MATH. SCAND. 78 (1996), 255–265

COHOMOLOGY CYCLIQUE DES PRODUCTS CROISÉS TORDUS

ERLEND DAHL

Abstract.

Nous calculons la cohomologie cyclique des produits croisés tordus du type $C_\alpha^\infty(V, \Gamma)$ où V est une variété de classe C^∞, Γ un groupe discret agissant proprement et librement sur V tel que le quotient V/Γ soit compact et α un 2-cocycle sur Γ.

Introduction.

Soient V une variété C^∞ et Γ un groupe discret dénombrable agissant proprement et librement à droite sur V, tel que V/Γ soit compact. L'exemple fondamental de cette situation est le suivant: soient G un groupe de Lie semi-simple, $K \subseteq G$ un sous-groupe compact maximal et $\Gamma \subseteq G$ un sous-groupe discret dénombrable cocompact sans torsion. Alors Γ agit librement et proprement sur l'espace symétrique $V = K\backslash G$ et V/Γ est compact.

Soient $C_c^\infty(V)$ l'algèbre des fonctions C^∞ à support compact sur V; l'action de Γ sur V induit de façon naturelle une action de Γ sur l'algèbre $C_c^\infty(V)$, à savoir $(s \cdot f)(x) = f(xs)\ \forall s \in \Gamma, x \in V$. Considérons alors l'algèbre produit croisé de $C_c^\infty(V)$ pour Γ (notée $C^\infty(V, \Gamma)$), c'est-à-dire, l'algèbre des sommes formelles finies $\sum_{s\in\Gamma} f_s[s]$ où $f_s \in C_c^\infty(V)\ \forall s \in \Gamma$, munie de la règle de produit suivante:

$$\left(\sum_{s\in\Gamma} f_s[s]\right)\left(\sum_{t\in\Gamma} g_t[t]\right) = \sum_{s,t\in\Gamma} f_s(s \cdot g_t)[st]$$

Ceci est une algèbre non commutative, et on peut se poser le problème de calculer les invariants de la géométrie non commutative (cohomologie cyclique, K-théorie) dans ce cas. Or, d'après un théorème de P. Green, nous savons qu'il y a une équivalence de Morita entre $C^\infty(V, \Gamma)$ et l'algèbre $C^\infty(V/\Gamma)$ (essentiellement dû au fait que l'action de Γ sur V soit propre), ce qui veut dire que nous sommes confrontés à l'algèbre (commutative) des fonctions C^∞ sur une variété, cas qui a déjà été traité dans [3].

Received November 21, 1994.

Supposons que l'on se donne, en plus de V et Γ comme ci-dessus, un 2-cocycle α sur Γ, c'est-à-dire, une application $\alpha\colon \Gamma \times \Gamma \to \mathbf{T}$ telle que $\alpha(s,t)\alpha(st,u) = \alpha(t,u)\alpha(s,tu)$ $\forall s,t,u \in \Gamma$. Soit $C^\infty_\alpha(V,\Gamma)$ l'algèbre des sommes formelles finies $\sum_{s\in\Gamma} f_s[s]$, muni de la règle de produit suivante

$$\left(\sum_{s\in\Gamma} f_s[s]\right)\left(\sum_{t\in\Gamma} g_t[t]\right) = \sum_{s,t\in\Gamma} \alpha(s,t) f_s(s\cdot g_t)[st]$$

Dans ce cas, il n'y a plus d'équivalence de Morita entre $C^\infty_\alpha(V,\Gamma)$ et $C^\infty(V/\Gamma)$. Nous nous proposons, dans ce travail, de calculer la cohomologie cyclique de l'algèbre $C^\infty_\alpha(V,\Gamma)$. La stratégie consiste à utiliser un théorème de structure, valable pour les produits croisés tordus C^*-algébriques $C^*_\alpha(X,\Gamma)$ où X est un espace localement compact, Γ un groupe localement compact séparable agissant proprement sur X tel que $X \to X/\Gamma$ soit un Γ-fibré principal (cette dernière condition est trivialement satisfaite dans le cas ou X est une variéré C^∞ et Γ est discret). Le théorème réalise $C^*_\alpha(X,\Gamma)$ comme un champ continu de C^*-algèbres élémentaires sur X/Γ, dont la torsion est mesurée par l'invariant de Dixmier-Douady dans $\mathrm{H}^3(X/\Gamma;\mathbf{Z})$; invariant que l'on peut calculer explicitement.

A l'aide de ce théorème, nous démontrerons que la cohomologie cyclique de l'algèbre $C^\infty_\alpha(V,\Gamma)$ est la même que celle de $C^\infty(V/\Gamma)$, même dans le cas où l'invariant de Dixmier-Douady est non nul.

Je tiens à remercier Alain Connes qui m'a proposé le problème traité ici et pour lequel il m'a fait bénéficier de ses remarques brèves mais très pertinantes. Mes remerciments vont aussi à Paula B. Cohen et à Benjamin Enriquez avec qui j'ai eu des discussions utiles, à Ola Bratteli qui m'a fait des remarques sur une version antérieure de ce travail et au Conseil Norvégien pour la Recherche Scientifique (NAVF) pour son soutien financier.

