MATH. SCAND. 76 (1995), 61–84

STRUCTURES LOCALEMENT PLATES DANS CERTAINES VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES

NGUIFFO B. BOYOM

Abstract.

It is a straightforward consequence of Darboux theorem that the symplectic geometry has no local invariant. In [8] P. Libermann initiated a few global symplectic invariants by attaching a unique torsion free linear connection ∇ to each pair (D, D') of everywhere transverse lagrangian sub-bundles of the tangent bundle. H. Hess gave a symplectic meaning to the curvature tensor of the $\nabla's$. Let G be a solvable Lie group. The aim of the present paper is to show that "generically" each G-homogeneous symplectic manifold (M, ω) has pairs (D, D') which give rise in M to locally flat structures in the sense of Koszul. The reader may consult Konstant [7], Sims Woodhouse [12] for interest of studying the stated problem.

§0. Introduction.

Soit (M, ω) une varieté symplectique de dimension 2m. Supposons que $(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ soit une paire de feuilletages lagrangiens transverses définis dans (M, ω); le quadruplet $(M, \omega, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ est appelé une structure bilagrangienne. Dans $[10]_a$ on a décrit une méthode de construction systématique des structures bilagrangienes dans certains espaces homogènes symplectiques.

Dans une variété symplectique (M, ω) à toute structure bilagrangienne $(M, \omega, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ correspond une unique connexion linéaire D qui a les propriétés suivantes: 1°) Le tenseur de torsion de D est nul: 2°) D préserve chacun des deux feuilletages $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$; 3°) La forme symplectiques ω est parallèle relativement à D. (voir [5], [6], $[10]_a$). Lorsque le tenseur de courbure de D est nul, le couple (M, D) est une structure localement plate adaptée à la structure symplectique (M, ω) au sens de [9]; on dira dans ce cas que la structure bilagrangienne $(M, \omega, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ est affine.

Ce travail est consacré pour l'essentiel à deux problèmes d'existence. Le premier problème est celui de l'existence de structures bilagrangiennes affines dans les variétés symplectiques. Le second est le problème de l'existence de "drapeaux symplectiques" dans une variété symplectique (M, ω).

Reçu le 10 décembre 1990.

Pour ce qui est du premier problème il est opportun de rappeler qu'étant donnée une structure bilagrangienne $(M, \omega, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$, un théorème de H. HESS ([16]) assure l'équivalence des deux assertions suivantes:
(a_1) le tenseur de courbure de la connection linéaire définie par $(M, \omega, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ est identiquement nul.
(a_2) Dans un voisinage de tout $x \in M$ existe des coordonnées locales $(q, p) = (q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m)$ telles que (i) $\omega = \sum_{k=1}^{m} dq_k \wedge dp_k$, (ii) le feuilletage $\mathscr{F}_1$ (resp. $\mathscr{F}_2$) est localement engendré par les champs de vecteurs hamiltoniens $X_{p_1}, \ldots, X_{p_m}$, (resp. $X_{q_1}, \ldots, X_{q_m}$).

Pour des raisons techniques on s'est limité dans ce travail à une classe particulière d'espaces homogènes symplectiques des groupes de Lie résolubles. En effet soient G un groupe de Lie et $F(G) = \{e\} \subset G_1 \subset \cdots G_k \subset \cdots G$ une suite de composition dans G; lorsque G est résoluble les structures des groupes quotients G_{k+1}/G_k sont particulièrement simples. Cette simplicité facilite l'utilisation des arguments de récurrence (sur les dimensions) dans des questions liées aux G-géométries. [e.g. voir le n° 3.2.5]. Cette classe de variétés symplectiques a été traitée dans $[10]_a$; un dévissage analogue à celui utilisé ibidem permet de donner une méthode systématique de construction des coordonnées qui satisfont à l'assertion (a_2) du théorème de HESS. A ma connaissance une telle méthode n'existe pas dans la littérature consacrée au sujet (voir e.g. [1], [5], [6], [8], [13], [14].

Les résultats quantitatifs obtenus sont rassemblés dans le théorème principal (voir §2 pour l'énoncé complet); on peut les résumer de la façon suivante: soit $(G/_H, \omega)$ un G-espace homogène symplectique avec G résoluble et H connexe; si la loi d'opération de G dans G/H est "régulière" et "fermée", alors (i) $(G/H, \omega)$ posséde une structure bilagrangienne affine, (ii) il existe dans $(G/H, \omega)$ un drapeau symplectique $\mathscr{D}_2 \subset \mathscr{D}_4 \subset \mathscr{D}_{2m-2}$ et une structure bilagrangienne affine $(G/H, \omega, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ tels que les traces de $(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ dans les feuilles de chaque distribution $\mathscr{D}_{2k}$ sont des paires de feuilletages lagrangiens. La suite du texte est organisée de la façon qui suit:

§0 Introduction
§1 Notation et définitions.
§2 Enoncé du théorème principal et commentaire.
§3 Résultats auxiliaires
§4 Démonstration du théorème principal.
§5 Exemples.

Sauf mention expresse du contraire les variétés différentiables considérées sont connexes et dénombrales à l'infini. Toutes les données seront différentiables de classe C^∞.

§1. Notations et quelques définitions.

1.1.0. *Variétés symplectiques.* Le lecteur non familiarisé avec les objets qui sont rappelés brièvement dans ce numéro pourra consulter une des références suivantes: [1], $[5]_b$, [12].

Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2m$; $C^\infty(M, \mathsf{R})$ (resp. $\mathscr{X}(M)$) désigne l'anneau des fonctions différantiables défines dans M et à valeurs réelles (resp. le $C^\infty(M, \mathsf{R})$-module des champs de vecteurs tangents à M). Généralement un feuilletage de M (vu comme sous-ensemble de l'ensemble $\mathscr{P}(M)$ des parties de M) sera noté $\mathscr{F}$, alors qu'une distribution (vue comme sous-fibré vectoriel du fibré tangent TM) sera notée $\mathscr{D}$. Soit $f \in C^\infty(M, \mathsf{R})$, on désigne par $X_f \in \mathscr{X}(M)$ le champ de vecteurs hamiltonien qui est associé à f et qui est défini par la relation $i_{x_f}\omega = -df$, où df est la différentielle extérieure de f.

Un feuilletage $\mathscr{F}$ défini dans la variété symplectique (M, ω) est dit lagrangien lorsque ses feuilles sont des sous-variétés lagrangiennes de (M, ω); cela signifie que si F est une feuille de $\mathscr{F}$ on a $\dim F = \frac{1}{2}\dim M$ et $i^*\omega = 0$ où i désigne le plongement inclusion de F dans M.

1.1.1 DÉFINITION ([6], $[10]_a$). Une structure bilagrangienne dans la variété symplectique (M, ω) consiste en un quadruplet $(M, \omega, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ où $(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ est une paire de feuilletages lagrangiens partout tranverses.

EXEMPLES ÉLÉMENTAIRES. 1) A $f \in C^\infty(\mathsf{R}^2, \mathsf{R}^{>0})$ associons la forme symplectique dans R^2 définie par $\omega(x, y) = f(x, y)dx \wedge dy$. Notons $\mathscr{F}_1$ (resp. $\mathscr{F}_2$) le feuilletage dont les feuilles sont les droites $y = c^{te}$ (resp. $x = c^{te}$). $(\mathsf{R}^2, \omega, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ est une structure bilagrangienne.

2) le tore T^2 muni de la structure symplectique canonique $d\theta_1 \wedge d\theta_2$ possède des structures bilagrangiennes invariante à gauche.

1.2.0. *Variétés localement plates.* Soit (M, D) un couple constitué de la variété différentiable M et d'une connexion linéaire dont la dérivation covariante est D. Notons R_D et T_D les tenseurs de courbure et de torsion de D: Pour X, Y et Z dans $\mathscr{X}(M)$ on a

$$R_D(X, Y)\cdot Z = (D_X D_Y - D_Y \cdot D_X - D_{[X,Y]})\cdot Z,$$

$$T_D(X, Y) = D_X \cdot Y - D_Y \cdot X - [X, Y].$$

Lorsque les tenseurs R_D et T_D sont identiquement nuls on dit que (M, D) définit dans M une structure de variété localement plate.

Une variété localement plate (M, D) possède dans sa structure différentiable un atlas $\mathscr{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}\}$ formé des cartes locales $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ dont les changements $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ coïncident avec les transformations affines de l'espace numérique modèle. Les cartes locales $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathscr{A}$ sont appelées les cartes affines de (M, D), elles sont caractérisées par la condition $D_X\left(\frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right) = 0$ quel qu soit $X \in \mathscr{X}(M)$, (x_i^α) étant le système des coordonnées locales de la carte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$.

EXEMPLES. 1. Les feuilles de tout feuilletage lagrangien sont des variétés localement plates ([13]; [14]).

2. Tout groupe de Lie qui possède une structure localement plate invariante à gauche complete est resoluble, [9], $[10]_b$.

3. Tout groupe de Lie muni d'une structure symplectique invariante à gauche possède une structure localement plate invariante à gauche. [2]).

Soit $T^{p,q}(M)$ le fibré $\left(\overset{p}{\otimes} TM\right) \otimes \left(\overset{q}{\otimes} T^*M\right)$ où TM (resp. T^*M) est le fibré tangent (resp. cotangent) de M. Pour $X \in \mathscr{X}(M)$, D_X se prolonge en une dérivation de l'algèbre (tensorielle) des sections de $\underset{p,q}{\oplus} T^{p,q}(M)$; ce prolongement sera noté encore D_X.

Un tenseur τ est parallèle relativement à D si $D_X\tau = 0$ pour tout $X \in \mathscr{X}(M)$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées locales affines de (M, D). Etant donnés $I = (i_1, \ldots, i_p) \in \mathsf{N}^p$ et $J = (j_1, \ldots, j_q) \in \mathsf{N}^q$ avec $1 \leqq i_k, j_l \leqq n$, on posera $\frac{\partial}{\partial x^I} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{i_p}}$ et $dx^J = dx_{j_1} \otimes \ldots \otimes dx_{j_q}$. Un élément τ de $T^{p,q}(M)$ s'exprime dans les coordonnées (x_i) par

$$\tau = \sum_{I,J} \tau_{IJ} \frac{\partial}{\partial x^I} \otimes dx^J.$$

On a alors $D_X\tau = 0$ pour tout $X \in \mathscr{X}(M)$ si et seulement si les τ_{IJ} sont des constantes.

