

# RÉCURRENCE DE MARCHES ALÉATOIRES ET ERGODICITÉ DU FLOT GÉODÉSIQUE SUR LES GRAPHEs RÉGULIERS

MICHEL COORNAERT et ATHANASE PAPADOPOULOS

## §0. Introduction.

Un des résultats de cet article est que le comportement ergodique des géodésiques de certains graphes réguliers équivaut à la récurrence de la marche aléatoire équilibrée sur les sommets du graphe.

Soient  $X$  un arbre métrique complet et localement compact,  $\Gamma$  un groupe d'isométries de  $X$  agissant proprement sur cet espace et  $\mu$  une densité conforme  $\Gamma$ -invariante de dimension  $d$  sur le bord à l'infini  $\partial X$ . Le flot géodésique associé à l'action  $(X, \Gamma)$  est le quotient  $\Omega = GX/\Gamma$ , où  $GX$  est l'espace des géodésiques  $g: \mathbb{R} \rightarrow X$ , muni du flot naturel  $(\varphi_t)$  obtenu par translation du paramétrage des géodésiques. A partir de  $\mu$ , on sait définir une mesure invariante, notée  $m$ , pour le flot géodésique  $(\Omega, \varphi_t)$ . Dans [CP], on a étudié les propriétés ergodiques du flot  $(\Omega, \varphi_t, m)$  en donnant en particulier un analogue du théorème de dichotomie de Hopf [Hop] et de sa généralisation par Sullivan [Sul].

Le cas des arbres métriques localement compacts étudié dans [CP] est un cadre discret auquel les méthodes de la géométrie hyperbolique s'adaptent très naturellement. Quand l'arbre en question est simplicial et  $k$ -homogène (i.e. de chaque sommet partent exactement  $k$  arêtes, toutes de longueur 1), la situation est encore plus proche de celle de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$ . Le but de cet article est de compléter les résultats de [CP] afin d'obtenir l'analogue des résultats de Sullivan (voir §7 de [Sul]). Dans le cas où  $\Gamma$  agit comme le groupe de transformations du revêtement universel d'un graphe  $k$ -régulier, c'est-à-dire d'un graphe simplicial connexe dans lequel chaque sommet appartient à exactement  $k$  arêtes, on obtient l'analogue complet de ces résultats. Ils incluent en particulier:

- (1) Un critère d'ergodicité du flot géodésique en termes de la divergence de la série de Poincaré de l'action en l'exposant critique;
- (2) Un autre critère d'ergodicité du flot géodésique, en termes de la récurrence d'une certaine chaîne de Markov associée à  $\mu$ .

Nous énonçons maintenant plus précisément ces résultats.

Soit  $X$  un arbre métrique complet et localement compact et soit  $\Gamma$  un groupe d'isométries de  $X$  agissant proprement sur cet espace. Fixons deux points quelconques  $x$  et  $y$  de  $X$ . La série de Poincaré d'exposant  $s$ , associée à l'action de  $\Gamma$ , est définie comme

$$\mathcal{P}_s(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-s \operatorname{dist}(x, \gamma y)}.$$

Pour  $s$  fixé, la nature de cette série ne dépend ni de  $x$  ni de  $y$  et il existe  $\delta(\Gamma) > 0$  (appelé *exposant critique de  $\Gamma$* ) tel que  $\mathcal{P}_s(x, y)$  converge pour tout  $s > \delta(\Gamma)$  et diverge pour tout  $s < \delta(\Gamma)$ .

Soit  $\mu$  une densité conforme  $\Gamma$ -invariante de dimension  $d \geq 0$  sur  $\partial X$  (voir la section 1 ci-dessous pour un rappel des définitions).

On sait que  $\delta(\Gamma) \leq d$ , et que pour  $\delta(\Gamma) < \infty$ , il existe (au moins) une densité conforme  $\Gamma$ -invariante de dimension  $\delta(\Gamma)$  (voir [Coo]). On montre dans cet article le théorème suivant.