Cohomologie cyclique desproduits croisés tordus.

Nous allons nous intéresser au cas où V est une variété C^∞ et Γ un groupe discret dénombrable agissant proprement et librement sur V tel que V/Γ soit compact. Soit α un 2-cocycle sur Γ, c'est-à-dire une application $\alpha\colon \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$ telle que $\alpha(st,u)\alpha(s,t) = \alpha(s,tu)\alpha(t,u)$.

Soit $C^\infty_\alpha(V,\Gamma)$ l'algèbre des sommes formelles finies $\sum_{s\in\Gamma} f_s[s]$, où les f_s sont des fonctions C^∞ à support compact avec la règle de produit et l'innvolution données par

$$\left(\sum_{s\in\Gamma} f_s[s]\right)\left(\sum_{t\in\Gamma} g_t[t]\right) = \sum_{s,t\in\Gamma} \alpha(s,t) f_s(s\cdot g_t)[st]$$

$$\left(\sum_{s\in\Gamma} f_s[s]\right)^* = \sum_{s\in\Gamma} \alpha(s,s^{-1})^{-1} \bar{f}_{s^{-1}}[s]$$

On vérifie aisément que $C_\alpha^\infty(V,\Gamma)$ s'identifie à une sous-algèbre du produit croisé C^*- algébrique $C_\alpha^*(V,\Gamma)$ (la somme formelle $\sum_{s\in\Gamma} f_s[s]$ correspondant à la fonction $f\colon \Gamma \to C_c^\infty(V)$ telle que $f(s,x) = f_s(x)$).

Or, d'après un résultat de Raeburn et Williams (voir [9]), nous pouvons écrire le produit croisé $C_\alpha^*(V,\Gamma)$ comme un champ continu de C^*-algèbres sur l'espace X/Γ. L'invariant de Dixmier-Douady de ce champ est égal á l'image de la classe de α par l'application de Bockstein $\mathrm{H}^2(\Gamma,\mathrm{T}) \to \mathrm{H}^3(\Gamma,\mathrm{Z}) = \check{\mathrm{H}}^3(X/\Gamma,\mathrm{Z})$ (X/Γ s'identifiant à l'espace classifiant de Γ). Ici, H^* dénote la cohomologie de groupe de Γ et $\check{\mathrm{H}}^*$ la cohomologie de Čech.

Nous pouvons ainsi identifier $C_\alpha^\infty(V,\Gamma)$ à une sous-algèbre de l'algèbre des champs de vecteurs du champ continu de C^*-algèbres; notons $\mathscr{A}(U)$ les sections de ce champ $\mathscr{A}$ (à support contenu dans l'ouvert U) provenant des éléments de $C_\alpha^\infty(V,\Gamma)$.

En utilisant le fait que Γ agit proprement, on voit que l'opérateur qui correspond à un élément de $C_\alpha^\infty(V,\Gamma)$ est de rang fini. L'algèbre $\mathscr{A}(U)$ s'identifie alors à l'algèbre des sections C^∞ à support compact contenu dans U et à rang fini. On a alors une application $\mathrm{Tr}\colon C_\alpha^\infty(V,\Gamma) \to C^\infty(V/\Gamma)$ induit par la trace usuelle.

Quelques rappels sur la cohomologie cyclique. Soit A une algèbre topologique unifère. Pour $n \geqq 0$, soit $C^n(A,A^*)$ l'espace des $(n+1)$-formes linéaires continues sur A. Pour $\phi \in C^n(A,A^*)$, posons, pour tous $a^0,\ldots,a^n \in A$

$$(b\phi)(a^0,\ldots,a^n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \phi(a^0,\ldots,a^i a^{i+1},\ldots,a^n) + (-1)^{n+1}\phi(a^n a^0, a^1,\ldots,a^{n-1})$$

$$(B_0\phi)(a^0,a^1,\ldots,a^{n-1}) = \phi(I,a^0,\ldots,a^n) - (-1)^{n+1}\phi(a^0,\ldots,a^{n-1},I)$$

$$(A\phi)(a^0,\ldots,a^n) = \sum_{\gamma\in\Xi} \varepsilon(\gamma)\phi(a^{\gamma(0)},\ldots,a^{\gamma(n)})$$

$$B\phi = AB_0\phi$$

Ici, Ξ désigne le groupe de permutations cycliques de $\{0,\ldots,n\}$ et $\varepsilon(\gamma)$ la signature de la permutation $\gamma\in\Xi$. On verifie, en calculant, que $b^2 = B^2 = Bb + bB = 0$. La cohomologie du complexe $(C^*(A,A^*),b)$ s'appelle *la cohomologie de Hochschild (topologique) de A*; elle sera notée $\mathrm{HH}^*(A)$.