1.2.1. DÉFINITION. *Une variété symplectique affine* est un triplet (M, ω, D) où 1°) (M, ω) et (MD) sont respectivement des structures de variété symplectique et de variété localement plate; 2°) $D_X\omega = 0$ pour tout $X \in \mathscr{X}(M)$.

Nous allons associer à toute structure de variété symplectique (M, ω) l'application R-bilinéaire D_0 de $\mathscr{X}(M)$ dans lui-même définie par la formule suivante

$$i_{D_0(X,Y)}\omega = L_X i_Y \omega. \tag{1}$$

où L_X est la dérivation de Lie dans la direction X. Cette application a les deux propriétés remarquables qui suivent: (a) D_0 stabilise tout feuilletage lagrangien $\mathscr{F}$ de (M, ω), i.e. si X et Y sont tangents à $\mathscr{F}$ en tout $x \in M$ il en est de même de $D_0(X, Y)$. (b) l'application $X \to D_0(X,\text{-})$ de $\mathscr{X}(M)$ dans $\mathrm{End}_{\mathsf{R}}(\mathscr{X}(M))$ détermine une structure localement plate dans chaque feuille de tout feuilletage lagrangien. Ces deus propriétés de D_0 jouent un rôle important dans la suite.

1.3.0. *Structures bilagrangiennes affines.* Soit $(M, \omega, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ une structure bilagrangienne. Notons $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ les distributions qui définissent les feuilletages $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ respectivement. Puisque $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont transverses en tout point $x \in M$ on a $TM = \mathscr{D}_1 \oplus \mathscr{D}_2$. Notons ψ_i: $TM \to \mathscr{D}_i$, $i = 1, 2$ les projecteurs associés à la décomposition ci-dessus. En vertu des deux propriétés de l'application D_0 (définie par la formule (1)) signalées ci-dessus on a $D_0(\mathscr{D}_i, \mathscr{D}_i) \subset \mathscr{D}_i$, $i = 1, 2$. Notons D^i la restriction à $\mathscr{D}$ de D_0. Si F est une feuille de $\mathscr{F}_i$, (F, D^i) est une variété localement plate. Etant donné $X \in \mathscr{X}(M)$ soit $X_i = \psi_i(X) \in \mathscr{D}_i$. En posant $x = (x_1, x_2) \in \mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2$ on définit l'application R-bilinéaire D de $\mathscr{X}(M)$ dans lui-même en posant

$$(2) \quad D_{(X_1, X_2)}(Y_1, Y_2) = (D_0(X_1, Y_1) + \psi_1[X_2, Y_1], D_0(X_2, Y_2) + \psi_2[X_1, Y_2]).$$

L'application D ainsi définie est l'unique connexion linéaire sans torsion qui préserve les feuilletages $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ et vérifie $D\omega = 0$, (voir [6], [8], $[10]_a$.

1.3.1. Définition. Une structure bilagrangienne $(M, \omega, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ est dite affine lorsque la connexion linéaire D qui lui est associée suivant la formule (2) détermine une structure localement plate dans M.

Exemples. 1. Dans le tore réel T^{2k} toute structure bilagrangienne invariante à gauche est affine

2. Soit $(\mathrm{R}^2, \omega, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ avec $\omega(x, y) = f(x, y)\,dx \wedge dy$, les feuilles de $\mathscr{F}_1$ (resp. de $\mathscr{F}_2$) étant les droites $y = c^{te}$ (resp $x = c^{te}$); si $\dfrac{\partial^2 \operatorname{Log} f}{\partial x \partial y} \neq 0$ la connexion linéaire D associé à $(\mathrm{R}^2, \omega, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ a un tenseur de courbonne non nul. En vertu du théorème de HESS cette structure bilagrangienne n'est pas affine.

1.4.0. *Drapeaux symplectiques.* Un feuilletage $\mathscr{F}$ de (M, ω) est feuilletage symplectique lorsque ses feuilles sont des sous-variétés symplectiques de (M, ω). Soit $\mathscr{D}$ la distribution qui définit le feuilletage symplectique $\mathscr{F}$, alors la restriction à $\mathscr{D} \times \mathscr{D}$ de la forme symplextique ω est non dégénérée.

1.4.1. Définition. Un drapeau symplectique dans (M, ω) consiste en la donnée de $\frac{1}{2}\dim M - 1$ feuilletages symplectiques $\mathscr{F}_k$, $1 \leqq k \leqq \frac{1}{2}\dim M - 1$ astreints à des conditions d'inclusion suivantes $\mathscr{F}_k \subset \mathscr{F}_{k+1}$, et $\dim \mathscr{F}_k = 2k$.

Les drapeaux symplectiques quand ils existent permettent des procédures de "réductions" qui facilitent l'utilisation des arguments de récurrence [voir par exemple le théorème 3.5.2].

§2. Énoncé du théorème principal.

2.1.0. L'essentiel du paragraph 4 sera consacré à la démonstration du théorème principal que nous enonçons dans ce §2. On se restreint à une classe de variétés symplectique qui admettent des groupes de Lie résolubles comme groupe de symétrie, i.e. l'action d'un tel groupe est symplectique et transitive. On associe à une telle situation $\varnothing$: $G \times M \to M$ une suite de triplets $(G_k, H_k, \tilde{\omega}_k)$ dont la construction est rappelée au §3; on fait les hypothèses suivantes: 1°) le sous-groupe stabilisateur d'un point $x_0 \in M$ est connexe; 2°) les 2-formes $\tilde{\omega}_k$ (resp. les sous-groupes $G_k \subset G$) sont "régulières" (resp. sont fermés dans G) (voir §3 les définitions). Moyennant ces hypothèses on a le théorème principal suivant:

2.1.1. THÉORÈME. *Soit (M, ω) une variété symplectique. On suppose qu'un groupe de Lie résoluble G opère symplectiquement et transitivement dans (M, ω) de sorte que pour un $x_0 \in M$ (donc pour tout $x \in M$) le sous-groupe stabilisateur G_{x_0} de x_0 est connexe; si cette loi $G \times M \to M$ est "régulière" et "fermée", alors (M, ω) possède une structure bilagrangienne affine $(M, \omega, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ et un drapeau symplectique (défini par les distributions $\mathscr{D}_k$) qui sont compatibles dans le sens suivant: la trace de la paire $(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ dans chaque feuille de $\mathscr{D}_k$ définit ibidem une structure bilagrangienne affine.*

COMMENTAIRE. A propos du théorème 2.1.1 on peut faire les remarques suivantes.

1°) Les résultats énoncés sont quantitatives; en particulier on ne s'est pas intéressé à la complétude de la structure affine (M, D) associée à la structure bilagrangienne affine $(M, \omega, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$. Le lecteur intéressé par le problème général de complétude est renvoyé au travail récent de Y. CARRIERE sur la conjecture de MARKUS, [3].

2°) Considérons dans R^2 une structure bilagrangienne $(\mathsf{R}^2, f(x,y)dx \wedge dy, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$, $(\mathsf{R}^2, f(x,y)dx \wedge dy, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$, les feuilles de $\mathscr{F}_1)$ étant les droites $y = c^{te}$ (resp $x = c^{te}$), $f > 0$. On a signalé que si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq 0$ alors $(\mathsf{R}^2, f(x,y)dx \wedge dy, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ n'est pas affine. Cependant on peut substituer à $\mathscr{F}_1$ un autre feuilletage lagrangien $\mathscr{F}_1'$ de sorte que $(\mathsf{R}^2, f(x,y)dy, \mathscr{F}_1', \mathscr{F}_2)$ soit affine, il suffit pour cela d'observer qu'il existe un difféomorphisme de R^2 dont le jacobien est la fonction $f(x,y)$; un tel difféomorphisme φ est obtenu en posant $\varphi(x,y) = (x, Y(x,y))$ avec

$$Y(x,y) = \int_{-\infty}^{y} f(x,v)dv.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\omega(x,y) &= f(x,y)dx \wedge dy \\ &= dx \wedge dY.\end{aligned}$$

On désigne par $\mathscr{F}'$ le feuilletage de R^2 par les courbes de niveau de la fonction $Y(x,y)$, la structure $(\mathsf{R}^2, \omega, \mathscr{F}_2')$ est affine.

3°) On observe que la manipulation faite sur l'exemple $(\mathsf{R}^2, \omega, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ ci-dessus pour obtenir une structure bilagrangienne ne fonctionne pas dans $(M, \omega, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ si M est compacte et simplement connexe, parcequ'une telle variété ne peut pas admettre une structure localement plate.

Les ingrédients qui interviendront dans la démonstration du théorème 2.1.1 sont rassemblés dans le paragraphe 3 suivant.

§3. Quelques résultats auxiliaires.

3.1.0 UN THÉORÈME DE H. HESS ([6]). *Soit* $(M, \omega, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ *une structure bilagrangienne et soit D la connexion linéaire qui lui est associée suivant la formule* (2); *les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a$_1$) (M, D) *est une structure localement plate.*

(a$_2$) *Dans un voisinage de tout* $x \in M$, *il existe un système de coordonnées canoniques* $(q, p) = (q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m)$ *telles que les champs de vecteurs hamiltoniens locaux* $X_{p_1}, \ldots, X_{p_m}$ (*resp.* $X_{q_1}, \ldots, X_{q_m}$) *engendrent localement le feuilletage* $\mathscr{F}_1$ (*resp* $\mathscr{F}_2$).

Signalons sans tarder un corollaire utile du théorème ci-dessus.

3.1.1. COROLLAIRE. *Tout système de coordonnées locales qui vérifient la condition* (a$_2$) *du théorème de HESS est affine pour* (M, D).

DÉMONSTRATION. Soit $(q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m)$ un système de coordonnées locales qui satisfont à l'assertion (a$_2$) du théorème 3.1.0. On a donc: d'une part $\omega = \sum_{k=1}^{m} d_{q_k} \wedge d_{p_k}$ et d'autre part les champs de vecteurs hamiltoniens $X_{q_i} = -\dfrac{\partial}{\partial p_i}$ $\left(\text{resp. } X_{p_i} = \dfrac{\partial}{\partial q_i}\right)$ engendrent le feuilletage $\mathscr{F}_1$ (resp. $\mathscr{F}_2$). Du fait que D préserve les feuilletages $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ on déduit que les relations $D_{x_{p_i}} X_{q_j} = D_{x_{q_j}} X_{p_i} = 0$. D'un autre côté le parallèlisme $D\omega = 0$ entraine que pour tout triplet (i, j, k) d'éléments de $\{l, \ldots, m\}$ on a

$$\omega(D_{x_{p_i}} X_{p_j}, X_{q_k}) = \omega(D_{x_{p_i}} X_{q_k}, X_{p_j}) = 0.$$

Il en résulte que pour tout $X \in \mathscr{X}(M)$ on a $D_x X_{p_i} = D_x X_{q_i} = 0$ pour $i = 1, \ldots, m$, d'où le corollaire 3.1.1.