**THÉORÈME A.** *Supposons que le flot géodésique  $(\Omega, \varphi_t, m)$  soit ergodique. Alors, la série  $\mathcal{P}_s(x, y)$  diverge pour  $s = d$  (et on a donc en particulier  $d = \delta(\Gamma)$ ).*

Supposons maintenant que  $X$  est un arbre  $k$ -homogène avec  $k \geq 3$ . Notons  $S$  l'ensemble des sommets de  $X$ . La fonction  $\phi_\mu: S \rightarrow ]0, \infty[$  définie sur  $S$  par

$$\phi_\mu(x) = \mu_x(\partial X)$$

est  $\Gamma$ -invariante. De plus,  $\phi_\mu$   $\lambda$ -harmonique avec  $\lambda = \frac{1}{k}(1 - e^{-d})(k - 1 - e^d)$ .

Autrement dit, on a  $\Delta \phi_\mu = \lambda \phi_\mu$  où  $\Delta$  est le laplacien combinatoire défini pour toute fonction  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\Delta f(x) = f(x) - \frac{1}{k} \sum_y f(y),$$

la somme étant prise sur les sommets  $y$  voisins de  $x$ , c'est-à-dire reliés à  $x$  par une arête.

Considérons la chaîne de Markov  $P_\mu$  définie de la manière suivante. L'ensemble des états de  $P_\mu$  est  $S$  et la probabilité de transition d'un sommet  $x$  à un sommet  $y$  est

$$P_\mu(x, y) = \frac{1}{k} (1 - \lambda)^{-1} \frac{\phi_\mu(y)}{\phi_\mu(x)} \quad \text{si } x \text{ est voisin de } y$$

et

$$P_\mu(x, y) = 0 \quad \text{sinon.}$$

La chaîne  $P_\mu$  est  $\Gamma$ -invariante, et elle définit par passage au quotient une chaîne de Markov  $\overline{P}_\mu$  dont l'ensemble des états est  $\overline{S} = S/\Gamma$  et dont les probabilités de transition sont

$$\overline{P}_\mu(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{y' \in \bar{y}} P_\mu(x, y')$$

pour tout  $\bar{x} = \Gamma x$  et  $\bar{y} = \Gamma y$ .

Rappelons que l'on dit que la chaîne de Markov  $\overline{P}_\mu$  est *récurrente* si partant d'un état quelconque  $\bar{x}$ , la chaîne repasse avec probabilité 1 dans un état quelconque  $\bar{y}$ . Cela revient à dire que l'espérance du nombre total de visites de  $\bar{y}$  partant de  $\bar{x}$  est infinie. On montrera que pour  $d \geq \frac{1}{2} \log(k-1)$ , cette espérance (qui en fait est le noyau de Green de la chaîne  $\overline{P}_\mu$ ) est proportionnelle à la série de Poincaré  $\mathcal{P}_s(x, y)$  pour  $s = d$ . On a donc:

**THÉORÈME B.** *Supposons  $d \geq \frac{1}{2} \log(k-1)$ . Alors la chaîne de Markov  $\overline{P}_\mu$  est récurrente si et seulement si la série de Poincaré  $\mathcal{P}_s(x, y)$  diverge pour  $s = d$ .*

Supposons maintenant que  $X$  est le revêtement universel d'un graphe  $k$ -régulier et que  $\Gamma$  est le groupe des automorphismes de ce revêtement. On montre alors le résultat suivant:

**THÉORÈME C.** *Supposons  $d \geq \frac{1}{2} \log(k-1)$ . Si la chaîne de Markov  $\overline{P}_\mu$  est récurrente, alors le flot géodésique  $(\Omega, \varphi_t, m)$  est ergodique.*