Définissons un double complexe $(\mathbf{C}^{*,*},d)$ par

$$\mathbf{C}^{n,m} = C^{n-m}(A,A^*) \quad \forall m,n \geqq 0$$

$$d_1\phi = (n-m+1)b\phi \in \mathbf{C}^{n+1,m}$$

$$d_2\phi = \frac{1}{n-m} B\phi \in \mathbf{C}^{n,m+1}$$

et munissons $\mathbf{C}^{*,*}$ de la differentielle totale $d = d_1 + d_2$. Le n-ieme groupe de *cohomologie cyclique* est donné par

$$\mathrm{HC}^n(A) = \mathrm{H}^n(\mathbf{C})$$

où H^* désigne la cohomologie totale. Soit $\tilde{\mathbf{C}}^{n,m} = C^{n-m}(A, A^*)$ $\forall m, n \in \mathbf{Z}$. La cohomologie cyclique périodique $\mathrm{HC}^*_{\mathrm{per}}(A)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathrm{HC}^{\mathrm{ev}}_{\mathrm{per}}(A) &= \mathrm{H}^n(\tilde{\mathbf{C}}) \text{ pour } n \text{ pair} \\ \mathrm{HC}^{\mathrm{odd}}_{\mathrm{per}}(A) &= \mathrm{H}^n(\tilde{\mathbf{C}}) \text{ pour } n \text{ impair} \end{aligned}$$

(Cf. [4, Theorem 40]).

Rappelons ensuite que si A est une algèbre (unifère ou non), on définit *l'algèbre graduée différentielle universelle* $\Omega^*(A)$ de la manière suivante:

$$\begin{aligned} &\Omega^n(A) = \tilde{A} \otimes \bigotimes_1^n A \quad \forall n \geqq 0 \\ &d\colon \Omega^n(A) \to \Omega^{n+1}(A) \\ &d((a^0 + \lambda^0 I) \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^n) = I \otimes a^0 \cdots \otimes a^n \end{aligned}$$

Ici, $\tilde{A} = \{a + \lambda I \mid \lambda \in \mathbf{C}, a \in A\}$. Pour tout n, $\Omega^n(A)$ est muni d'une structure de A-module à droite donnée par

$$(\tilde{a}^0 \otimes a^1 \otimes \cdots \otimes a^n)a = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \tilde{a}^0 \otimes \cdots \otimes a^j a^{j+1} \otimes \cdots \otimes a \quad \forall a^i \in A, \forall a \in A$$

Cette action s'étend naturellement à une action de $\tilde{A}$. Le produit $\Omega^i(A) \to \Omega^{i+j}(A)$ est défini par

$$\omega(\tilde{b}_0 \otimes \cdots \otimes b^j) = (\omega \tilde{b}^0) \otimes b^1 \otimes \cdots \otimes b^j \quad \forall \omega \in \Omega^i(A)$$

Alors $(\Omega(A), d)$ est une algèbre graduèe differentielle et on a l'égalité

$$\tilde{a}^0 da^1 da^2 \cdots da^n = \tilde{a}^0 \otimes \cdots \otimes a^n$$

Soit (Ω', d') une autre algèbre graduée differentielle. Tout homomorphisme $A \xrightarrow{\rho} (\Omega')^0$ s'étend à un homomorphisme d'algèbres differentielles graduées $(\Omega(A), d) \xrightarrow{\bar{\rho}} (\Omega', d')$.

Une forme $(n + 1)$-linéaire sur A donne naissance à une forme linéaire $\hat{\phi}$ sur $\Omega^n(A)$, où

$$\hat{\phi}(\tilde{a}^0 da^1 \cdots da^n) = \phi(a^0, \ldots, a^n)$$

On voit que ϕ est un cocycle de Hochschild si et seulement si

$$\hat{\phi}(ab\omega) = \hat{\phi}(b\omega a) \; \forall a, b \in A, \omega \in \Omega^n(A)$$

En effet, on calcule aisément

$$b\phi(a^0da^1\cdots da^{n+1}) = (-1)^n\hat{\phi}(a^0da^1\cdots da^na^{n+1}) + (-1)^{n+1}\hat{\phi}(a^{n+1}a^0da^1\cdots da^n)$$

Localisation en cohomologie cyclique. Nous allons exploiter quelques idées sur la localisation en cohomologie cyclique, dues à Wassermann.

Soit A une algèbre comme ci-dessus et soit $C \subseteq A$ une sous-algèbre centrale. Pour toute cochaîne $\phi \in C^n(A, A^*)$ et tout $z \in C$, posons

$$(\pi_k(z)\phi)(a^0,\ldots,a^n) = \hat{\phi}(a^0(da^1\cdots da^{k-1})z(da^k\cdots da^n))$$

La proposition suivante se trouve (sans démonstration) dans [17].

PROPOSITION 1.

(1) $\pi_k(z)b = b\pi_k(z)$ *pour* $1 \leqq k \leqq n+1$.

(2) *Soit* ϕ *un cocycle de Hochschild. Alors* $\pi_k(z)\phi$ *et* $\pi_1(z)\phi$ *sont cohomologues pour* $1 \leqq k \leqq n$.

