ait

$$u(z) \geqq \phi_\Omega(z) + A(\xi)$$

pour chaque $z \in \Omega$ sujet à $|z - \zeta| < r(\zeta)$ ou $|z| > r(\zeta)$ selon que $\zeta \neq \infty$ ou $\zeta = \infty$ (si $\infty \in \partial^* \Omega$).

Soit $\delta_\Omega(z)$ la distance entre $z \in \Omega$ et $\partial\Omega$:

$$\delta_\Omega(z) = \inf_{w \in \partial\Omega} |z - w|.$$

Il est bien connu que $\delta_\Omega P_\Omega \leqq 1$ dans Ω. Suivant [Y1, Y2] nous appelons que Ω est du type fini, si $A(\Omega) > 0$, où

$$A(\Omega) \equiv \inf_{z \in \Omega} \delta_\Omega(z) P_\Omega(z).$$

Sinon, ou en d'autres termes, si $A(\Omega) = 0$, nous appelons que Ω est du type infini. Un critère typique pour Ω soit du type fini est que la dérivée $(\partial/\partial z)(1/P_\Omega(z)) = -(\exp(-\phi_\Omega(z)))(\partial/\partial z)\phi_\Omega(z)$ est bornée dans Ω [Y1, Theorem 1]. Plus précisément, en posant

$$\gamma(\Omega) = \sup_{z \in \Omega} |(\partial/\partial z)(1/P_\Omega(z))|.$$

on a $\gamma(\Omega) > 0$ et les inégalités: $1/(2\gamma(\Omega)) \leqq A(\Omega) \leqq 2/(2 + \gamma(\Omega))$; voir [Y2, p. 116] ($\omega(\Omega) = A(\Omega)$ dans [Y1]). On connait que $\gamma(\Omega) \leqq 2$ pour Ω simplement connexe, et $\gamma(\Omega) = 1$ si et seulement si Ω est convexe; voir [Y1, Proposition 2] pour le fait dernier. En particulier, $A(\Omega) \geqq 1/4$ pour Ω simplement connexe et $A(\Omega) \geqq 1/2$ pour Ω convexe. Voir [G1, p. 37, (64) et (65)] aussi; notons que la fonction c_0 pour Ω définie dans [G1] est exactement $-\log P_\Omega = -\phi_\Omega$ si Ω est simplement connexe, mais c_0 est strictement plus grande que $-\log P_\Omega$ dans tout Ω non simplement connexe; voir [G1, p. 66, (180)]. Plus généralement, si les composantes connexes de $(\mathbf{C} \cup \{\infty\}) \backslash \Omega$ sont en nombre fini et chaqune est un continu non dégénéré dans $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$, ou, un ensemble fermé et connexe contenant au moins deux points dans $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$, alors Ω est du type fini. De plus, il y a quelques exemples de Ω du type fini avec les composantes en nombre infini de $\partial\Omega$; voir, par exemple, [BP] et [Y2, § 8]. Spécialement, pour des domaines Ω du type fini, il n'y a aucun point isolé de $\partial\Omega$. Des domaines du type fini ont beaucoup de propriétés importantes dans la théorie des fonctions; voir, par exemple. [BP] et [Y1, Y2]. Si Ω est non borné et du type fini, alors Ω n'est pas admissible. Si Ω est D coupé le long du intervalle fermé $[0, 1/2]$ sur l'axe réel, alors Ω est borné et du type fini, mais non admissible. Nous proposerons un exemple de Ω admissible mais du type infini dans la section 6. Maintenant, si Ω est du type fini, alors

$$u(z) \geqq -\log \delta_\Omega(z) + O(1) \tag{2.1}$$

quand z tend vers chaque point de $\partial^*\Omega$ si et seulement si

$$u(z) \geqq \phi_\Omega(z) + O(1)$$

quand z tend vers chaque point de $\partial^*\Omega$; en d'autres termes, on a (1.2) dans Ω. Visiblement (2.1) implique (1.3) quand z tend vers chaque point de $\partial\Omega$. Mais la converse n'est pas vraie; voir l'exemple (ii) dans la section 5. Il y a donc une différence délicate entre (2.1) et (1.3).