Le corollaire ci-dessus suggère une analogie entre le cadre d'application du théorème de HESS et la situation étudiée par J. ROELS et A. WEINSTEIN dans [11]. En fait notons $\mathscr{A}$ la "sous-algèbre" du faisceau structural $\mathscr{O}(M)$ définie par les propriétés suivantes:

(i) $\mathscr{A}$ est localement engendrée par les germes des intégrales premières respectives des feuilletages lagrangiens $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$.

(ii) Si f et g sont des représentants d'éléments de $\mathscr{A}$ avec $\operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(g) \neq \varnothing$ alors leur crochet de Poisson $\{f,g\} = \omega(X_f, X_g\}$ coïncide avec le germe de fonction constante.

On observe que $\mathscr{A}$ est localement de type fini avec $\operatorname{rang}(\mathscr{A}) \leqq \dim M$. Le théorème de HESS assure donc qu'étant donnée une structure bilagrangienne $(M, \omega, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ le tenseur de courbure de la connection linéaire associée est nul si et seulement si $\operatorname{rang}(\mathscr{A}) = 2m$.

3.2.0. *Suites associées aux lois opération symplectique des groupes de Lie résolubles.* On rappelle dans ce numéro certains résultats obtenus antérieurement ($[10]_a$) qui seront utiles à la démonstration du théorème principal. Pour la suite nous fixons les notations suivantes: Un groupe de Lie sera désigné par une lettre (romaine) majuscule, son algèbre de Lie sera désignée par la (même) lettre gothique minuscule. Ces notations étant fixées, un résultat de ceux dont l'utilisation sera fréquente est le lemme suivant.

3.2.1. LEMME. *Soit G un groupe de Lie résoluble et soit M un G-espace homogène. Il existe dans G un sous-groupe normal connexe fermé G_0 qui satisfait aux conditions suivantes:*

(a) *M est un G_0-espace homogène.*

(b) *G_0 possède un sous-groupe de Lie normal connexe G_1 de codimension* 1 *qui contient la composante neutre du sous-groupe stabilisateur G_0x de tout $x \in M$.*

On renvoie à $[10]_a$ pour la démonstration de ce lemme. On observe que le sous-groupe de Lie G_1 de la propriété (b) du Lemme 3.2.1 n'a pas de raison d'être fermé. Etant donné un groupe de Lie résoluble G le lemme 3.2.1 permet d'associer à tout G-espace homogène symplectique (M, ω) un suite de triplets $(G_k, H_k, \tilde{\omega}_k)$, $0 \leqq k \leqq \frac{1}{2}\dim M - 1$ qui est en fait la pièce maîtresse de la méthode systématique de résolution des problèmes qui sont l'objet de ce travail. Nous rassemblons sous la forme de proposition les caractéristiques de ces données.

3.2.2. PROPOSITION. *Soient G un groupe de Lie résoluble et (M, ω) un G-espace homogène symplectique. Il existe une suite de triplets $(G_k, H_k, \tilde{\omega}_k)$ avec $0 \leqq k \leqq \frac{1}{2}\dim M - 1$, qui satisfait aux conditions suivantes:*

(i) *$(G_k)_k$ est une suite décroissante de sous-groupes de Lie connexes du groupe G. Pour chaque k, $\tilde{\omega}_k$ est une 2-forme fermée invariante à gauche dans G_k, G_{k+1} est distingué dans G_k si $\dim G_{k+1} = \dim G_k - 1$; $\tilde{\omega}_{k+1} = i^*\tilde{\omega}_k$, $i\colon G_{k+1} \to G_k$ étant l'homomorphisme inclusion.*

(ii) *H_k est le sous-groupe de Lie connexe de G_k associé à la sous-algèbre de Lie $h_k = \ker \tilde{\omega}_k$; on a $\operatorname{rang} \tilde{\omega}_k = m - k$ où $2m = \dim M$.*

(iii) *La composante connexe neutre de $H_k \cap G_{k+1}$ est un sous-groupe distingué de codimension* 1 *de H_{k+1} dès que $\dim G_{k+1} = \dim G_k - 1$.*

(iv) *Sauf pour au plus une valeur de k on a $\dim G_{k+1} = \dim G_k - 1$.*

ESQUISSE DE DÉMONSTRATION. La suite (G_k, H_k, ω_k) a été utilisée dans $[10]_a$ pour une construction explicite des structures bilagrangiennes dans certains espaces homogènes; la construction des $(G_k, H_k, \tilde{\omega}_k)$ résulte du Lemme 3.2.1. Soient $x_0 \in M$ et H_0 la composante connexe neutre du sous-groupe stabilisateur G_{x_0}. Soit π la projection orbitale $\gamma \to \gamma \cdot x_0$ de G sur M et soit $\tilde{\omega}_0 = \pi^*\omega$. On pose maintenant $(G_0, H_0, \tilde{\omega}_0) = (G, H_0, \tilde{\omega}_0)$. Maintenant quitte à remplacer le groupe G par un sous-groupe normal qui jouit des propriétès (a) et (b) du Lemme 3.2.1 on peut supposer que G possède un sous-groupe de Lie normal connexe G_1 de codimension 1 qui contient H_0.

La restriction à G_1 de $\tilde{\omega}_0$ est notée $\tilde{\omega}_1$; c'est une 2-forme fermée invariante à gauche dans G_1. On désigne par H_1 le sous-groupe de Lie connexe de G_1 qui est associé à la sous-algèbre de Lie $\ker \tilde{\omega}_1$. On observe que $\operatorname{rang} \tilde{\omega}_1 = \operatorname{rang} \tilde{\omega}_0 - 1$. Le deuxième terme $(G_1, H_1, \tilde{\omega})$ est ainsi obtenu; il satisfait aux conditions (i) à (iv). On se place au niveau $(G_1, H_1, \tilde{\omega}_1)$ et on applique de façon identique le lemme 3.2.1 pour construire $(G_2, H_2, \tilde{\omega}_2)$. En itérant ce procédé on obtient la suite $(G_k, H_k, \tilde{\omega}_k)$. Cette suite satisfait de façon évidente aux conditions (i) et (ii). Pour voir que (iii) et (iv) sont aussi vérifiées il suffit de faire l'observation suivante. Soit $k_0 \geqq 0$ le niveau où pour la premiére fois C_{k_0} ne possède pas de sous-groupe normal connexe de codimension 1 contenant H_{k_0} (autrement dit, il existe un sous-groupe de Lie $\mathscr{G}_{k_0} \subseteqq G_{k_0}$ qui jouit des propriétés (a) et (b) du Lemme 3.2.1 pour $G_{k_0/H_{k_0}}$). On vérifie sans peine que le sous-groupe des commutateurs $\mathscr{D}G_{k_0}$ oppère transitivement dans $G_{k_0/H_{k_0}}$ voir $[10]_a$ Lemme 1.1), on considère alors la restriction à $\mathscr{D}G_{k_0}$ de $\tilde{\omega}_{k_0}$, il existe alors dans $\mathscr{D}G_{k_0}$ un sous-groupe de Lie connexe G_{k_0+1} qui contient le sous-groupe connexe de G_{k_0} associé à la sous-algèbre de Lie $\ker \tilde{\omega}_{k_0|_{\mathscr{D}G_0}}$; on désigne par $\tilde{\omega}_{k_0+1}$ la restriction à G_{k_0+1} de $\tilde{\omega}_{k_0}$. Le sous-groupe de Lie connexe H_{k_0+1} associé à la sous-algèbre de Lie $\ker \tilde{\omega}_{k_0+1}$ complète G_{k_0+1} et $\tilde{\omega}_{k_0+1}$ pour déterminer le triplet $(G_{k_0+1}, H_{k_0+1}, \tilde{\omega}_{k_0+1})$. Puisque G_{k_0+1} est nilpotent, les triplets $(G_{k_0+l}, H_{k_0+l}, \tilde{\omega}_{k_0+l})$, $l > 0$, vérifient les propriétés (i) à (iv).

3.2.3. REMARQUES. 1°) Etant donnée la façon dont les sous-groupes G_k sont choisis, rien n'assure qu'ils soient des sous-groupes topologiques du groupe G.

2°) Parmi les sous-groupes H_k, le seul dont on est sûr qu'il soit fermé est le sous-groupe H_0. Ces sous-groupes de Lie (i.e. les G_k *et les* H_k) sont automatiquement fermés seulement dans des circonstances particulières. Il en est ainsi lorsque G est simplement connexe; il en résulte que les possibilités de choisir les G_k fermés d'une part et d'avoir, suite à ces choix, les H_k fermés d'autre part, sont une propriété particuilière de la loi d'opération de G dans (M, ω). Ces observation motivent les définitions de loi d'opération fermèes ou régulières.

3°) Enfin il découle de l'esquisse de la démonstration de la proposition 3.2.2 qu'à tout niveau k il existe un sous-groupe de Lie $\mathscr{G}_{k+1}$ de G qui jouit des propriétés suivantes: (i) $\mathscr{G}_{k+1}$ est de codimension 1 dans G_k; (ii) $G_{k+1} \subseteq \mathscr{G}_{k+1}$. (iii) $\mathscr{G}_{k+1}$ est normal dans G_k et $H_k \subset \mathscr{G}_{k+1}$.

3.2.4. DÉFINITION. Soient G un groupe de Lie résoluble et (M, ω) un G-espace homogène symplectique; la loi d'opération de G dans (M, ω) est dite *fermée* (resp, *régulière*) si on peut choisir la suite $(G_k)_k$ de sorte que les sous-groupes G_k soient fermés dans G (resp. de sorte que H_k soit fermé dans G_k, $k = 1, \ldots$).

Une loi d'opération fermée peut ne pas être régulière et réciproquement. Lorsque la loi d'opération de G dans (M, ω) est régulière alors chaque 2-forme $\tilde{\omega}_k$ *est regulière* au sens de [2]; elle se projette donc en une 2-forme symplectique ω_k dans le G_k-espace homogène $M_k = G_k/H_k$. Une 2-forme fermée invariante à gauche dans un groupe de Lie n'est pas nécessairement régulière au sens qui est rappelé ci-dessus.

EXEMPLES. 1. Si G est un groupe de Lie (quelconque) connexe et simplement connexe toute 2-forme fermée invariante à gauche dans G est régulière [2].