(3) *Si* ϕ *est un cocycle de Hochschild, alors* $\pi_k(z)\phi$ *l'est aussi.*

(4) $\pi_j(z)$ *et* $\pi_{j'}(z)$ *commutent, et*

$$(\pi_{j_1}(z_1)\cdots\pi_{j_m}(z)\phi)(a^0,\ldots,a^n) =$$
$$\hat{\phi}(a^0(da^1\cdots da^{j_1-1})z_1(da_{j_1}\cdots da^{j_2-1})z_2\cdots z_m(da^{j_m}\cdots a^n))$$

pour $z_1,\ldots,z_m \in C$ *et* $j_1 \leqq j_2 \leqq \cdots \leqq j_m$.

Définissons des prefaisceaux gradués $\mathscr{C}^*$ et $\mathscr{H}^*$ sur V/Γ en posant

$$\mathscr{C}^n(U) = C^n(\tilde{\mathscr{A}}(U), \tilde{\mathscr{A}}(U)^*)$$
$$\mathscr{H}^n(U) = \mathrm{HH}^n(\tilde{\mathscr{A}}(U))$$

pour $U \subseteq V/\Gamma$ ouvert. De même, on définit des prefaisceaux gradués $\mathscr{C}'^*$ et $\mathscr{H}^{*\prime}$ en remplaçant $\mathscr{A}(U)$ par $C_c^\infty(U)$. Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement de V/Γ. Notons $U_{i_0\ldots i_n}$ l'intersection $U_{i_0}\cap\ldots\cap U_{i_n}\,\forall i_0,\ldots,i_p \in I$. Si $\mathscr{F}$ est un (pre)faisceau sur V/Γ, nous noterons $\check{C}^p(\mathscr{U};\mathscr{F})$ l'espace $\bigoplus_{0\ldots i_1}\mathscr{F}(U_{i_0\ldots i_p})$ et $\delta\colon \check{C}^p(\mathscr{U};\mathscr{F}) \to \check{C}^{p+1}(\mathscr{U};\mathscr{F})$ le cobord de Čech. Nous noterons $\check{\mathrm{H}}^p(\mathscr{U};\mathscr{F})$ la cohomologie correspondante.

Choisissons un recouvrement trivialisant $\mathscr{U} = (U_i)_{i\in I}$ pour $V \to V/\Gamma$ tel que chaque interection d'éléments de $\mathscr{U}$ soit connexe, ainsi qu'une partition de l'unité $\{\rho_i\}_{i\in I}$ subordonnée à $\mathscr{U}$. Pour tout $i \in I$, prenons une fonction $\rho'_i \in C_c^\infty(U_i)$ telle que $\rho_i\rho'_i = \rho_i$. Nous pouvons ainsi supposer que les fonctions de transition $\{g_{ij}\}_{i,j\in I}$ du fibré $V \to V/\Gamma$ sont localement constantes.

LEMME 2. $\check{\mathrm{H}}^q(\mathscr{U};\mathscr{H}^n) = 0$ *pour* $q > 0$, *et* $\check{\mathrm{H}}^0(\mathscr{U};\mathscr{H}^n) = \mathscr{H}^n(V/\Gamma) = \mathrm{HH}^n(\tilde{\mathscr{A}})\,\forall n$.

DÉMONSTRATION. Sur chaque ouvert $U \subseteq V/\Gamma$ on a une application $\mathrm{Tr}^*\colon \mathscr{C}^*(U) \to \mathscr{C}'^*(U)$, d'où un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \check{C}^0(\mathscr{U};\mathscr{H}^n) & \xrightarrow{\delta} & \check{C}^1(\mathscr{U};\mathscr{H}^n) & \xrightarrow{\delta} & \cdots \\ \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}^*} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}^*} & & \\ \check{C}^0(\mathscr{U};\mathscr{H}'^n) & \xrightarrow{\delta} & \check{C}^1(\mathscr{U};\mathscr{H}'^n) & \xrightarrow{\delta} & \cdots \end{array}$$

Comme on a une équivalence de Morita entre $\mathscr{A}(U_i)$ et $C_c^\infty(U_i)$ pour chaque $i \in I$, les Tr* induisent un isomorphisme de complexes entre $\check{C}^*(\mathscr{U};\mathscr{H}^*)$ et $\check{C}^*(\mathscr{U};\mathscr{H}'^*)$. Pour démontrer la première assertion, il suffit donc de prouver que la complexe $\check{C}^*(\mathscr{U};\mathscr{H}'^n)$ est acyclique.

On va définir une homotopie contractante $K: \check{C}^p(\mathscr{U};\mathscr{H}^n) \to \check{C}^{p+1}(\mathscr{U};\mathscr{H}^n)$. Remarquons tout d'abord que si ϕ' est un cocycle, alors ϕ' est équivalent à

$$\sum_{i\in I} \pi_1(\rho_i)\pi_2(\rho_i')\cdots\pi_n(\rho_i')\phi'$$

Comme $\rho_i df \rho_i = \rho_i d(\rho_i f)\rho_i$ (car $\rho_i\rho_i' = \rho_i$), chaque $\pi_1(\rho_i)\pi_2(\rho_i')\cdots\pi_n(\rho_i')\phi'$ peut être vu comme défini sur V/Γ tout entier, même si ϕ' n'est défini que sur $U \subseteq V/\Gamma$.