Or, le théorème [G1, p. 105, Theorem 7.3] est exactement le suivant:

Si $u \in \mathrm{RC}^2(\Omega)$ *satisfait* (EDL) *dans* Ω *simplement connexe, alors* $u \leqq \phi_\Omega$ *dans* Ω. *Encore si* (2.1) *est vraie quand* z *tend vers chaque point de* $\partial^*\Omega$, *alors* $u = \phi_\Omega$.

Gustafsson a dit de plus que son théorème, dans la forme ci-dessus, se maintient aussi pour Ω ayant des continus non-dégénérés dans $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$, en nombre fini, comme les composantes connexes de $(\mathbf{C} \cup \{\infty\})\backslash\Omega$ [G1, p. 106]. Nous avons ici une extension de son théorème à Ω du type fini à l'aide du théorème 1 et du corollaire 1 du théorème 1 suivant.

COROLLAIRE 1. *Supposons que* $u \in \mathrm{RC}^2(\Omega)$ *satisfait* (EDL) *dans* Ω *du type fini et* (2.1) *est vraie quand* z *tend vers chaque point de* $\partial^*\Omega$. *Alors* $u = \phi_\Omega$.

Voir aussi [R, p. 330, Theorem 1] pour Ω borné et simplement connexe, et [G2]. L'équation $\Delta u = e^u$ s'appelle celle de Liouville dans [R].

Comme une autre conséquence du théorème 1 nous avons le

COROLLAIRE 2. *Supposons qu'une fonction* $f\colon \Omega \to D$ *est analytique et qu'il y a une constante* $B > 0$ *telle que*

$$|f'(z)|/(1 - |f(z)|^2) \geqq BP_\Omega(z) \tag{2.2}$$

en tout $z \in \Omega$. *Alors* Ω *est simplement connexe et* f *est un homéomorphisme conforme de* Ω *sur* D.

N.B. Il y a une estimation de grad ϕ_Ω dans un sous-domaine Ω_0 d'un domaine Ω convexe [CF, p. 440, Lemma 2.2]; mais, elle est incomplète. Nous pouvons démontrer que

$$|\mathrm{grad}\, \phi_\Omega(z)| \leqq 4(1 - A(\Omega))/\delta_\Omega(z), \quad z \in \Omega; \tag{2.3}$$

pour Ω du type fini. En effet, par [Y2, p. 116, (7.3)] on a

$$(1/2)\,|\mathrm{grad}\, \phi_\Omega(z)| = P_\Omega(z)\,|(\partial/\partial z)(1/P_\Omega(z))| \leqq 2/\delta_\Omega(z) - 2P_\Omega(z), \quad z \in \Omega.$$

Parce que $P_\Omega(z) \geqq A(\Omega)/\delta_\Omega(z)$, on a (2.3). On peut remplacer le côté droit de (2.3) par $3/\delta_\Omega(z)$ si Ω est simplement connexe, et encore par $2/\delta_\Omega(z)$ si Ω est convexe.

3. Preuve du théorème 1.

Nous commençons par une petite modification du lemme d'Ahlfors (voir [A2, p. 13, Lemma 1-1]; notons que $K(\rho) \leqq -1$ là; voir aussi [A1, Theorem A]); pour la démonstration, en réalité, nous suivrons l'argument d'Ahlfors et/ou Gustafsson.

LEMME. *Supposons que $\Phi \in \mathrm{RC}^2(\Omega)$ satisfait $\Delta\Phi \leqq 4e^{2\Phi}$ dans Ω avec $\Phi \geqq \phi_\Omega + B$ dans Ω où B est une constante. Supposons que $\Psi \in \mathrm{RC}^2(\Omega)$* satisfait $\Delta\Psi \geqq 4e^{2\Psi}$ *dans Ω. Alors $\Phi \geqq \Psi$ dans Ω.*

En particulier, si $\Phi = \phi_\Omega$ et $\Psi = u$ avec $\Delta u \geqq 4e^{2u}$, alors, $\phi_\Omega \geqq u$ dans Ω: c'est le résultat d'Ahlfors, cité ci-dessus.