Les théorèmes A, B et C montrent donc que, dans le cas où  $X$  est le revêtement universel d'un graphe  $k$ -régulier,  $\Gamma$  le groupe des automorphismes de ce revêtement et  $d \geq \frac{1}{2} \log(k-1)$ , les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

$$\begin{array}{c} \text{ergodicité du flot géodésique } (\Omega, \varphi_t, m) \\ \Updownarrow \\ \text{divergence de la série de Poincaré pour } s = d \\ \Updownarrow \\ \text{récurrence de la chaîne de Markov } \overline{P}_\mu. \end{array}$$

Remarquons que la deuxième propriété ne fait pas intervenir de densité conforme sur  $\partial X$ . Cela est relié au fait que l'ergodicité du flot géodésique implique l'unicité, à un facteur constant près, de la densité conforme  $\Gamma$ -invariante pour la dimension  $d$  considérée (voir l'argument donné par Sullivan dans [Sul] p. 181).

Notons un corollaire immédiat de ces trois théorèmes. Partons d'un graphe  $k$ -régulier  $G$  muni de sa métrique naturelle pour laquelle chaque arête est de longueur 1. On suppose  $k \geq 3$ . Prenons pour  $X$  le revêtement universel de  $G$  et pour  $\Gamma$  le groupe de ce revêtement. Pour tout  $x \in X$ , soit  $h_x$  la mesure de Hausdorff de dimension  $\log(k-1)$  sur  $\partial X$  associée à la métrique visuelle sur  $\partial X$

vu de  $x$  (voir la section 1). Les  $h_x$ , normalisées par  $h_x(\partial X) = 1$ , définissent une densité conforme  $\Gamma$ -invariante de dimension  $d = \log(k - 1)$  pour laquelle  $\phi \equiv 1$  et  $\lambda = 0$ . La chaîne  $P_\mu$  (resp.  $\overline{P}_\mu$ ) est alors la marche équilibrée sur  $X$  (resp.  $G$ ): à chaque pas, la probabilité d'aller sur l'un des sommets voisins est  $\frac{1}{k}$ . La mesure  $\ell$  sur le flot géodésique de  $G$  associée à  $(h_x)$  est l'analogie exact de la mesure de Liouville. Dans ce cas, les théorèmes A, B et C donnent:

**COROLLAIRE D.** *Soient  $x$  et  $y$  deux points quelconques de  $X$ . Les trois énoncés suivants sont équivalents:*

- (i) *Le flot géodésique  $(\Omega, \varphi_t, \ell)$  est ergodique*
- (ii) *La marche équilibrée sur  $G$  est récurrente*
- (iii)  $\sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{1}{(k - 1)^{\text{dist}(x, \gamma y)}} = \infty$ .

Si  $G$  est un graphe fini, alors la marche équilibrée sur  $G$  est récurrente. Comme exemple de graphe infini, considérons, pour tout  $n \geq 2$ , le graphe  $G_n$  dont les sommets sont les points à coordonnées entières de  $\mathbb{R}^n$ , et où deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si leur distance euclidienne est égale à 1. Le graphe  $G_n$  est  $k$ -régulier avec  $k = 2n$ . Un théorème bien connu dû à Polya affirme que la marche équilibrée sur  $G_n$  est récurrente si et seulement si  $n = 2$  (cf. [Pol]). Le flot géodésique associé à  $G_n$  est donc ergodique si et seulement si  $n = 2$ . Comme autre exemple, considérons le graphe infini représenté par la figure 1. On a montré dans [CP], par une méthode directe, que le flot géodésique associé à ce graphe est ergodique. Remarquons d'autre part que  $G_n$  est le graphe de Cayley du groupe  $\mathbb{Z}^n$ , et que le graphe de la figure 1 est celui du groupe  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  (pour un choix naturel de système de générateurs). Varopoulos a démontré plus généralement que la marche aléatoire équilibrée sur le graphe de Cayley d'un groupe muni d'un système fini de générateurs est récurrente si et seulement si ce groupe est ou bien fini ou bien une extension finie de  $\mathbb{Z}$  ou de  $\mathbb{Z}^2$  (voir [Var1] et [Var2]).