Définissons $K: \check{C}^p(\mathscr{U};\mathscr{H}'^n) \to \check{C}^{p+1}(\mathscr{U};\mathscr{H}'^n)$ par

$$(K\phi')_{i_0\ldots i_{p-1}} = \sum_{i\in I} \pi_1(\rho_i)\pi_2(\rho_i')\cdots\pi_n(\rho_i')\phi_{ii_0\ldots i_{p-1}}$$

Alors on peut calculer, pour tout b-cocycle $\phi' = (\phi'_{i_0\ldots i_p})$,

$$(\delta K\phi')_{i_0\ldots i_p} = \sum_{j=0}^{p}\sum_{i\in I}(-1)^j\pi_1(\rho_i)\pi_2(\rho_i')\cdots\pi_n(\rho_i')\phi'_{ii_0\ldots\hat{\imath}_j\ldots i_p}$$

$$\begin{aligned}(K\delta\phi')_{i_0\ldots i_p} &= \sum_{i\in I}\pi_1(\rho_i)\pi_2(\rho_i')\cdots\pi_n(\rho_i')\phi'_{i_0\ldots i_p}\\ &\quad + \sum_{j=0}^{p}\sum_{i\in I}(-1)^{j+1}\pi_1(\rho_i)\pi_2(\rho_i')\cdots\pi_n(\rho_i')\phi'_{ii_0\ldots\hat{\imath}_j\ldots i_p}\end{aligned}$$

Donc

$$((\delta K + K\delta)\phi')_{i_0\ldots i_p} = \sum_{i\in I}\pi_1(\rho_i)\pi_2(\rho_i')\cdots\pi_n(\rho_i')\phi'_{i_0\ldots i_p}$$

qui est cohomologue à $\phi'_{i_0\ldots i_p}$, d'où l'identité $K\delta + \delta K = \mathrm{Id}$.

Calculons maintenant la cohomologie en degre 0. Nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{H}^n(V/\Gamma) & \xrightarrow{\rho} & \check{Z}^0(\mathscr{U};\mathscr{H}^n) \\ \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}^*} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}^*} \\ \mathscr{H}'^n(V/\Gamma) & \xrightarrow{\rho'} & \check{Z}^0(\mathscr{U};\mathscr{H}'^n) \end{array}$$

où ρ et ρ' sont les applications de réstriction $\rho([\phi]) = ([\phi|_{U_i}])_{i\in I}$ et $\rho([\phi']) = ([\phi'|_{U_i}])_{i\in I}$. Démontrons d'abord que ρ' est un isomorphisme.

Supposons d'abord que $[\phi'|_{U_i}] = 0 \, \forall i \in I$. Ceci veut dire que $\phi'|_{U_i}$ est un cobord, c'est-à-dire qu'il existe $\psi_i \in \mathscr{C}^{n-1}(U_i)$ tel que $\phi'|_{U_i} = b\psi_i$. Mais alors ϕ' est cohomologue à

$$\sum_{i\in I} \pi_1(\rho_i)\pi_3(\rho_i') \cdots \pi_n(\rho_i')\phi' = \sum_{i\in I} \pi_1(\rho_i)\pi_2(\rho_i') \cdots \pi_n(\rho_i')(b\psi_i)$$

$$= b\left(\sum_{i\in I} \pi_1(\rho_i)\pi_2(\rho_i') \cdots \pi_n(\rho_i')\psi_i\right)$$

ce qui démontre que ϕ' est un cobord. Ainsi, $\mathscr{H}^n(V/\Gamma) \to \check{\mathrm{H}}^0(\mathscr{U}; \mathscr{H}^n)$ est une application injective. Pour montrer la surjectivité, prenons $([\phi_i'])_{i\in I} \in \check{\mathrm{H}}^0(\mathscr{U}; \mathscr{H}^n)$. Alors $[\phi_i'|_{U_i\cap U_j}] = [\phi_j'|_{U_i \cap U_j}]$, ce qui veut dire qu'il existe des cochaînes $\psi_{ij} \in \mathscr{C}^{n-1}(U_i \cap U_j)$ telles que

$$\phi_i'|_{U_i\cap U_j} + b\psi_{ij}$$

Posons

$$\phi' = \sum_{i\in I} \pi_1(\rho_i)\pi_2(\rho_i') \cdots \pi_n(\rho_i')\phi_i'$$

Alors

$$\begin{aligned} \phi'|_{U_j} &= \sum_{i\in I} \pi_1(\rho_i)\pi_2(\rho_i') \cdots \pi_n(\rho_i')\phi_i'|_{U_j} \\ &= \sum_{i\in I} \pi_1(\rho_i)\pi_2(\rho_i') \cdots \pi_n(\rho_i')(\phi_j'|_{U_i\cap U_j} + b\psi_{ij}) \\ &= \sum_{i\in I} \pi_1(\rho_i)\pi_2(\rho_i') \cdots \pi_n(\rho_i')\phi_j' + b\left(\sum_{i\in I} \pi_1(\rho_i)\pi_2(\rho_i') \cdots \pi_n(\rho_i')\psi_{ij}\right) \end{aligned}$$

qui est cohomologue à ϕ_j'. Ceci démontre que l'application est surjective.