PREUVE. Considérons $f \in \mathrm{Proj}(\Omega)$ avec (1.1). Fixons r, $0 < r < 1$, et posons

$$g(w) = \Phi(f(w)) + \log|f'(w)| - [\Psi(f(rw)) + \log(r|f'(rw)|)] \tag{3.1}$$

pour $w \in D$. Par l'inégalité: $\Phi(f(w)) \geqq -\log[(1-|w|^2)|f'(w)|] + B$ on a alors:

$$g(w) \geqq -\log(1-|w|^2) - [\Psi(f(rw)) + \log(r|f'(rw)|)] + \beta \quad \text{dans} \quad D,$$

d'où $g(w) \to +\infty$ quand $|w| \to 1$. Par conséquent, il y a $a = \alpha + i\beta \in D$ tel que $g(\alpha, \beta) = g(a) \leqq g(w)$ pour tout $w = \xi + i\eta \in D$. Ensuite,

$$\Delta g(a) = g_{\xi\xi}(\alpha, \beta) + g_{\eta\eta}(\alpha, \beta) \geqq 0$$

parce que $g_{\xi\xi}(\alpha, \beta) \geqq 0$ et $g_{\eta\eta}(\alpha, \beta) \geqq 0$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} 4^{-1}\Delta g(w) &= 4^{-1}(\Delta_z\Phi(f(w)))|f'(w)|^2 - 4^{-1}(\Delta_\zeta\Psi(f(rw)))(r|f'(rw)|)^2 \\ &\leqq \exp[2\Phi(f(w)) + 2\log|f'(w)|] - \exp[2\Psi(f(rw)) + 2\log(r|f'(rw)|)]; \end{aligned} \tag{3.2}$$

ici, les opérateurs laplaciens Δ, Δ_z et Δ_ζ sont tenus par rapport à $w, z = f(w)$, et $\zeta = f(rw)$, respectivement. Ainsi, inégalité (3.2) avec $\Delta g(a) \geqq 0$ donne que $0 \leqq g(a) \leqq g(w)$ pour chaque $w \in D$. Fixons $w \in D$ et faisons $r \to 1$ dans (3.1). Alors, $\Phi(f(w)) - \Psi(f(w)) \geqq 0$ dans D, ou, $\Phi \geqq \Psi$ dans Ω.

PREUVE DU THÉORÈME 1. Toujours, $\phi_\Omega \geqq u$ si $\Delta u \geqq 4e^{2u}$ dans Ω par la remarque après notre lemme. Ensuite, sous la condition (1.2), on peut appliquer notre lemme à $\Phi = u$ avec $\Delta u \leqq 4e^{2u}$, et $\Psi = \phi_\Omega$. Alors, $u \geqq \phi_\Omega$.

N.B. (I) Il est facile d'étendre le théorème 1 aux surfaces S de Riemann qui sont hyperboliques, ou, plus précisément, qui admettent D comme leur revêtement universel. Dans ce cas, $\Delta u(z)\,dxdy \geqq$ (ou $\leqq$) $4e^{u(z)}\,dxdy$ est tenue en termes des paramètres locaux $z = x + iy \in \mathbf{C}$.

(II) Si Ω est simplement connexe, alors u là satisfait (EDL) si et seulement si $u = \log\{|\psi'|/(1-|\psi|^2)\}$, où ψ: $\Omega \to D$ est une fonction analytique dans Ω dont la dérivée n'annule pas dans Ω. C'est un résultat célèbre de Liouville [L]. En effet, $v = 2u$ satisfait $\Delta v = 8e^v$ dans Ω. En posant $K = -4$ dans [B, p. 27, Proposition 1.6] on a $v = 2\log\{|\psi'|/(1-|\psi|^2)\}$ dans Ω. Pour Ω simplement connexe, on a $u \leqq \phi_\Omega$ dans Ω; c'est exactement:

$$(1-|w|^2)|g'(w)|/(1-|g(w)|^2) = P_\Omega(z)^{-1}|\psi'(z)|/(1-|\psi(z)|^2) \leqq 1$$

pour chaque $z = f(w)$, $f \in \mathrm{Proj}(\Omega)$, et $g = \psi \circ f \colon D \to D$. C'est aussi un résultat direct d'une inégalité due à H. A. Schwarz et G. Pick, appliquée a g; voir [A2, p. 3].