Pour un rapport récent sur les marches aléatoires sur les graphes, on renvoie le lecteur à [Woe].

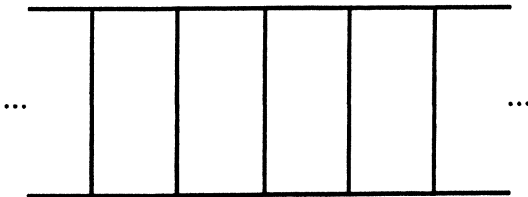


Figure 1.

Le plan de l'article est le suivant:

La section 1 contient des notions de base sur le bord d'un arbre métrique: on rappelle en particulier les notions de métrique visuelle, de dilatation locale au bord, de densité conforme et de mesure associée sur l'espace du flot géodésique.

Dans la section 2, on démontre le théorème A.

Dans la section 3, on considère l'ensemble  $S$  des sommets d'un arbre  $k$ -homogène  $X$ , avec  $k \geq 3$ . Soit  $\Gamma$  un groupe d'isométries de  $X$  agissant proprement, et  $\mu$  une densité conforme de dimension  $d$  sur  $\partial X$  qui est  $\Gamma$ -invariante. On définit une fonction  $\phi_\mu: S \rightarrow ]0, \infty[$  qui est  $\lambda$ -harmonique, et la chaîne de Markov associée  $P_\mu$ . On montre sous l'hypothèse  $d \geq \frac{1}{2} \log(k-1)$  que le noyau de Green de la chaîne quotient  $\overline{P_\mu}$  est égal, à un facteur constant près, à la somme, en l'exposant  $s = d$ , de la série de Poincaré associée à l'action de  $\Gamma$  sur  $X$ . On démontre alors le théorème B.

Dans la section 4, on suppose toujours  $d \geq \frac{1}{2} \log(k-1)$ . Pour tout  $x \in S$ , la chaîne de Markov  $P_\mu$  permet de définir une mesure sur  $\partial X$ , appelée "mesure de frappe", obtenue en prenant, pour chaque sous-ensemble  $A \subset \partial X$ , la mesure de l'ensemble des chemins infinis issus de  $x$  et aboutissant en un point de  $A$ . On montre que cette mesure de frappe coïncide avec la mesure  $\mu_x$ .

Dans la section 5, on démontre le théorème C.

## §1. Densités conformes sur le bord d'un arbre.

Cette section contient des rappels. On renvoie le lecteur à [Coo] et [CP] pour plus de détails.

Dans cet article, on notera  $|x - y|$  la distance entre deux points  $x$  et  $y$  d'un espace métrique. Une *mesure* sur un espace topologique sera toujours de Radon, positive et non identiquement nulle.

Soit  $X$  un arbre métrique complet et localement compact. On note  $\partial X$  le bord à l'infini de  $X$ , c'est-à-dire l'ensemble des bouts de  $X$ . On rappelle que la topologie de  $X$  se prolonge de manière naturelle en une topologie sur  $X \cup \partial X$  et que  $X \cup \partial X$  est un espace compact dans lequel  $X$  est ouvert et dense. Pour tout  $x \in X$ , la *métrique visuelle sur  $\partial X$  vu de  $x$*  est donnée par

$$(1.1) \quad |\xi - \eta|_x = e^{-L}, \quad \xi, \eta \in \partial X,$$

où  $L$  est la longueur du trajet commun aux rayons géodésiques  $[x, \xi[$  et  $[x, \eta[$ . Les métriques  $(|\cdot|_x)_{x \in X}$  sont compatibles avec la topologie de  $\partial X$  et sont deux à deux Lipschitz-équivalentes.