Démontrons enfin que $\mathrm{Tr}^*: \mathscr{H}'^n(V/\Gamma) \to \mathscr{H}^n(V/\Gamma)$ est un isomorphisme (du coup, on aura calculé la cohomologie de Hochschild cherchée). Soient U' et U'' des ouverts contenus dans V/Γ tels que $\mathrm{Tr}^*: \mathscr{H}'^n(U') \to \mathscr{H}^n(U')$, $\mathrm{Tr}^*: (U')$, $\mathrm{Tr}^*: \mathscr{H}'^n(U'') \to \mathscr{H}^n(U'')$ et $\mathrm{Tr}^*: \mathscr{H}'^n(U' \cap U'') \to \mathscr{H}^n(U' \cap U'')$ soient des isomorphismes. Nous voulons démontrer que $\mathrm{Tr}^*: \mathscr{H}'^n(U) \to \mathscr{H}^n(U)$ est un isomorphisme, où $U = U' \cup U''$.

On a un diagramme commutatif (où les lignes sont exactes)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C_c^\infty(U' \cap U'') & \to & C_c^\infty(U') \oplus C_c^\infty(U'') & \to & C_c^\infty(U) & \to & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}\oplus\mathrm{Tr}} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}} & & \\ 0 & \to & \mathscr{A}(U' \cap U'') & \to & \mathscr{A}(U') \oplus \mathscr{A}(U'') & \to & \mathscr{A}(U) & \to & 0 \end{array}$$

ce qui donne un diagramme commutatif en cohomologie de Hochschild:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathscr{H}^n(U'\cap U'') & \to & \mathscr{H}^n(U')\oplus\mathscr{H}^n(U'') & \to & \mathscr{H}^n(U) & \to & \mathscr{H}^{n-1}(U'\cap U'') & \to & \mathscr{H}^{n-1}(U')\oplus\mathscr{H}^{n-1}(U'') \\
\uparrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}^*} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}^*\oplus\mathrm{Tr}^*} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}^*} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}^*} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Tr}^*\oplus\mathrm{Tr}^*} \\
\mathscr{H}'^n(U'\cap U'') & \to & \mathscr{H}'^n(U')\oplus\mathscr{H}'^n(U'') & \to & \mathscr{H}'^n(U) & \to & \mathscr{H}'^{n-1}(U'\cap U'') & \to & \mathscr{H}'^{n-1}(U')\oplus\mathscr{H}'^{n-1}(U'')
\end{array}$$

et on obtient le résultat en appliquant le lemme des cinq. En raisonnant par récurrence sur les ouverts dans le recouvrement $\mathscr{U}$ (qui est fini car V/Γ est supposé compact), nous en déduisons que $\mathrm{Tr}^*\colon \mathscr{H}'^n(V/\Gamma)\to\mathscr{H}^n(V/\Gamma)$ est un isomorphisme.

Construction des triple complexes. Soit $(\mathbf{\Gamma}, d_1, d_2, d_3)$ le triple complexe donné par

$$\mathbf{\Gamma}^{m,n,p} = \bigoplus_{i_0,\ldots,i_p} \mathscr{C}^{n-m}(U_{i_0\ldots i_p})$$

$$d_1\colon \mathbf{\Gamma}^{m,n,p}\to\mathbf{\Gamma}^{m+1,n,p},\ (d_1\phi)_{i_0\ldots i_p} = \frac{1}{m-n}B\phi_{i_0\ldots i_p}$$

$$d_2\colon \mathbf{\Gamma}^{m,n,p}\to\mathbf{\Gamma}^{m,n-1,p},\ (d_2\phi)_{i_0\ldots i_p} = (m-n+1)b\phi_{i_0\ldots i_p}$$

$$d_3\colon \mathbf{\Gamma}^{m,n,p}\to\mathbf{\Gamma}^{m,n,p+1},\ (d_3\phi)_{i_0\ldots i_{p-1}} = (-1)^{m+n}\sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j\phi_{i_0\ldots\hat{i}_j\ldots i_{p+1}}\Big|_{U_{i_0\ldots i_{p_{p+1}}}}$$

pour toute cochaîne $\phi = (\phi_{i_0\ldots i_p})\in\mathbf{\Gamma}^{m,n,p}$. On calcule aisément $d_1^2 = d_2^2 = d_3^2 = d_1d_2 + d_2d_1 = d_1d_3 + d_3d_1 = d_2d_3 + d_3d_2 = 0$. L'application d_3 n'est autre que le cobord de Čech, et le lemme que l'on vient de démontrer calcule essentiellement $\mathrm{H}_{d_3}(\mathbf{\Gamma})$.