4. Preuve du corollaire 2.

La fonction $u = \log[|f'|/(1 - |f|^2)]$ satisfait (EDL) dans Ω. Il résulte donc du théorème 1 avec (2.2) que $u = \phi_\Omega$, d'où

$$|f'|/(1 - |f|^2) = P_\Omega \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

Soit $g \in \mathrm{Proj}(\Omega)$ et considérons la fonction composée $h(w) = f(g(w))$ dans E. Alors,

$$(1 - |w|^2)\,|h'(w)|/(1 - |h(w)|^2) = P_\Omega(z)^{-1}\,|f'(z)|/(1 - |f(z)|^2) = 1$$

pour chaque $w \in D$, avec $z = g(w)$. Donc $h(w) \equiv \varepsilon(w - a)/(1 - \bar{a}w)$, $|\varepsilon| = 1 > |a|$. Il n'est pas difficile d'observer que f est une transformation biunivoque entre Ω et D.

N.B. Encore, on peut étendre le corollaire 2 aux surfaces de Riemann hyperboliques.

Dans le cas où Ω est du type fini dans le corollaire 2, et pour $f \colon \Omega \to D$ dont la derivée ne s'annule pas dans Ω, nous pouvons remplacer (2.2) par:

$$\liminf \delta_\Omega(z)\,|f'(z)|/(1 - |f(z)|^2) > 0$$

quand z tend vers chaque point de $\partial^*\Omega$. De même, dans le cas où Ω est admissible dans le corollaire 2, et pour $f \colon \Omega \to D$ dont la derivée ne s'annule pas dans Ω, nous pouvons remplacer (2.2) par

$$|f'(z)|/(1 - |f(z)|^2) \to +\infty$$

quand z tend vers chaque point de $\partial\Omega$. Dans ce cas on doit employer le théorème 2 démontré dans la prochaine section.

5. Preuve du théorème 2.

Posons $\Omega(n) = \{z \in \mathrm{C};\ \mathrm{dis}(z, \Omega \cup \partial\Omega) < 1/n\}$ pour les nombres naturels n. Alors, $\Omega(n) \subset \Omega(m)$ si $n \geqq m$. Notons que tous les domaines $\Omega(n)$ sont bornées, d'où, hyperboliques. Notons encore que $\Omega \cup \partial\Omega = \bigcap_{n \geqq 1} \Omega(n)$. Nous observerons que $G \subset \Omega$ pour chaque domaine $G \subset \mathrm{C}$ tel qu'on ait $K \subset \Omega \cup \partial\Omega$ pour chaque ensemble K fermé (dans C), contenu dans G. Pour le voir, nous supposons qu'il y a $z \in G \backslash \Omega$. Alors, nous pouvons trouver un disque fermé $k \subset G$, $z \in k$. Donc, $z \in k \subset \Omega \cup \partial\Omega$, d'où $z \in \partial\Omega = \partial(\Omega \cup \partial\Omega) = \partial(\mathrm{C} \backslash (\Omega \cup \partial\Omega))$. Ensuite, Il y a un point de $\mathrm{C} \backslash (\Omega \cup \partial\Omega)$ dans $k \subset \Omega \cup \partial\Omega$. C'est une contradiction.