Etant donnés trois points  $x, y, z \in X$ , posons  $j(x, y, z) = e^{|x-z| - |z-y|}$ . On a

$$(1.2) \quad j(x, y, z) = e^{|x-p| - |p-y|}$$

où  $p$  est la projection du point  $z$  sur le segment géodésique  $[x, y]$ . La fonction

$j$  ainsi définie sur  $X \times X \times X$  s'étend de manière unique en une fonction continue, notée encore  $j$ , sur  $X \times X \times (X \cup \partial X)$ . Pour tout  $x, y \in X$  et  $\xi \in \partial X$ , on a la formule

$$j(x, y, \xi) = e^{|x-p| - |p-y|}$$

où  $p$  désigne ici le point où les géodésiques  $[x, \xi]$  et  $[x, y]$  se séparent.

Il est utile d'exprimer  $j(x, y, \xi)$  à l'aide d'une fonction de Busemann. On rappelle que la *fonction de Busemann* associée à un rayon géodésique  $r: [0, \infty[ \rightarrow X$  est la fonction  $b_r: X \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$b_r(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} (|r(t) - x| - t).$$

Si  $r(\infty) = \xi$ , on montre que

$$(1.3) \quad j(x, y, \xi) = e^{b_r(x) - b_r(y)}$$

pour tous les  $x, y \in X$ . On en déduit en particulier

$$(1.4) \quad j(x, y, \xi)j(y, z, \xi) = j(x, z, \xi)$$

pour tous les  $x, y, z \in X, \xi \in \partial X$ . On montre aussi la *formule de changement de point de vue*:

$$(1.5) \quad |\xi - \eta|_y^2 = j(x, y, \xi)j(x, y, \eta) |\xi - \eta|_x^2 \quad \forall x, y \in X, \xi, \eta \in \partial X.$$

Pour  $x$  et  $y$  fixés, la fonction  $\xi \mapsto j(x, y, \xi)$  est localement constante sur  $\partial X$ . On déduit immédiatement de (1.5) que pour tout  $\xi \in \partial X$ , il existe un voisinage  $V$  de  $\xi$  dans  $\partial X$  tel que tous les points  $\eta_1, \eta_2 \in V$  vérifient

$$(1.6) \quad |\eta_1 - \eta_2|_y = j(x, y, \xi) |\eta_1 - \eta_2|_x,$$

et l'on voit ainsi que la fonction  $j$  joue le rôle d'une fonction "dilatation locale".

Soit  $d$  un réel  $\geq 0$ . Une *densité conforme* de dimension  $d$  sur  $\partial X$  est une famille  $\mu = (\mu_x)_{x \in X}$  de mesures sur  $\partial X$  absolument continues les unes par rapport aux autres et vérifiant pour tous les  $x, y \in X$  et pour tout  $\xi \in \partial X$ ,

$$(1.7) \quad \frac{d\mu_y}{d\mu_x}(\xi) = j^d(x, y, \xi).$$

On notera que les formules (1.4) et (1.7) montrent que, pour  $x_0 \in X$  et  $d$  fixés, l'application  $\mu \mapsto \mu_{x_0}$  met en bijection l'ensemble des densités conformes de dimension  $d$  sur  $\partial X$  et l'ensemble des mesures sur  $\partial X$ .

Soit maintenant  $\Gamma$  un groupe d'isométries de  $X$ . On dit que la densité conforme  $\mu = (\mu_x)$  est  $\Gamma$ -invariante si elle vérifie  $\mu_{\gamma x}(\gamma A) = \mu_x(A)$  pour tout  $x \in X$ , pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et pour tout borélien  $A \subset \partial X$ , autrement dit si on a  $\gamma_* \mu_x = \mu_x \forall x \in X, \gamma \in \Gamma$ , où  $\gamma_* \mu_x$  désigne la mesure image de  $\mu_x$  par  $\gamma$ . On notera que si l'on se donne un