Soit ensuite (Ω_*, ∂) le faisceau gradué de courants sur V/Γ, muni du bord de de Rham $\partial\colon \Omega_k(U)\to\Omega_{k-1}(U)$. (Un cournt C de dimension k sur $U\subseteq V/\Gamma$ est une forme linéaire sur l'espace $C_c^\infty(U,\Lambda^kT_{\mathrm{C}}^*U)$ de formes différentielles à support compact de dimension k, qui est continue au sens suivant: pour tout $K\subseteq U$ compact et toute famille $(\omega_\alpha)\in C_c^\infty(U,\Lambda^kT_{\mathrm{C}}^*U)$ telle que $\operatorname{supp}\omega_\alpha\subseteq K\ \forall\alpha$ et telle que (ω_α) converge vers 0 dans la topologie C^∞, on a $C(\omega_\alpha)\to 0$).

Définissons un triple complexe $(\mathbf{\Omega}, d_1', d_2', d_3')$ par

$$\mathbf{\Omega}^{m,n,p} = \bigoplus_{i_0\ldots i_p}\Omega_{n-m}(U_{i_0\ldots i_p})$$

$$d_1'\colon \mathbf{\Omega}^{m,n,p}\to\mathbf{\Omega}^{m+1,n,p},\ (d_1'\phi)_{i_0\ldots i_p} = \partial\phi_{i_0\ldots i_p}$$

$$d_2'\colon \mathbf{\Omega}^{m,n,p}\to\mathbf{\Omega}^{m,n+1,p},\ (d_2'\phi)_{i_0\ldots i_p} = 0$$

$$d_3'\colon \mathbf{\Omega}^{m,n,p}\to\mathbf{\Omega}^{m,n,p+1},\ (d_3'C)_{i_0\ldots i_{p+1}} = (-1)^{m+n}\sum_{j=0}^{p+1}(-1)^jC_{i_0\ldots\hat{i}_j\ldots i_{p+i}}\Big|_{U_{i_0\ldots i_{p+1}}}$$

Notre but est de démontrer que les complexes Γ et $\mathbf{\Omega}$ sont quasi-isomorphes.

LEMME 3. *L'homologie (itérée) du triple complexe $(\mathbf{\Omega}, d_1', d_2', d_3')$ est donnée par*

$$\mathrm{H}_{d'_3}(\mathbf{\Omega})^{m,n,p} = \Omega_{m-n}(V/\Gamma) \quad (p = 0)$$

$$= 0 \quad (p \neq 0)$$

$$\mathrm{H}_{d'_1}\mathrm{H}_{d'_2}\mathrm{H}_{d'_3}(\mathbf{\Omega})^{m,n,p} = \mathrm{H}_{m-n}(V/\Gamma; \mathrm{C}) \quad (m > n > 0, p = 0)$$

$$= \mathrm{Ker}(\partial\colon \Omega_n(V/\Gamma) \to \Omega_{m-1}(V/\Gamma)) \quad (m = n, p = 0)$$

$$= 0 \quad (p \neq 0)$$

(Ici, $\mathrm{H}_*(V/\Gamma; \mathrm{C})$ *désigne l'homologie de de Rham).*

DÉMONSTRATION. Ceci est un résultat tout à fait classique.

Nous allons construire un morphisme de triple complexes $\lambda\colon \mathbf{\Omega}^{*,*,*} \to \mathbf{\Gamma}^{*,*,*}$. Soit $C = (C_{i_0\ldots i_p}) \in \mathbf{\Omega}^{m,n,p}$. Pour $f^0 \otimes \cdots \otimes f^{n-m} \in \mathscr{C}^{n-m}(U_{i_0\ldots i_p})$ on pose

$$\langle \lambda(C)_{i_0\ldots i_p}, f^0 \otimes \cdots \otimes f^{n-m} \rangle = \langle C_{i_0\ldots i_p}, \mathrm{Tr}(f^0 df^1 \wedge \cdots \wedge df^{n-m}) \rangle$$

Il est clair que λ commute au cobord de Čech. De plus, on a

$$\begin{aligned}
&\langle b(\lambda(C))_{i_0\ldots i_p}, f^0 \otimes \cdots \otimes f^{n-m+1} \rangle \\
&= \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \langle \lambda(C)_{i_0\ldots i_p}, f^0 \otimes \cdots \otimes f^i f^{i+1} \otimes \cdots \otimes f^{n-m+1} \rangle \\
&\quad + (-1)^{n-m+1} \langle (\lambda(C))_{i_0\ldots i_p}, f^{n-m+1} f^0 \otimes \cdots \otimes f^{n-m} \rangle \\
&= \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \langle C_{i_0\ldots i_p}, \mathrm{Tr}(f^0 df^1 \wedge \cdots \wedge d(f^i f^{i+1}) \wedge \cdots \wedge df^{n-m+1}) \rangle \\
&\quad + (-1)^{n-m+1} \langle C_{i_0\ldots i_p}, \mathrm{Tr}(f^{n-m+1} f^0 df^1 \wedge \cdots \wedge df^{n-m}) \rangle \\
&= 0 \quad \text{(Cela se simplifie)}
\end{aligned}$$