En remplaçant ∞ par un point fixé de Ω, on sait que Ω est le noyau de la suite $\{\Omega(n)\}$ au sens de D. A. Hejhal [Hj, p. 7, et p. 10, Remark]. Il est facile d'observer que Ω est aussi le noyau de chaque sous-suite $\{\Omega(n_j)\}$ de $\{\Omega(n)\}$. Donc, $\Omega(n) \to \Omega$ au sens de Hejhal. Il résulte alors du théorème profond [Hj, p. 8, Theorem 1, et p. 10, Remark], en termes de la densité de Poincaré, que $P_{\Omega(n)}$ converge à P_Ω uniformément quand $n \to \infty$ sur chaque ensemble fermé contenu dans Ω.

En posant $\phi_n = \phi_{\Omega(n)}$ et en considérant la différence $u - \phi_n$ dans Ω on a $u(z) - \phi_n(z) \to +\infty$ quand z tend vers chaque point de $\partial\Omega$. Il y a donc un point $b \in \Omega$ où $u - \phi_n$ attend son minimum. Comme on vu dans la preuve de notre lemme dans la section 3, on sait que les inégalités: $0 \leqq 4^{-1}\Delta(u - \phi_n)(b) \leqq e^{2u(b)} - \exp(2\phi_n(b))$ donnet l'inégalité: $u \geqq \phi_n$ dans Ω. En faisant $n \to \infty$ dans Ω nous obtenons que $u \geqq \phi_\Omega$ dans Ω.

EXEMPLES. (i) Pour les contre-exemples, nous considérons, d'abord, le demi-plan $\Sigma = \{z; \operatorname{Re} z > 0\}$, étant non borné (donc, non admissible), pour que

$$\phi_\Sigma(z) = -\log(2x), \quad z = x + iy \in \Sigma.$$

Posons $F(z) = (e^z + 1)/(e^z - 1)$, de sorte que $F(\Sigma) = \Sigma \backslash \{1\}$, et encore, posons:

$$u(z) = \phi_\Sigma(F(z)) + \log|F'(z)| = \log[e^x/(e^{2x} - 1)], \quad z = x + iy \in \Sigma.$$

Alors, u est une solution de (EDL) dans Σ, et u(z) $\to +\infty$ quand z tend vers chaque point de $\partial\Sigma$, axe imaginaire. Mais,

$$u(z) - \phi_\Sigma(z) = \log[2xe^x/(e^{2x} - 1)] \to -\infty$$

quand $x \to +\infty$ dans Σ. Alors, l'inégalité: $u \geqq \phi_\Omega$ n'est pas vraie dans Σ.

(ii) Le domaine $D_\# = D\backslash\{0\}$ n'est pas admissible (et encore, est du type infini) et

$$\phi_{D_\#}(z) = -\log[2|z|\log(1/|z|)], \quad z \in D_\#.$$

Pour une constante α, $0 < \alpha < 1$, la fonction

$$u(z) = \phi_D(|z|^\alpha) + \log(\alpha|z|^{\alpha-1}) = \log[\alpha|z|^{\alpha-1}/(1 - |z|^{2\alpha})]$$

satisfait l'équation (EDL) dans $D_\#$ et $u(z) \to +\infty$ quand z tend vers chaque point de $\partial D_\#$. Mais,

$$u(z) - \phi_{D_\#}(z) = \log\frac{2\alpha|z|^\alpha\log(1/|z|)}{1 - |x|^{2\alpha}} \to -\infty$$

quand $z \to 0 \in \partial D_\#$. Alors, $u \geqq \phi_{D_\#}$ dans $D_\#$ est une faute. Encore on a

$$u(z) + \log\delta_{D_\#}(z) = \log[\alpha|z|^\alpha/(1 - |z|^{2\alpha})] \to -\infty$$

pour $z \to 0 \in \partial D_\#$.