point  $x_0 \in X$  et une mesure  $\mu_0$  sur  $\partial X$ , et si  $\mu = (\mu_x)$  est l'unique densité conforme de dimension  $d$  telle que  $\mu_{x_0} = \mu_0$ , alors  $\mu$  est  $\Gamma$ -invariante si et seulement si, pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , la mesure  $\gamma_* \mu_0$  est absolument continue par rapport à  $\mu_0$  et vérifie

$$\frac{d\gamma_* \mu_0}{d\mu_0}(\xi) = j^d(x_0, \gamma x_0, \xi).$$

A toute densité conforme de dimension  $d$ , on associe une mesure  $\Lambda$  sur l'espace

$$\partial^2 X = \{(\xi, \eta) \in \partial X \times \partial X \mid \xi \neq \eta\}$$

en posant

$$(1.8) \quad \Lambda = \frac{\mu_x \times \mu_x}{|\xi - \eta|_x^{2d}}.$$

A l'aide des formules (1.5) et (1.7), on montre que la mesure  $\Lambda$  ne dépend pas du point de vue  $x$ , et qu'elle est  $\Gamma$ -invariante si la densité  $\mu$  est  $\Gamma$ -invariante.

A partir de la mesure  $\Lambda$ , on peut définir une mesure sur l'espace  $GX$  des géodésiques  $g: \mathbb{R} \rightarrow X$  et sur l'espace quotient  $\Omega = GX/\Gamma$  quand  $X$  est muni d'un groupe d'isométries  $\Gamma$  agissant de manière propre. (Rappelons que le fait que l'action soit propre veut dire que pour tout compact  $K \subset X$ , l'ensemble  $\{\gamma \in \Gamma \text{ tel que } \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$  est fini.) Soit  $\pi: GX \rightarrow \partial^2 X$  l'application qui associe à tout  $g \in GX$  le couple  $(g(-\infty), g(\infty))$  de ses points à l'infini. Cette application est une fibration triviale. Fixons un point base  $x_0$  de  $X$  et pour tout point  $g \in GX$ , soit  $s$  le réel tel que  $g(-s)$  est la projection de  $x_0$  sur l'image de  $g$ . L'application  $H: GX \rightarrow \partial^2 X \times \mathbb{R}$  définie par  $g \mapsto (g(-\infty), g(\infty), s)$  est une trivialisatation de  $\pi$ , et l'image par  $H$  du flot géodésique  $\varphi_t$  est le flot  $\psi_t$  donné par la formule

$$\psi_t(\xi_1, \xi_2, s) = (\xi_1, \xi_2, s + t)$$

pour tout  $(\xi_1, \xi_2) \in \partial^2 X$  et  $s \in \mathbb{R}$ .

Etant donnée la mesure  $\Lambda$  définie en (1.8), si  $\ell$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ , alors la mesure produit  $\Lambda \times \ell$ , définie sur  $\partial^2 X \times \mathbb{R}$ , est invariante par le flot  $\psi_t$ . Son image par l'application  $H^{-1}$  définit une mesure sur  $GX$  qui est invariante par l'action du flot géodésique et par  $\Gamma$ , et qui ne dépend pas de  $x_0$ . Cette mesure définit de façon naturelle une mesure quotient, notée  $m$ , sur l'espace  $\Omega = GX/\Gamma$ , qui est invariante par le flot géodésique. Pour plus de détails, on renvoie à [CP]. La proposition suivante est une conséquence directe des définitions:

**PROPOSITION 1.1.** *Le flot géodésique  $(\Omega, \varphi_t, m)$  est ergodique si et seulement si l'action de  $\Gamma$  sur  $(\partial^2 X, \Lambda)$  est ergodique.*

C'est sous cette dernière forme (ergodicité de l'action sur  $(\partial^2 X, \Lambda)$ ) que l'on montrera le théorème C.