De même, on voit que

$$\begin{aligned}
\langle B_0(\lambda(C))_{i_0\ldots i_p}, f^0 \otimes \cdots \otimes f^{n-m-1} \rangle &= \langle \lambda(C)_{1_0\ldots i_p}, I \otimes f^0 \otimes \cdots \otimes f^{n-m-1} \rangle \\
&\quad - (-1)^{n-m} \langle \lambda(C)_{i_0\ldots i_p}, f^0 \otimes \cdots \otimes f^{n-m-1} \otimes I \rangle \\
&= \langle C_{i_0\ldots i_p}, \mathrm{Tr}(df^0 \wedge df^1 \cdots \wedge df^{n-m-1}) \rangle \\
&= \langle C_{i_0\ldots i_p}, d(\mathrm{Tr}(df^0 \wedge \cdots \wedge df^{n-m-1})) \rangle \\
&= \langle \partial C_{i_0\ldots i_p}, \mathrm{Tr}(df^0 \wedge df^1 \cdots \wedge df^{n-m-1}) \rangle \\
&= \langle \lambda(\partial C)_{i_0\ldots i_p}, f^0 \otimes \cdots \otimes f^{n-m-1} \rangle
\end{aligned}$$

On déduit de ce qui précède que λ définit un morphisme de complexes.

Soit $(\mathbf{C}, d_1, d_2)$ le double complexe calculant la cohomologie cyclique de l'allgèvre $C_\alpha^\infty(V, \Gamma)^\sim$, et (Ω, d_1', d_2') le double complexe des courants sur V/Γ. On a deux homomorphismes de réstriction (en degré 0):

$$(\mathbf{C}, d_1, d_2) \to (\mathbf{\Gamma}, d_1, d_2 + d_3) \xleftarrow{\lambda} (\mathbf{\Omega}, d_1', d_2' + d_3') \leftarrow (\Omega, d_1', d_2')$$

Ces homomorphismes induisent des isomorphismes des termes E^1 des suites spectrales associées à la deuxième filtration des double complexes. Or, pour $(\Omega, \mathrm{d}_1', \mathrm{d}_2')$ il est clair que cette suite spectrale dégénère en E^2, et il en est donc de même pour les autres complexes. La cohomologie cyclique (qui est par définition l'homologie totale du complexe $(\mathbf{C}, d_1, d_2)$) se calcule alors comme l'homologie itérée du complexe (Ω, d_1, d_2).

Un raisonnement tout à fait analogue avec le complexe "infini" $\tilde{\mathbf{C}}$ calcule la cohomologie cyclique périodique. Nous sommes donc en mésure d'énoncer le Théorème principal de ce travail:

THÉORÈME 4. *Soient V une varieté C^∞, Γ un groupe discret dénombrable agissant librement et proprement sur V tel que le quotient V/Γ soit compact. Soit α un 2-cocycle sur Γ. Si A est le produit croisé tordu $C_\alpha^\infty(V, \Gamma)$, on a*

(1) *La cohomologie de Hochschild de A est donnée par*

$$\mathrm{HH}^*(A) = \Omega_*(V/\Gamma) \quad \text{(Courants de de Rham)}$$

(2) *La cohomologie cyclique de A est donnée par*

$$\mathrm{HC}^n(A) = \mathrm{Ker}(\partial\colon \Omega_n(V/\Gamma) \to \Omega_{n-1}(V/\Gamma)) \oplus \mathrm{H}_{n-2}(V/\Gamma; \mathrm{C}) \oplus \mathrm{H}_{n-4}(V/\Gamma; \mathrm{C}) \oplus \cdots$$

(3) *La cohomologie cyclique périodique de A est donnée par*

$$\mathrm{HC}^*(A) = \mathrm{H}_*(V/\Gamma; \mathrm{C})$$

On voit donc que l'on obtient le même résultat que dans le cas où le cocycle α est trivial.

RÉFÉRENCES

1. P. Baum, A. Connes, *Chern character for discrete groups*, A fête of Topology, Academic Press, 1988, pp. 163–233.
2. R. Bott, L. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer-Verlag.
3. A. Connes, *Non-commutative differential geometry* I–II, Publ. Math. IHES 62 (1985), 41–144.
4. J. Dixmier, *Les C*-algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, 1968.
5. J. Dixmier, A. Doyady, *Champs continus d'espces Hilbertiens et de C*-algèbres*, Bull. Soc. Math. France 91, 227–284.
6. P. Green, *C*-algebras of transformation groups with smooth orbit space*, Pacific J. Math. 72 (1979), 71–97.
7. F. Hirzebruch, *Topological Methods in Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1978.
8. S. Kobayashi, K. Nomizu, *Differential Geometry*, Interscience.

9. I. Raeburn, D. Williams, *Pullbacks of C^*-algebras and crossed products*, Trans. Amer. Math. Soc. 287 (1985), 755–777.
10. A. Wasserman, *Cyclic cohomology of algebras of smooth functions on orbifolds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 135, 1988.

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK
HÖGSKOLAN I LULEÅ
S-971 87 LULEÅ
SWEDEN