6. Un exemple de Ω.

Toujours, $2^{n+3} > 3n(n+1)(n+2)$ pour tout $n \geqq 9$. Pour $n \geqq 9$, $a_n = 1 - n^{-1}$ et $r_n = 2^{-n}$, posons

$$\Delta_n = \{z; |z - a_n| \leqq r_n\} \text{ et encore } \Omega = D \Big\backslash \left(\bigcup_{n=9}^{\infty} \Delta_n \right);$$

les disques Δ_n et Δ_m sont disjoints pour $n \neq m$. Alors, Ω est admissible. Considérons les domaines annulaires:

$$A_n = \{z; r_n < |z - a_n| < a_{n+1} - a_n - r_{n+1}\}, \quad n \geqq 9.$$

Alors, $A_n \subset \Omega$ pour $n \geqq 9$, et de plus,

$$\operatorname{mod} A_n \equiv (2\pi)^{-1} \log((a_{n+1} - a_n - r_{n+1})/r_n) \to +\infty$$

quand $n \to +\infty$. Donc, il résulte de [BP, p. 478, Corollary 1] que Ω est du type infini.

7. Une candidate de la densité P_Ω pour $\Omega \subset \mathsf{R}^n$, $n \geqq 3$.

Soient $ax = (ax_1, \ldots, ax_n)$ et $|x| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2}$ pour $a \in \mathsf{R}$ et pour un point $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de l'espace euclidien R^n ($n \geqq 3$). L'élément de la métrique de Poincaré de la balle $B = \{|x| < 1\}$ est $P_B(x)\,ds$, où $P_B(x) = (1 - |x|^2)^{-1}$, et $ds = \left(\sum_{j=1}^{n} dx_j^2 \right)^{1/2}$. Alors, la fonction

$$P_B(n^{-1/2}(n-2)^{-1/2}x)^{(n-2)/2}$$

satisfait l'équation:

$$\Delta u = u^{(n+2)/(n-2)} \tag{7.1}$$

dans la balle $\{|x| < n^{1/2}(n-2)^{1/2}\}$, où $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$ est laplacien.

Pour chaque domaine $\Omega \subset \mathsf{R}^n$ ayant des hypersurfaces compactes, connexes, lisses (de C^∞, par exemple), et en nombre fini, comme sa frontière $\partial\Omega$, C. Loewner et L. Nirenberg [LN, p. 253, Theorem 4, (a) et (b)] ont démontré qu'il y a une solution $\phi_\Omega > 0$ de C^∞ et unique de (7.1) dans Ω telle que $\phi_\Omega(y) \to +\infty$ quand y tend vers chaque point de $\partial\Omega$. De plus, en désignant la distance de $y \in \Omega$ et $\partial\Omega$ encore par $\delta_\Omega(y)$, on a

$$\delta_\Omega(y)^{(n-2)/2} \phi_\Omega(y) \to (n(n-2)/4)^{(n-2)/4}$$

quand y tend vers chaque point de $\partial\Omega$. De plus, si Ω n'est pas borné, alors

$$|y|^{n-2}\phi_\Omega(y) \to c(\Omega) > 0$$

quand $|y| \to +\infty$ dans Ω; [LN, Theorem 4, (4.3)].

Soit Ω un domaine du type spécifié par Loewner et Nirenberg et soit $\Omega_n = \{n^{1/2}(n-2)^{1/2}x; x \in \Omega\}$ qui, sans aucun doute, encore satisfait la régularité de leur sens. Posons

$$P_\Omega(x) = [\phi_{\Omega_n}(n^{1/2}(n-2)^{1/2}x)]^{2/(n-2)}, \quad x \in \Omega.$$

La fonction P_Ω est alors une candidate naturelle de la densité de Poincaré de Ω. En effet, elle est exactement celle de Poincaré de B si $\Omega = B$. Encore, il y a bien une raison pour P_Ω être une candidate en termes de la courbure scalaire $K(x, P_\Omega)$ de la métrique $P_\Omega(x)\,ds$ en $x \in \Omega$. La fonction $u = P_\Omega^{(n-1)/2}$ satisfait, en effet, l'équation $\Delta u = n(n-2)u^{(n+2)/(n-2)}$ dans Ω. Donc, $K(x, P_\Omega)$ de $P_\Omega(x)\,ds = u(x)^{2/(n-2)}\,ds$ en chaque point $x \in \Omega$ est toujours -4; voir [LN, p. 247, Remark]. De plus, $P_\Omega(x)\,ds$ est complète en ce sens que toute courbe a sa longueur infinie si elle tend vers $\partial\Omega$. La métrique $P_\Omega(x)\,ds$ est essentiellement celle de [LN, p. 246, (7)]. Il est intéressant donc que