2. La 2-forme fermée définie dans le tore réel $\mathbb{T}^3$ par la 2-forme $\omega = dx \wedge dy - dx \wedge dz + \sqrt{2} dy \wedge dz$ n'est pas régulière.

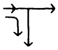
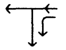
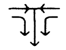
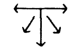
3.2.5. *Niveaux singuliers des 2-formes fermées.* On reprend sous une forme plus générale les considérations précédentes. Soient G un groupe de Lie complètement réel d'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ (i.e. pour tout $X \in \mathfrak{G}$ les valeurs propres de ad X sont réelles) et ω une 2-forme différentielle fermée dans G et invariante par les translations à gauche. Soient $F(G) = \{e\} \subset G_1 \subset \ldots \subset G_k \subset \ldots G$ une suite de composition dans G et i_k l'homomorphisme inclusion de G_k dans G. La suite $F(G)$ donne lieu dans $\mathfrak{G}$ à la suite $f(\mathfrak{G}) = (0) \subset \mathfrak{G}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{G}_k \subset \ldots \mathfrak{G}$ où pour chaque k $\mathfrak{G}_k$ est la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{G}$ associée au sous-groupe de Lie G_k. On note $\omega_k = i_k^* \omega$; la 2-forme ω est regardée comme élément de $\Lambda^2 \mathfrak{G}^*$. Le noyau $\mathfrak{H}_{(k)}$ de la 2-forme ω_k est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{G}_k$.

A chaque indice k correspond le sous-groupe de Lie connexe $H_{(k)} \subset G_k$ qui est associé à la sous-algébere de Lie $\mathfrak{H}_{(k)}$ de $\mathfrak{G}_k$.

Les inclsions $\mathfrak{H}_{(k)} \to \mathfrak{G}_k$ (resp. $H_{(k)} \to G_k$) sont appelées les *niveaux* de $(\mathfrak{G}, \omega)$ (resp. les *niveaux* de (G, ω)). Au k-ième niveau $\mathfrak{H}_{(k)} \to \mathfrak{G}_k$ on a forcément un des quatre diagrammes comutatifs d'homomorphismes d'algèbres de Lie du tableau ci-dessous dans lequel les flèches sont des inclusions

$$\begin{array}{ccccc} \left[\quad \mathfrak{H}_{(k-1)} \quad\right] & \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xleftarrow{2} \\ \xrightarrow{3} \\ \xleftarrow{4} \end{array} & \left[\quad \mathfrak{H}_{(4)} \quad\right] & \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xleftarrow{2} \\ \xleftarrow{3} \\ \xrightarrow{4} \end{array} & \left[\quad \mathfrak{H}_{(k+1)} \quad\right] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{G}_{k-1} & \to & \mathfrak{G}_k & \to & \mathfrak{G}_{k+1}. \end{array}$$

Dans le système des coordonnées planes (dim $H_{(k)}$, dim G_k), les diagrammes du tableau ci-dessus donnent lieu respectivement aux modèles suivants au niveau $\mathfrak{H}_{(k)} \to \mathfrak{G}_k$

(1)  ; (2)  ; (3)  ; (4) 

Les modèles (1) et (2) sont appelés *niveaux réguliers* tandis que les modèles (3) et (4) sont appelés respectivement ***niveau singulier négatif*** et ***niveau singulier positif.***

Les types de niveau des 2-formes fermées décrits ci-dessus interviennent dans des questions qui ne sont pas traitées dans ce travail mais qui le prolongent naturellement. Je vais en citer trois. A) Etude des degrés de symétrie des variétés symplectiques (M, ω) qui sont homogènes sous des actions des groupes de Lie résolubles. B) Problème d'existence des structures affines invariantes par l'action des groupes résolubles. C) Géométrie des quotients compacts $\Gamma\backslash G$ (G est résoluble, Γ est discret dans G) qui possèdent des metriques Kahlériennes.

On sait que les nil-variétés $\Gamma\backslash G$ qui possèdent des métriques de Kähler sont difféomorphes (mais non nécessairement isométriques) à des tores plats. [Voir par example C. Benson et C. Gordon: Topology 27 (1988) 513–518].

3.3.0. *Une utilisation de la suite* $(G_k, H_k, \tilde{\omega}_k)$. Les notations du numéro 3.2 sont conservées; soit G un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{G}$; soit $\xi \in \mathfrak{G}$, on désigne encore par ξ le champ de vectreurs invariant à droite qui coincide avec ξ en l'élément neutre de G. Si G opère dans la variété différentiable M le champ de vecteurs induit par l'action du sous-groupe à un paramètre expt ξ sera noté $\bar{\xi}$. Supposons que G soit résoluble et que (M, ω) soit un G-espace homogène symplectique. Fixons une suite $(G_k, H_k, \tilde{\omega}_k)$ associée à la 2-forme relevée invariante à gauche $\tilde{\omega}$. Nous savons que pour chaque indice k, il existe un sous-groupe de Lie $\mathscr{G}_{k+1}$ tel que $G_{k+1} \subseteq \mathscr{G}_{k+1} \subseteq G_k$, $\dim G_k = \dim \mathscr{G}_{k+1} + 1$, (voir remarque 3.2.3, 3°)) et $\mathscr{G}_{k+1}$ est distingué dans G_k. Désignons par M_k et $\mathscr{M}_{k+1}$ respectivement les espaces topologiques G_k/H_k et $\mathscr{G}_{k+1}/H_k$. En vertu de la proposition 3.2.2 $\mathscr{M}_{k+1}$ est un $(H_{k+1}/H_k \cap G_{k+1})$-fibré principal (topologique) de base $M_{k+1} = G_{k+1}/H_{k+1}$. Lorsque la loi d'opération de G dans (M, ω) est régulière (i.e. lorsque H_k est fermé dans les G_k pour chaque k) les espaces topologiques ci-dessus sont des variétés C^∞. En particulier $\mathscr{M}_{k+1}$ est une hypersurface dans M_k; on désigne par π la projection de $\mathscr{M}_{k+1}$ sur M_{k+1}. On obtient ainsi le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{k+1} & \xrightarrow{i} & M_k \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \\ M_{k+1}, & & \end{array} \tag{3}$$

les formes symplectiques ω_k et ω_{k+1} sont connectées par la relation

$$i^*\omega_k = \pi^*\omega_{k+1}. \tag{4}$$

Cette relation entre les variétés symplectiques (M_k, ω_k) et (M_{k+1}, ω_{k+1}) est l'une des pièces de la construction des structures bilagrangiennes et de drapeaux symplectiques compatibles au sens du théorèome principal. La méthode systématiques utilisée dans ce travail repose sur l'utilisation du diagramme (3) et de l'égalité (4) ci-dessus pour construire dans la variété symplectique (M_k, ω_k) des "objets géométriques" à partir des objets analogues définis dans la variété symplectique (M_{k+1}, ω_{k+1}). Pour illustrer cette idée on va rappeler comment cette méthode a permis dans $[10]_a$ de montrer l'existence des feuillerages lagrangiens dans certaies variétés stmplectiques. Un dévissage analogue sera utilisé dans ce travail. Pour plus de clarté nous allons rappeler sous la forme ci-dessous le passage de (M_{k+1}, ω_{k+1}) à (M_k, ω_k).

3.3.1. THÉORÈME. *Soient* (M_k, ω_k) *et* (M_{k+1}, ω_{k+1}) *et* $\mathscr{M}_{k+1}$ *comme ci-dessus. Nous faisons l'hypothése que le sous-groupe* $\mathscr{G}_{k+1}$ *(voir remarque* 3.2.1.–3°)) *est fermé dans* G_k. *Supposons qu'il existe dans* (M_{k+1}, ω_{k+1}) *une structure bilagrangienne* $(M_{k+1}, \omega_{k+1}, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$. *Alors on peut construire dans* (M_k, ω_k) *une structure bilagrangienne* $(M_k, \omega_k, \mathscr{F}'_1, \mathscr{F}'_2)$ *qui satisfait aux conditions suivantes:*

(i) *La paire* $(\mathscr{F}'_1, \mathscr{F}'_2)$ *induit dans l'hypersurface* $\mathscr{M}_{k+1} \subset M_k$ *une paire de feuilletages* π*-projetables dont l'image dans* M_{k+1} *coincide avec* $(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$.

(ii) *Le feuilletage lagrangien* $\mathscr{F}'_i$ *est subordonné au feuilletage de* M_k *par les hypersurfaces* $\gamma\mathscr{G}_{k+1}/H_k$, $\gamma \in G_k$.

Nous donnerons plus loin l'esquisse, de la démonstration de ce théorème (qui est en fait un résumé des résultats $[10]_a$).

3.4.0. *Résultats auxiliaires.* Nous allons utiliser le diagramme (3) et l'égalité (4) pour mettre en évidence trois lemmes techniques. Pour cela nous nous plaçons au niveau k d'une suite $(G_k, H_k, \tilde{\omega}_k)$ et nous faisons les hypothèses suivantes:

(a) G_k contient un sous-groupe distingué fermé $\mathscr{G}_{k+1}$ qui vérifie la condition 3°) de la remarque 3.2.3 ci-dessus.

(b) les sous-groupes H_k et H_{k+1} sont fermés dans G_k et G_{k+1} respectivement.

Soient h_k, $\mathscr{A}_{k+1}$ et $\mathfrak{G}_k$ les algèbre de Lie de H_k, $\mathscr{G}_{k+1}$ et G_k respectivement; notons b_{k+1} le noyau de la restriction à $\mathscr{A}_{k+1}$ de $\tilde{\omega}_k$. Il est clair que h_k est de codimension 1 dans b_{k+1}.

Nous fixons $(\xi, \zeta) \in \mathfrak{G}_k \times b_{k+1}$ tel que l'on ait les décompositions suivantes

$$\mathfrak{G}_k = \mathscr{A}_{k+1} \oplus \mathbb{R} \cdot \xi \quad \text{et} \quad b_{k+1} = h_k \oplus \mathbb{R}\zeta. \tag{5}$$

Une conséquence immédiate des choix ci-dessus est que G_k est produit semi-direct du sous-groupe à un paramètre $\Gamma = \{\exp t\zeta, t \in \mathbb{R}\}$ par le sous-groupe normal $\mathscr{G}_{k+1}$. Notons $x_0 \in M_k$ l'image de H_k par la projection canonique de G_k sur $M_k = G_k/H_k$; le point x_0 est dans l'hypersurface $\mathscr{M}_{k+1} = \mathscr{G}_{k+1}/H_k$. Notons $\tilde{\xi}$ et

$\tilde{\zeta}$ les champs de vecteurs localement hamiltoniens dans M_k associés aux éléments ξ et ζ de $\mathfrak{G}_k$.