$$\delta_\Omega(x)P_\Omega(x) \to 1/2 \tag{7.2}$$

quand x tend vers chaque point de $\partial\Omega$, avec la constante absolue 1/2 indépandante de la dimension, car,

$$\delta_{\Omega_n}(n^{1/2}(1-2)^{1/2}x) = n^{1/2}(n-2)^{1/2}\delta_\Omega(x), \quad x \in \Omega.$$

Et encore, si Ω n'est pas borné, alors,

$$|x|^2 P_\Omega(x) \to n^{-1}(n-2)^{-1}c(\Omega_n)^{2/(n-2)} \tag{7.3}$$

quand $|x| \to +\infty$ dans Ω. En particulier, si Ω est borné, on a

$$0 < \inf_{x\in\Omega} \delta_\Omega(x)P_\Omega(x) \quad \text{et} \quad \sup_{x\in\Omega} \delta_\Omega(x)P_\Omega(x) < +\infty.$$

Retournons au cas $\Omega \subset \mathbf{C}$ pour un moment. Si Ω est simplement connexe, on a $A(\Omega) \geqq 1/4$ et, de plus, si Ω est convexe, on a $A(\Omega) \geqq 1/2$; voir la section 2. Il est intéressant de comparer ces faits avec (7.2). Il est connu que si $\partial\Omega$ de $\Omega \subset \mathbf{C}$ est bornée mais Ω n'est pas borné (donc ∞ est un point isolé de $\partial^*\Omega$ et, d'où Ω est du type infini) on a $2|z|(\log|z|)P_\Omega(z) \to 1$ quand $|z| \to +\infty$ dans Ω (voir la section 8). Donc, $|z|^2 P_\Omega(z) \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$ dans Ω. Dans ce sens (7.3) montre une différence entre les cas $n = 2$ et $n > 2$ pour $\mathbf{R}^n$.

Notons finalemant que H. Yamabe [Yb] a considéré l'équation du type analogue à (7.1) dans une variété riemannienne, de C^∞, mais compacte de dimension au moins 3.

8. Une allure de P_Ω.

Soit ∞ est un point isolé de $\partial^*\Omega$ de $\Omega \subset \mathbf{C}$. Pour démontrer:

$$\lim_{|z| \to +\infty, z \in \Omega} (2|z| \log |z|) P_\Omega(z) = 1, \tag{8.1}$$

nous tenons a, b de $\partial\Omega$, $a \neq b$, et nous considérons $T(z) = (b-a)/(z-a)$. En posant

$$\sigma = \{w; 0 < |w| < d\} \quad \text{et} \quad R = \mathbf{C}\backslash\{0, 1\},$$

où d est la distance de 0 et $\partial T(\Omega)\backslash\{0\}$, on a: $\sigma \subset T(\Omega) \subset R$, d'où

$$1/P_\sigma(w) \leqq 1/P_{T(\Omega)}(w) \leqq 1/P_R(w) \tag{8.2}$$

en chaque $w \in \sigma$. D'abord,

$$2|w| \log(d/|w|) = 1/P_\sigma(w), \quad w \in \sigma. \tag{8.3}$$

D'autre part, l'inégalité de J. A. Hempel [Hm, p. 443, (4.1)] se lit:

$$1/P_R(w) \leqq 2|w| (|\log |w|| + c_H), \quad w \in R, \tag{8.4}$$

où $c_H = \Gamma(1/4)^4/(4\pi^2) = 4.376\ldots$. En combinant (8.2), (8.3), et (8.4) avec l'identité:

$$1/P_\Omega(z) = |z-a|^2/\{|b-a| P_{T(\Omega)}(w)\}$$

pour $w = T(z)$, $z \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} 2|z-a| \log(d|z-a|/|b-a|) &\leqq 1/P_\Omega((z) \\ &\leqq 2|z-a| (|\log(|b-a|/|z-a|)| + c_H) \end{aligned}$$

en chaque point z de $T^{-1}(\sigma) = \{|z-a| > |b-a|/d\}$. En conséquence, pour tout $a \in \partial\Omega$ fixé, on en conclut que

$$\lim_{|z| \to +\infty, z \in \Omega} (2|z-a| \log |z-a|) P_\Omega(z) = 1.$$

Il est facile d'observer (8.1).