Nous savons que le feuilletage de G_k par les classes à droite $\gamma\mathscr{G}_{k+1}$ se projette suivant un feuilletage G_k-invariant dans M_k et dont $\mathscr{M}_{k+1}$ est la feuille qui passe par x_0. Suite à la décomposition de G_k en produit semi-direct $\mathscr{G}_{k+1} \times \Gamma$ le sous-groupe Γ permute simplement transitivement les feuilles du feuilletage $\{\gamma\mathscr{G}_{k+1}/H_k, \gamma \in G_k\}$.

Si on pose $\mathscr{M}_\gamma = \gamma(\mathscr{M}_{k+1})$, $\gamma \in \Gamma$ on a

$$M_k = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathscr{M}_\gamma \quad \text{avec} \quad \mathscr{M}_\gamma \cap \mathscr{M}_{\gamma'} = \varnothing \quad \text{si} \quad \gamma \neq \gamma' \tag{6}$$

Pour terminer avec ces généralités on observe que $\pi_*(\tilde{\zeta}(x_0)) = 0$ où π est la fibration de $\mathscr{M}_{k+1}$ sur M_{k+1} décrite par le diagramme (3).

Le premier de nos lemmes auxiliaires est le suivant.

3.4.1. LEMME. *La sous-algèbre de Lie h_k est un idéal de b_{k+1}.*

PREUVE. Soient $B \in b_{k+1}$, $X \in h_k$ et $Y \in \mathfrak{G}_k$; on a

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_k([B, X], Y) &= \tilde{\omega}_k([B, Y], X) + \tilde{\omega}_k(B, [X, Y]) \\ &= \tilde{\omega}_k(B, [X, Y]).\end{aligned}$$

Puisque $\mathscr{A}_{k+1}$ est un idéal de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}_k$ et que $B \in b_{k+1}$ on a $\tilde{\omega}_k(B, [X, Y]) = 0$ d'où le lemme 3.4.1.

Nous allons associer à l'élément ζ un autre champ de vecteurs localement hamiltonien défini dans M_k en posant

$$\hat{\zeta}(x) = \gamma_*(\tilde{\zeta}(x_0)) \tag{7}$$

où γ est un élément de G_k tel que $x = \gamma(x_0)$. Puisque le sous-groupe stabilisateur de x_0 dans G_k est H_k, soit $\gamma_0 \in H_k$. En vertu du Lemme 3.4.1 ci-dessus on a $(\mathrm{Ad}(\gamma_0)\zeta \cdot \zeta) \in h_k$, il en résultee que $\gamma_0 * (\tilde{\zeta}(x_0)) = \tilde{\zeta}(x_0)$; cela prouve que l'application (7) est bien définie. Que le champ de vecteur $\hat{\zeta}$ soit localement hamiltonien est immédiat. En effet pour tout $\gamma \in G_k$ on a

$$\gamma^*(di_{\hat{\zeta}}\omega_k) = d(\gamma^* i_{\hat{\zeta}}\omega_k) = d(i_{\hat{\zeta}}\omega_k) = 0.$$

Les notation ci-dessus sont conservées et $i \colon \mathscr{M}_{k+1} \to M_k$ est l'inclusion.

3.4.2. LEMME. *Les champs de vecteurs localement hamiltoniens $\tilde{\xi}$ et $\hat{\zeta}$ sont ceux définis ci-dessus; on a $i_{\hat{\zeta}} i^* \omega_k = 0$ et $L_{\hat{\zeta}} i^* i_{\tilde{\xi}} \omega_k = 0$.*

PREUVE. Soit $x = \gamma(x_0) \in \mathscr{M}_{k+1}$, $\gamma \in \mathscr{G}_{k+1}$; pour tout $v \in T_x\mathscr{M}_{k+1}$ en vertu de l'égalité (4) on a

$$
\begin{aligned}
i^*\omega_k(\zeta(x), v) &= \pi^*\omega_{k+1}(\xi(x), v)\\
&= \omega_{k+1}(\pi_*\zeta(x), \pi_* v)\\
&= \omega_{k+1}(\pi_*\gamma_*\tilde{\zeta}(x_0), \pi_* v), \quad \gamma \in \mathscr{G}_{k+1}.
\end{aligned}
$$

Puisque la projection $\pi: \mathscr{M}_{k+1} \to M_{k+1}$ est compatible avec les actions de $\mathscr{G}_{k+1}$ dans $\mathscr{M}_{k+1}$ et dans M_{k+1} on a

$$\omega_{k+1}(\pi_*\gamma_*\tilde{\zeta}(x_0), \pi_* v) = \omega_l(\gamma_*\pi_*\tilde{\zeta}(x_0), \pi_* v) = 0.$$

Cela montre la première égalité du Lemme 3.4.2.

Pour ce qui est de la seconde égalité, remarquons que l'on a

$$L_{\hat{\zeta}} i_{\tilde{\xi}} i^*\omega_k = i_{\tilde{\xi}} L_{\hat{\zeta}} i^*\omega_k - i_{[\hat{\zeta}, \tilde{\xi}]}\omega_k.$$

Ce qui, compte tenu de la première égalité et du fait que le crochet $[\hat{\zeta}, \tilde{\xi}]$ est (globalement) hamiltonien ([1]), donne

$$L_{\hat{\zeta}} i_{\tilde{\xi}} i^*\omega_k = i^* d\omega_k(\tilde{\xi}, \hat{\zeta}).$$

Soit $X \in \mathscr{X}(\mathscr{M}_{k+1})$; soit $(\zeta_i)_i$ une base de la sous-algèbre de Lie $\mathscr{A}_{k+1}$. On a $X = \sum_i f_i \tilde{\zeta}_i$, où les $\tilde{\zeta}_i$ sont les champs de vecteurs localement hamiltoniens associés aux ζ_i et $f_i \in C^\infty(M_k, \mathbb{R})$. Le champ de vecteurs $\hat{\zeta}$ étant localement hamiltonien $i_{\hat{\zeta}}\omega_k$ est fermée; on a donc $X\omega_k(\tilde{\xi}, \hat{\zeta}) = \tilde{\xi}\omega(X, \hat{\zeta}) - \omega_k([\tilde{\xi}, X], \hat{\zeta})$. Il faut observer que $\hat{\zeta}$ est partout tangent au feuilletage G_k-invariant de M_k par les $\mathscr{M}_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, pour déduire que $\tilde{\xi}\omega^k(X, \hat{\zeta}) = 0$. Ainsi on a

$$X\omega_k(\tilde{\xi}, \hat{\zeta}) = \sum_i (f_i\omega_k(\hat{\zeta}, [\tilde{\xi}, \tilde{\zeta}_i]) + (\tilde{\xi} f_i)\omega_k(\hat{\zeta}, \tilde{\zeta}_i)).$$

Puisque $\mathscr{A}_{k+1}$ est un idéal de $\mathscr{G}_k$, le champ $\hat{\zeta}$ étant ω_k orthogonal aux sous-variétés $\mathscr{M}_i$ on a $X\omega_k(\tilde{\xi}, \hat{\zeta} = 0$ pour tout $X \in \mathscr{X}(\mathscr{M}_{k+1})$. Cela achève la démonstration du Lemme 3.4.2.

Le troisième Lemme dont on aura besoin est le suivant.

3.4.3. Lemme. *Le champ de vecteur* $\dfrac{1}{\omega_k(\tilde{\xi}, \hat{\zeta})}\hat{\zeta}$ *est localement hamiltonien.*

Preuve. Il est clair que pour X et Y dans $\mathscr{X}(M_k)$ la fonction $\omega_k(\tilde{\xi}, \hat{\zeta})$ est sans zero. Puisque $\hat{\zeta}$ est localement hamiltonien nous avons

$$\left(L_{\frac{1}{\omega_k(\tilde{\xi}, \hat{\zeta})}\hat{\zeta}}\omega_k\right)(X, Y) = \frac{1}{(\omega_k(\tilde{\xi}, \hat{\zeta}))^2}[Y\omega_k(\tilde{\xi}, \hat{\zeta})\cdot\omega(\hat{\zeta}, X) - X\omega_k(\tilde{\xi}, \hat{\zeta})\cdot\omega_k(\hat{\zeta}, Y)].$$

Compte tenu des observations faites au cours de la preuve du Lemme 3.4.2, si X et Y sont tangents au feuilletage de M_k par les hypersurfaces $\mathscr{M}_i$ alors le second membre de l'égalité ci-dessus est nul. Puisque tout $X \in \mathscr{X}(\mathscr{M}_k)$ se décompose de manière unique sous la forme

$$X = f\tilde{\xi} + X_0$$

avec $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ et X_0 tangent au feuilletage de M_k par les $\mathscr{M}_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$ on voit que $\left(L_{\frac{1}{\omega_k(\tilde{\xi},\hat{\zeta})}\zeta}\omega_k\right)(X, Y) = 0$ quels que soient $X \in \mathscr{X}(M_k)$ et $Y \in \mathscr{X}(M_k)$. Le lemme 3.4.3 est démontré.

Nous sommes maintenant en mesure de donner l'esquisse de preuve d'un émoncé antérieur.

3.5.0. *Esquisse de la démonstration du théorème* 3.3.1 *et conséquences.*

3.5.1.Reprenons la formule (4) $\pi^*\omega_{k+1} = i^*\omega_k$ et le diagramme (3) suivant

$$\begin{array}{l} \mathscr{M}_{k+1} \xrightarrow{i} M_k \\ \pi\downarrow \\ M_{k+1} \end{array}$$

Nous supposons qu'il existe dans (M_{k+1}, ω_{k+1}) une structure bilagrangienne $(M_{k+1}, \omega_{k+1}, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$. Nous voulons construire dans (M_k, ω_k) une structure bilagrangienne $(M_k, \omega_k, \mathscr{F}'_1, \mathscr{F}'_2)$ telle que la trace de $(\mathscr{F}'_1, \mathscr{F}'_2)$ dans $\mathscr{M}_{k+1}$ se projette sur $(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$.

Les champs de vecteurs $\tilde{\zeta}$ et ξ sont ceux qui figurent dans les lemmes 3.4.2 et lemme 3.4.3; de même, on munit M_k du feuilletage par les hypersurfaces $\mathscr{M}_\gamma = \gamma(\mathscr{M}_{k+1})$, $\gamma \in \Gamma$.