Je remercie Yoshihiro Ohnita et Hiroyasu Izeki pour des conversations intéressantes et Shoichiro Takakuwa qui m'a appris le mémoire [LN]. Encore je remercie Makoto Sakai qui m'a laissé voir une copie de [G1] dans son classeur à ma demande, et aussi, Björn Gustafsson qui m'a envoyé une copie de [G1] en répondant promptement à ma lettre de demande.

RÉFÉRENCES

[A1] L. V. Ahlfors, *An extension of Schwarz's lemma*, Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), 359–364.

[A2] L. V. Ahlfors, *Conformal Invariants. Topics in Geometric Function Theory*, McGraw-Hill, New York et 14 cités, 1973.

[B] C. Bandle, *Isoperimetric Inequalities and Applications*, Pitman, Boston-London-Melbourne, 1980.

[BP] A. F. Beardon et C. Pommerenke, *The Poincaré metric of plane domains*, J. London Math. Soc. 18 (1978), 475–483.

[CF] L. A. Caffarelli et A. Friedman, *Convexity of solutions of semilinear elliptic equations*, Duke Math. J. 52 (1985), 431–456.

[J] V. Jørgensen, *On an inequality for the hyperbolic measure and its applications in the theory of functions*, Math. Scand. 4 (1956), 113–124.

[G1] B. Gustafsson, *On the motion of a vortex in two-dimensional flow of an ideal fluid in simply and multiply connected domains*, Research Bulletin: TRITA-MAT-1979-7, Mathematics. Royal Institute of Technology, Stockholm (1979) (109 pp.).

[G2] B. Gustafsson, *On the convexity of a solution of Liouville's equation*, Duke Math. J. 60 (1990), 303–311.

[Hj] D. A. Hejhal, *Universal covering maps for variable regions*, Math. Z. 137 (1974), 7–20.

[Hm] J. A. Hempel, *The Poincaré metric on the twice punctured plane and the theorems of Landau and Schottky*, J. London Math. Soc. 20 (1979), 435–445.

[L] J. Liouville, *Sur l'équation aux dérivées partielles* $\partial^2 \log \lambda/\partial u \partial v \pm 2\lambda a^2 = 0$. J. Math. Pures Appl. 18 (1853), 71–72.

[LN] C. Loewner et L. Nirenberg, *Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations*, Un Mémoire en: "*Contributions to Analysis*", L. V. Ahlfors et al. éd. Academic Press, New York-London, 1974, pp. 245–272.

[P1] É. Picard, *De l'équation* $\Delta u = ke^u$ *sur une surface de Riemann fermée*, J. Math. Pures Appl. 9 (1893), 273–291.

[P2] É Picard, *De l'intégration de l'équation* $\Delta u = e^u$ *sur une surface de Riemann fermée*, J. Reine Angew. Math. 130 (1905), 243–258.

[R] S. Richardson, *Vortices, Liouville's equation and the Bergman kernel function*, Mathematika 27 (1980), 321–334.

[Yb] H. Yamabe, *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Math. J. 12 (1960), 21–37.

[Y1] S. Yamashita, *Univalent analytic functions and the Poincaré metric*, Kodai Math. J. 13 (1990), 164–175.

[Y2] S. Yamashita, *The derivative of a holomorphic function and estimates of the Poincaré density*, Kodai Math. J. 15 (1992), 102–121.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
UNIVERSITÉ MÉTROPOLITAINE DE TOKYO
MINAMI OSAWA, HACHIOJI, TOKYO 192-03
JAPON