Soit $\theta = i^* i_\xi \omega_k$; nous savons que le champ de vecteurs ζ est tangent aux fibres de la fibration $\pi\colon \mathscr{M}_{k+1} \to M_{k+1}$. En vertu du Lemme 3.4.2 le noyau de θ est invariant par les flots locaux du champ de vecteurs ζ; posons $\mathscr{D}(x) = \ker \theta(x)$ pour $x \in \mathscr{M}_{k+1}$. Puisque θ est fermé, le système différentiel $x \to \mathscr{D}(x)$ est complètement intégrable et en vertu de la formule (4) chaque feuille de $\mathscr{D}$ est revêtement symplectique de (M_{k+1}, ω_{k+1}). Pour construire les feuilletages lagrangiens $\mathscr{F}'_1$ et $\mathscr{F}'_2$ on procède en les deux étapes (voir [10]$_a$) suivantes.

Première étape. La fibration $\pi\colon \mathscr{M}_{k+1} \to M_{k+1}$ induit en $x \in \mathscr{M}_{k+1}$ un isomorphisme de $\mathscr{D}(x)$ sur $T_{\pi(x)}\mathscr{M}_{k+1}$. On définit dans $\mathscr{M}_{k+1}$ le feuilletage $\tilde{\mathscr{F}}_1 = \pi^{-1}(\mathscr{F}_1)$. Les feuilles de $\tilde{\mathscr{F}}_1$ sont des sous-variétés lagrangiennes de (M_k, ω_k).

Puisque $M_k = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\mathscr{M}_{k+1})$ on munit M_k du feuilletage lagrangien $\mathscr{F}'_1$ dont la feuille contenant $y = \gamma(x) \in \gamma(\mathscr{M}_{k+1})$ est $\gamma F_1(x)$ où $F_1(x)$ est la feuille de $\tilde{\mathscr{F}}_1$ contenant $x \in \mathscr{M}_{k+1}$.

Seconde étape. Soit $\tilde{\mathscr{D}}_1$ la distribution qui définit $\tilde{\mathscr{F}}_1$. Posons $\mathscr{D}_1 = \tilde{\mathscr{D}}_1 \cap \mathscr{D}$; la distribution $\mathscr{D}_1$ est invariante par les flots locaux de $\tilde{\xi}$. Puisque chaque π_{*_x} induit un isomorphisme de $\mathscr{D}(x)$ sur $T_{\pi(x)}M_{k+1}$, il existe dans $T\mathscr{M}_{k+1}$ une distribution $\mathscr{D}_2$ telle que: (i) les feuilles de $\mathscr{D}_2$ sont des revêtements des feuilles de $\mathscr{F}_2$; (ii) $\mathscr{D} = \mathscr{D}_1 \oplus \mathscr{D}_2$. Pour déterminer on munit M_k du feuilletage $\mathscr{F}'_2$ dont la feuille passant par $y = \gamma(x) \in \gamma(\mathscr{M}_{k+1})$, $\gamma \in \Gamma$, est l'image de $\Gamma \times F_2(x)$ par le plongement $(\gamma, x') \to \gamma(x)$ où $F_2(x)$ est la feuille de $\mathscr{D}_2$ passant par $x \in \mathscr{M}_{k+1}$; le feuilletage de M_k ainsi obtenu est lagrangien. Conclusions: les feuilletages lagrangiens $\mathscr{F}'_1$ et $\mathscr{F}'_2$ vérifient les conditions requises dans le théorème 3.3.1.

Muni des lemme 3.4.2, lemme 3.4.3 et du théorème 3.3.1 nous sommes en mesure d'établir le résultat suivant.

3.5.2. Théorème (de relèvement). *On considère les variétés symplectiques* (M_k, ω_k) *et* (M_{k+1}, ω_{k+1}) *liées à la variété* $\mathscr{M}_{k+1}$ *comme dans le diagramme* (3)

$$\begin{array}{l} \mathscr{M}_{k+1} \xrightarrow{i} M_k \\ \downarrow \pi \\ M_{k+1} \end{array}$$

et la formule (4)

$$i^*\omega_k = \pi^*\omega_{k+1}$$

Soient $(M_k, \omega_k, \mathscr{F}'_1, \mathscr{F}'_2)$ *et* $(M_{k+1}, \omega_{k+1}, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ *deux structures bilagrangiennes qui jouissent des propriétés* (i) *et* (ii) *du théorème* 3.3.1. *Si* $(M_{k+1}, \omega_{k+1}, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ *est affine alors* $(M_k, \omega_k, \mathscr{F}'_1, \mathscr{F}'_2)$ *est affine.*

Démonstration. Il suffit de montrer que dans un voisinage de tout point $x \in M_k$ il existe des coordonnées locales (q, p) qui vérifient l'assertion (a_2) du théorème de HESS.

Les champs des vecteurs $\tilde{\xi}$ et ξ sont ceux dont il est question dans les lemme 3.4.2 et lemme 3.4.3. Soit $x \in M_k$ et soit $\gamma \in \Gamma$ tel que $x \in \gamma(\mathscr{M}_{k+1})$. Soit U un voisinage ouvert de x dans M_x tel que $\pi \circ \gamma^{-1}(U \cap M_\gamma)$ soit contenu dans un domaine de coordonnées canoniques $(\bar{q}, \bar{p}) = (\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)$ qui satisfont aux conditions du théorème de HESS pour la structure bilagrangienne $(M_{k+1}, \omega_{k+1}, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$, autrement dit on a:

(i) $\omega_{k+1}(X_{\bar{q}_i}, X_{\bar{q}_j}) = \omega_{k+1}(X_{\bar{p}_i}, X_{\bar{p}_j}) = 0.$

(ii) $\omega_{k+1}(X_{\bar{q}_i}, X_{\bar{p}_j}) = \delta_{ij}.$

(iii) Les feuilletage $\mathscr{F}_1$ (resp. $\mathscr{F}_2$) est localement engendré par les champs hamiltoniens $X_{\bar{p}_i}$ (resp. $X_{\bar{q}_i}$), $i = 1, \dots, n$.

On observe qu'en vertu de la relation $L_\xi i_\xi \omega = 0$ la distribution définie par $\ker i_\xi \omega_k$ est invariante par $\Gamma = \{\operatorname{expt} \xi, t \in \mathbb{R}\}$. Pour $x \in \mathscr{M}_{k+1}$ on sait que la feuille de $\ker i_\xi \omega_k \cap T\mathscr{M}_{k+1}$ qui contient x est revêtement symplectique de M_{k+1}. Au moyen de π_*: $T\mathcal{M}_{k+1} \to TM_{k+1}$ on identifie les champs de vecteurs locaux $X_{\bar{q}_i}$ et $X_{\bar{p}_i}$ avec des sections locales X_i et Y_i de la distribution ker $i^*i_\xi\omega_k$. Les champs Y_i (resp. X_i) sont tangent à $\mathscr{F}_1$ (resp. $\mathscr{F}_2$). Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel tel que

$$\gamma^{-1}(U) = \bigcup_{|t|<\varepsilon} \exp t\xi(\gamma^{-1}(U) \cap \mathcal{M}_{k+1}).$$

On prolonge alors les champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ en des champs locaux définits dans $U_0 = \gamma^{-1}(U)$ en posant:

$$X_i(\exp t\xi(x')) = (\exp t\xi)_* X_i(x'),$$

$$Y_i(\exp t\xi(x')) = (\exp t\xi)_* Y_i(x')$$

pour tout $x' \in U_0 \cap \mathcal{M}_{k+1}$. Les champs de vecteurs ainsi obtenus sont localement hamiltoniens et vérifient les relations suivantes

$$\omega_k(X_i, X_j) = \omega_k(Y_i, Y_j) = 0,$$

$$\omega_k(X_i, Y_j) = \delta_{ij}.$$

Considérons les champs de vecteurs $\tilde{\xi}$ et $\hat{\zeta}$ du Lemme 3.4.2. En vertu de nos choix ces champs sont liés aux X_i et aux Y_i par le conditions suivantes

$$\begin{aligned} \omega_k(Y_i, \hat{\zeta}) = \omega_k(X_i, \tilde{\xi}) = 0 \\ \omega_k(Y_i, \tilde{\xi}) = \omega_k(X_i, \hat{\zeta}) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Posons $Y_0 = \dfrac{1}{\omega_k(\tilde{\xi}, \hat{\zeta})}\hat{\zeta}$ et $X_0 = \tilde{\xi}$. En vertu du Lemme 3.4.3 et de (8) les champs localement hamiltoniens (locaux) $X_0, X_1, \ldots, X_n, Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ jouissent des propriétés suivantes:

(iv) Les champs de vecteurs $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ (resp. $X_0, X_1, \ldots, X_n$) engendrent le feuilletage lagrangien $\mathscr{F}'_1$ (resp. $\mathscr{F}'_2$).

(v) $$\omega_k(X_i, X_j) = \omega_k(Y_i, Y_j) = 0$$

(vi) $$\omega_k(X_i, Y_j) = \delta_{ij}.$$

On en déduit qu'il existe dans un voisinage de $x \in U$ des fonctions différentiables réelles $q_0, q_1, \ldots, q_n, p_0, p_1, \ldots, p_n$ telles que

(vii) $$x_{p_i} = Y_i, X_{q_i} = X_i, 0 \leqq i \leqq n;$$

(viii) $$\omega_k = \sum_{i=0}^{n} dq_i \wedge dp_i,$$

(ix) $$i^*q_i = \pi^*\bar{q}_i, i^*p_i = \pi^*\bar{p}_i \quad 1 \leqq i \leqq n, 2n = \dim M_k,$$

où i: $\mathcal{M}_{k+1} \to M_k$ est l'application inclusion.

Puisque $\mathscr{F}'_1$ (resp. $\mathscr{F}'_2$) est localement engendré par les Y_i (resp. X_i) les conditions (vii) à (ix) sont celles de l'assertion (a_2) du théorème de HESS. Le tenseur de courbure de la connexion linéaire associée à $(M_k, \omega_k, \mathscr{F}'_2, \mathscr{F}'_2)$ suivant la formule (2) est donc nul. Cela achève la preuve du théorème 3.5.2.

Tous les ingrédients de la démonstration du théorème 2.1.1 sont en place. Il s'agit pour l'essentiel du théorème 3.3.1 et du théorème 3.5.2 qui permettent de démontrer le théorème 2.1.1 par récurrence sur la dimension de la variété symplectique.

Nous allons en finir avec ce paragraphe 3 en signalant une ultime conséquence du théorème 3.3.1. En fait, au cours de la démonstrations de ce théorème 3.3.1 nous avons mis en évidence dans (M_k, ω_k) un feuilletage symplectique dont la trace dans $\mathscr{M}_{k+1}$ est définie par la distribution $\mathscr{D} = \mathscr{D}_1 \oplus \mathscr{D}_2$ (voir 3.6.1 seconde étape). Plus précisément, désignons par $\mathscr{M}$ le feuilletage de M_k dont la feuille contenant x est l'hypersurface $\mathscr{M}_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, et $\mathscr{F}$ le feuilletage de M_k déterminé par la distribution $\ker i_\xi \omega_k$: les composantes connexes de $\mathscr{M} \cap \mathscr{F}$ sont les feuilles d'un feuilleage symplectique de codimension 2. On conserve toutes les hypothèses du théorème 3.3.1; il en résulte la conséquence suivante:

3.5.3. COROLLAIRE (du théorème 3.3.1). *Soient* (M_k, ω_k) *et* $(M_{k+1}, \omega_{k+1}, F_1, \mathscr{F}_2)$ *comme dans le théorème* 3.3.1. *On suppose qu'il existe dans* (M_{k+1}, ω_{k+1}) *un drapeau symplectique déterminé par la suite de distribution* $\mathscr{D}_1^\circ \subset \mathscr{D}_2^\circ \subset \ldots$ *et compatible avec la structure bilagrangienne* $(M_{k+1}, \omega_{k+1}, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$. *Alors* (i) *il existe dans* (M_k, ω_k) *un drapeau symplectique* $\mathscr{D}_1'^\circ, \mathscr{D}_2'^\circ \ldots$ *qui est compatible avec la structure bilagrangienne* $(M_k, \omega_k, \mathscr{F}'_1, \mathscr{F}'_2)$ *déterminée par le théorème* 3.3.1.

(ii) *Si* $(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ *induit des structures bilagrangiennes affines dans les feuilles de chaque* $\mathscr{D}_i^\circ$, *alors la paire* $(\mathscr{F}'_1, \mathscr{F}'_2)$ (*voir* 3.5.1) *induit des structures bilagrangiennes affines dans les feuilles de chaque* $\mathscr{D}_i'^\circ$.

DÉMONSTRATION. Rappelons que la drapeau symplectique $\mathscr{D}_1^\circ \subset \ldots \mathscr{D}_l^\circ$ est dit compatible avec la structure bilagrangienne $(M_{k+1}, \omega_{k+1}, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_1)$ lorsque pour chaque feuilles F_l° de $\mathscr{D}_l^\circ$ la paire $(\mathscr{F}_1 \cap F_l^\circ, \mathscr{F}_2 \cap F_l^\circ)$ définit dans F_l°une structure bilagrangienne.

Ce rappel étant fait, on observe que nous avons construit dans (M_k, ω_k) un feuilletage symplectique de codimension 2 (i.e. $\mathscr{M} \cap \mathscr{F}$) dont les feuilles contenues dans $\mathscr{M}_{k+1}$ sont des revêtements symplectiques de (M_{k+1}, ω_{k+1}). En filtrant la distribution associée à $\mathscr{M} \cap \mathscr{F}$ par le drapeau symplectique déduit de $\mathscr{D}_1^\circ \subset \ldots \subset \mathscr{D}_l^\circ$ par la méthode utilisée en 3.5.1 pour la construction de $(\mathscr{F}'_1, \mathscr{F}'_2)$ on obtient le drapeau $\mathscr{D}_0'^\circ \subset \ldots \subset \mathscr{D}_l'^\circ \ldots$, cela prouve l'assertion (i). L'assertion (ii) est une conséquence immédiate du théorème 3.5.2.

§4. Démonstration du théprème 2.1.1 (Théorème principal) et commentaire.

4.1.0. Soit (M, ω) une variété symplectique. On suppose que C est un groupe de Lie résoluble qui opère symplectiquement et transitivement dans M. On suppose en outre que pour $x \in M$ le sous-groupe stabilisateur de x est connexe.

La loi d'opération de G dans (M, ω) est régulière et fermée au sens de la définition 3.2.4. On fixe une suite de triplets $(G_k, H_k, \tilde{\omega}_k)$ qui satisfait aux conditions (i) à (iv) de la proposition 3.2.2. En vertu de ces hypothèses faites on choisit les sous-groupes de Lie G_k et H_k fermés dans G pour $1 \leqq k \leqq \frac{1}{2}\dim M - 1$. La démonstration du théorème 2.1.1 se fait par récurrence sur $\dim M$.

4.1.1. (a) Supposons que $\dim M = 2$. Le lemme 3.2.1 assure que quitte à remplacer G par un sous-groupe normal fermé, on peut supposer qu'il existe dans G un sous-groupe normal fermé G_1 de codimension 1 et contenant les sous-groupes stabilisateurs. On choisit dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ de G un élément ξ tel que

$$G = G_1 \times \{\exp t\xi \,/\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Le feuillage de G par les classes a droite γG_1 se projette en un feuilletage lagrangien $\mathscr{F}_1$ dans M. On observe que pour chaque $x \in M$ l'orbite $\Gamma(x)$ de x sous l'action du sous-groupe $\Gamma = \{\exp t\xi, t \in \mathbb{R}\}$ est transverse aux feuilles de $\mathscr{F}_1$. On obtient ainsi un second feuilletage lagrangien $\mathscr{F}_2$ dont les feuilles sont les $\Gamma(x)$.

La paire $(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ détermine une structure bilagrangienne dans $(\mathscr{M}, \omega)$. Il reste à montrer que $(M, \omega, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ est affine. Pour cela on fixe un point de base $x_0 \in M$. Soit H le sous-groupe stabilisateur de x_0. On choisit dans l'algèbre de Lie $\mathscr{G}_1$ de G_1 un élément ζ tel que $\mathscr{G}_1 = h \oplus \mathbb{R}\zeta$ où h est l'aijgèbre de Lie de H. En vertu du Lemme 3.4.3 le champ de vecteurs $\frac{1}{\omega(\tilde{\xi}, \tilde{\zeta})}\tilde{\zeta}$ est localement hamiltonien $\tilde{\zeta}$ étant défini par (7). $\mathscr{F}_1$ (resp. $\mathscr{F}_2$) est engendré par $\tilde{\zeta}$ (resp. $\tilde{\xi}$). On rappelle que pour f et g dans $C^\infty(M, \mathbb{R})$ le crochet de Poisson de f et de g est défini par $\{f, g\} = X_f \cdot g = \omega(X_f, X_g)$. On a done $[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$ et $i_{[X_f, X_g]}\omega = d\{f, g\}$. Puisque $\frac{1}{\omega(\tilde{\xi}, \tilde{\zeta})}\tilde{\zeta}$ et $\tilde{\xi}$ sont des champs de vecteurs localement hamiltoniens on a

$$\left[\frac{1}{\omega(\tilde{\xi}, \tilde{\zeta})}\tilde{\zeta}, \tilde{\xi}\right] = 0. \tag{9}$$

On déduit de (9) que dans un voisinage de tout $x \in M$ il existe deux fonctions différentiables q et p telles que $X_q = \tilde{\xi}$ et $X_p = \frac{1}{\omega(\tilde{\xi}, \tilde{\zeta})}\tilde{\zeta}$. En vertu du théorème de HESS, la structure $(M, \omega, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ est affine. (b) Nous supposons que le théorème 2.1.1 est vrai pour les espaces homogènes symplectiques de dimensions $\leqq 2n$. Soit

(M, ω) un espace homogène symplectique de dimension $2m + 2$. Nous fixons une suite $(\mathrm{G}_k, \mathrm{H}_k, \tilde{\omega}_k)$ et on considère $(G_1, H_1, \tilde{\omega}_1)$; G_1 est un sous-groupe de Lie fermé dans G; la variété symplectique (M_1, ω_1) avec $M_1 = G_1/H_1$ est de dimension $2m$. En vertu de 3°) de Remarque 3.2.3. il existe un sous-groupe normal fermé $\mathscr{G}$ de codimension 1 dans G avec entre autres $G_1 \subseteq \mathscr{G} \subset G$. Posons $\mathscr{M}_1 = \mathscr{G}/H_0$ on a l'analogue du dagramme (3)

$$\begin{array}{l} \mathscr{M}_1 \xrightarrow{i} M \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow \\ M_1 \end{array}$$

En vertu de l'hypothèse de récurrence, le G_1-esspace homogène symplectique (M_1, ω_1) possssède une structure bilagrangienne affine $(M_1, \omega_1, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$. Le théorème 3.3.1 et le théorème 3.5.2 assurent l'existence de structure bilagrangienne affine dans (M, ω).

4.1.2. Il nous reste à montrer l'existence d'une structure bilagrangienne et d'un drapeau symplectique qui sont compatibles.

Reprenons la suite $(G_k, H_k, \tilde{\omega}_k)$ telle que les sous-groupes G_k et H_k soient fermes dans G pour caque k.

(c) On commence par munir chaque G_k-espace homogène symplectique (M_k, ω_k) de la structure bilagrangienne affine héritée de celle (M_{k+1}, ω_{k+1}) au moyen de théorème 3.3.1 et du théorème 3.5.2 et suivant l'escalier suivant

$$\begin{array}{lll} & \mathscr{M}_k \to \dots & \\ & \downarrow & \\ \mathscr{M}_{k+1} \to M_k & & \\ \downarrow & & \\ M_{k+1} & & \end{array} \tag{10}$$

Si $2m = \dim M$, on a $\dim M_k = 2(m - k)$ et $\dim \mathscr{M}_k = 2(m - k) + 1$. Nous avons vu que dans M_k il existe un feuilletage symplectique de codimension 2 $(\mathscr{M} \cap \mathscr{F})$ dont les feuilles contenues dans $\mathscr{M}_{k+1}$ sont des revêtements symplectiques de (M_{k+1}, ω_{k+1}). En appliquant le corollaire 3.5.3 autant de fois qu'il est nécessaire, on voit aisément qu'il existe dans (M, ω) un drapeau symplectique et une structure bilagrangienne affine compatibles. Cela termine la démonstration du théorème 2.1.1.

4.2.0. Commentaire. Le choix des lois d'opération régulières, fermées et à isotropie connexe est imposé par la mode de dévissage utilisée pour optimiser l'utilisation du diagramme (3) et de l'égalité (4). En fait, la formule (4) établit un lien entre les formes symplectiques de deux variétés l'une de dimension $2n$, *l'autre de dimension* $2n + 2$; cette formule jointe au diagramme (3) permet de "procéder par récurrence" sur la dimension des variétés symplectiques. La fécondité de ce dévissage est qu'il fournit un algorithme de construction explicite.

4.3.0. *Cas général des espaces homogènes symplectiques des groupes de Lie résolubles.* Examinons ce qui advient des résultats mis en évidence dans les paragraphes 1, 2 et 3 lorsqu'on abandonne une partie des hypothèses de 2.1.1. D'après des observations faites, les revêtements universels des espaces homogènes symplectiques des groupes de Lie résolubles possèdent des structures bilagrangiennes affines et des drapeaux symplectiques qui sont compatibles.

Soient G un groupe de Lie résoluble et (M, ω) un G-espace homogène symplectique. On peut toujours associer à l'action de G dans (M, ω) une suite $(G_k, H_k, \tilde{\omega}_k)$. Les résultats du paragraphe 2 reposent sur les trois hypothèses suivantes:

(i) Le sous-groupe stabilisateur de $x \in M$ est connexe;

(ii) Chaque forme $\tilde{\omega}_k$ est régulière, i.e. H_k est fermé dans G_k; (iii) Chaque sous-groupe G_k est fermé dans G.

4.3.1. Si on conserve seulement l'hypothèses (i) les conclusions du théorème 2.1.1 sont vraies dans une sous-variété ouverte dense

En effet. Supposons seulement que $(M, \omega) = (G/H, \omega)$ avec H connexe. Parmi les sous-groupes normaux G_1 de codimension 1 dans G et tels que $H \subset G_1$ on n'est pas assuré d'en avoir un qui soit fermé. Puisque G_1 n'est pas facteur semi-direct, les feuilletages $\mathscr{F}'_1$ et $\mathscr{F}'_2$ qu'on construit dans (M_k, ω_k) (voir théorème 3.3.1) à partir de $(M_{k+1}, \omega_{k+1}, \mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$ n'est bien défini que dans une sous-variété dense de M_k.

4.3.2. Si on omet l'hypothèse de connexité des sous-groupes d'isotropie on peut toujours subtituer à G soit son revêtement universel $\tilde{G}$, soit une extension centrale $\mathbb{R} \times G = G^{\#}$ définie par $\tilde{\omega} = \pi^* \omega$, [7]. Dans chacune de ces deux situations l'action de $\tilde{G}$ (resp. de $\mathbb{R} \times G$) dans (M, ω) vérifie les hypothèses (ii) et (iii) ci-dessus. On est sûr qu'il existe un sous-groupe normal fermé de codimension 1 dans G qui contient les sous-groupes stabilisateurs.

§5. Quelques exemples.

5.1.0. Les exemples que l'on va décrire sont les orbites de la représentation coadjointe du groupe de Lie G constitué des matrices carrées réelles de la forme suivante

$$\gamma = \begin{bmatrix} a & x & y \\ 0 & a^2 & z \\ 0 & 0 & a^3 \end{bmatrix}$$

où $a > 0$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. L'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ du groupe G est constituée des matrices de la forme

$$X = \begin{bmatrix} \alpha & \lambda & \mu \\ 0 & 2\alpha & \nu \\ 0 & 0 & 3\alpha \end{bmatrix}$$

avec $(\alpha, \lambda, \mu, \nu)$ dans $\mathbb{R}^4$. Désignons par (e_i) la base de $\mathscr{G}$ correspondant aux coordonnées $(\alpha, \lambda, \mu, \nu)$ et (ε_i) la base duale de (e_i).

Soit $\theta = \sum_{i=1}^{4} \theta_i \varepsilon_i$ un élémet de $\mathscr{G}^*$ et soit $\gamma = \gamma(a, x, y, z)$ un élément de G, on a

$$(11) \qquad (\mathrm{Ad}_\gamma^{-1})(\theta) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \dfrac{x}{a^2}\theta_2 + \left(\dfrac{2y}{a^3} - \dfrac{xz}{a^5}\right)\theta_3 + \dfrac{z}{a^3}\theta_4 \\ \dfrac{1}{a}\theta_2 - \dfrac{z}{a^4}\theta_3 \\ \dfrac{1}{a_2}\theta_3 \\ \dfrac{x}{a^3} + \dfrac{1}{a}\theta_4 \end{bmatrix}$$

5.1.1. Si $\theta_3 \neq 0$, (11) montre que G opère simplement transitivement dans l'orbite $\mathrm{Ad}(G)(\theta)$; sinon le sous-groupe stabilisateur de $\theta = (\theta_1, \theta_2, 0, \theta_4)$ est défini par les deux équations suivantes

$$a = 1$$
$$x\theta_2 + z\theta_4 = 0$$

si $(\theta_2, \theta_4) \neq (0, 0)$. Pour chaque $\theta \in \mathfrak{G}^*$ le sous-groupe stabilisateur de θ est connexe; $\mathrm{Ad}^*(G)(\theta)$ est une surface symplectique.

5.1.2. Notons Λ le tenseur de Lie-Poisson de $\mathfrak{G}^*$ ([1], $[5]_b$). Au point $\theta = \sum \theta_i \varepsilon_i$ on peut représenter $\Lambda(\theta)$ par la matrice carrée

$$\Lambda(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & \theta_2 & 2\theta_3 & \theta_4 \\ -\theta_2 & 0 & 0 & -\theta_3 \\ -2\theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta_4 & \theta_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice $\Lambda(\theta)$ n'est pas autre chose que la matrice de la forme bilinéaire alternée $d\theta$ écrite dans la base (e_i). Soit $\theta \in \mathfrak{G}^*$ avec $\theta_3 \neq 0$; on identifie au moyen de l'application orbitale les espaces vectoriels $\mathfrak{G}$ et $T_\theta \mathrm{Ad}^*(G)(\theta)$; $\Lambda(\theta)$ induit dans $\mathrm{Ad}^*(G)(\theta)$ une 2-forme symplectique ω qui est invariante par G et dont la matrice ω_θ dans la base (e_i) de $\mathfrak{G} \simeq T_0 \mathrm{Ad}^*(G)(\theta)$ est la matrice inverse de $\Lambda(\theta)$ c'est-à-dire

$$(12) \qquad \omega_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{1}{2\theta_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\theta_4}{2\theta_3^2} & \dfrac{1}{\theta_3} \\ \dfrac{1}{2\theta_3} & \dfrac{\theta_4}{2\theta_3^2} & 0 & -\dfrac{\theta_2}{2\theta_3^2} \\ 0 & -\dfrac{1}{\theta_3} & \dfrac{\theta_2}{2\theta_3^2} & 0 \end{bmatrix}$$

Soit H le sous-groupe de G constitué des matrices

$$\gamma = \begin{bmatrix} a & x & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 \end{bmatrix}$$

Le feuilletage de G par les classes à droite γH est lagrangien pour la structure définie par la forme $d\theta$. En vertu des résultats généraux on peut associer au feuilletage déterminé par H un feuilletage lagrangien transverse. Nous allons examiner en détail le cas de $\omega_0 = d\theta_0$ avec $\theta_0 = (0, 0, 1, 0)$. Notons K le sous-groupe de G formé des matrices

$$\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les classes γK engendrent un feuilletage lagrangien transverse à celui dont les feuilles sont les classes à droite γH.

Voici un exemple de suite de triplets $(G_k, H_k, \tilde{\omega}_k)$ associée à (G, ω_0):

$$(G_0, H_0, \tilde{\omega}_0) = (G, I_3, \omega_0);$$

$$(G_1, H_1, \tilde{\omega}_1) = (\mathscr{D}G, H_1, \tilde{\omega}_1)$$

avec

$$\mathscr{D}G = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in G \quad ,$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in G$$

$$\tilde{\omega}_1(\gamma) = dx \wedge dz, \quad \gamma \in \mathscr{D}G.$$

Considérons dans G le système des coordonnées $(q_1, q_2, p_1, p_2) = (2a, x, y, z)$. Si on munit (G, ω_0) de la structure bilagrangienne déterminée par la paire (H, K) les coordonnées $(q, p) = (2a, x, y, z)$ satisfont à la seconde assertion du théorème de HESS. Il en résulte que la structure (G, ω_0, H, K) est affine.

En contraste avec l'exemple ci-dessus il est à remarquer que les orbites coadjointes des groupes de Lie semi-simples compacts n'admettent pas de structures affines.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. Abraham and J. Marsden, *Foundation of Mechanics*, Benjamin Cumings Publishing Compagny, London.
2. Bon Yao Chu, *Homogeneous symplectic manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 197 (1974).
3. Y. Carriere, *Autor de la conjecture de Markus*, Preprint Institut Fourier (1988).
4. G. Girard and Nguiffo Boyom, *Uniqueness of torsion free connection. On some invariant structure on Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 280 (1983), 797–808.
5. V. Guilllemin and S. Stenberg,
   (a) *Geometric Asymptotics*, Amer. Math. Sox. Survey 17, (1977). Providence NJ.
   (b) *Symplectic Techniques in Physics*, Cambridge University Press, 1984.
6. H. Hess, *Connection on symplectic manifold and Geometric quantization.* Lectures Notes in Math. 836.
7. B. Kostant, *Quantization and unitary representation. Prequantization.* Lecture Notes in Math. 170 (1970).
8. P. Libermann, (a) *Sur les problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales.*
   (a) *Thèse*, Annali di Matematica Pura e Applicata.
   (b) *Problème d'équivalence et géomètrie symplectique*, Astérisque 107 (1983), 43–68.
9. J. Milnor, *Fundamental groups of complete affinely flat manifolds*, Adv. in Math. 25 (1977), 178–187.
10. Nguiffo B. Boyom,
    (a) *Variété symplectique affine Manuscripta*, Math. 64 (1989).
    (b) *The lifting problem for affine structure on Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 313 (1989), 347–379.
    (c) *Structures affines homotopes à zéro*, J. Differential Geom. 31 (1990), 859–911.
11. J. Roels and A. Weinstein, *On functions whose Poisson brackets are constant*, J. Math. Phys. 12, 14821486.
12. D. Sims and W. Woodhouse, Geometric quantization, Lecture Notes in Physics 53 (1976).
13. J. M. Souriau, *Structures des systèmes dynamiques*, Dunod Université, Paris, 1970.
14. A. Weinstein, *Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds*, Adv. in Math. 6 (1971), 329–346.

DÉPARTMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ MONTPELLIER 11
PLACE EUGENE BATALLION
34060 MONTPELLIER CEDEX
FRANCE