**§2. Démonstration du théorème A.**

Soit toujours  $X$  un arbre métrique complet et localement compact et soit  $\Gamma$  un groupe d'isométries de  $X$  agissant proprement sur cet espace. La série de Poincaré associée à cette action est définie par

$$\mathcal{P}_s(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-s|x-\gamma y|}, \quad x, y \in X, s \geq 0.$$

L'inégalité triangulaire permet d'établir que, pour  $s$  fixé, la nature de cette série ne dépend ni de  $x$  ni de  $y$ . L'exposant critique  $\delta(\Gamma)$  de  $\Gamma$ ,  $0 \leq \delta(\Gamma) \leq \infty$ , est tel que  $\mathcal{P}_s(x, y)$  diverge pour  $s < \delta(\Gamma)$  et converge pour  $s > \delta(\Gamma)$ .

Soit  $\xi$  un point de  $\partial X$ . Considérons un point  $x$  de  $X$  et un rayon géodésique  $r: [0, \infty[ \rightarrow X$  tel que  $r(\infty) = \xi$ . On rappelle que le point  $\xi$  est un *point limite conique* de l'action de  $\Gamma$  s'il existe une suite  $(\gamma_n)$  d'éléments de  $\Gamma$  telle que la suite  $(\gamma_n x)$  tend vers  $\xi$  tout en restant à une distance bornée de  $r$ . On voit immédiatement que cette condition ne dépend pas du choix de  $x$  ou de  $r$ .

Il est utile de décrire les points limites coniques de la manière suivante. Pour  $x, y \in X$  et pour tout réel  $h \geq 0$ , désignons par  $O(x, y, h)$  l'ensemble des points  $\xi \in \partial X$  tels que le rayon géodésique  $[x, \xi[$  passe à une distance  $\leq h$  de  $y$ . (On peut remarquer que  $O(x, y, h)$  est une boule fermée de rayon  $r^{h-|x-y|}$  pour la métrique visuelle  $|\cdot|_x$ .) Fixons le point  $x$ . On a alors la

**PROPOSITION 2.1.** *Le point  $\xi$  est un point limite conique de  $\Gamma$  si et seulement si il existe un réel  $h \geq 0$  et une infinité d'éléments  $\gamma$  de  $\Gamma$  tels que  $\xi \in O(x, \gamma x, h)$ .*

**DÉMONSTRATION.** Cela résulte immédiatement des définitions et du fait que  $\Gamma$  agit de manière propre sur  $X$ .

On notera  $A_c$  l'ensemble des points limites coniques de  $\Gamma$ .

Donnons-nous maintenant une densité conforme  $\Gamma$ -invariante  $\mu$  de dimension  $d$ .

**THÉORÈME 2.2.** *Si la série de Poincaré  $\mathcal{P}_s(x, y)$  converge pour  $s = d$ , alors  $\mu_x(A_c) = 0$ .*

**DÉMONSTRATION.** Notons  $E_h$  l'ensemble des points  $\xi \in \partial X$  pour lesquels il existe une infinité de  $\gamma \in \Gamma$  tels que  $\xi \in O(x, \gamma x, h)$ . D'après la version du lemme de l'ombre de Sullivan donné pour les arbres dans ([Coo], proposition 6.1) il existe des réels  $h_0 \geq 0$  et  $C \geq 1$  tels que, pour tout  $h \geq h_0$  et pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , on a:

$$\mu_x(O(x, \gamma x, h)) \leq C e^{2dh} e^{-d|x-\gamma x|}.$$

Par conséquent, si la série de Poincaré converge pour  $s = d$ , on a, pour tout  $h \geq h_0$ ,



$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \mu_x(O(x, \gamma x, h)) < \infty,$$

et donc, d'après le lemme de Borel-Cantelli,

$$\mu_x(E_h) = 0.$$

Comme  $E_h \subset E_{h'}$ , pour  $h \leq h'$ , et comme  $A_c = \cup_{h \geq 0} E_h$  d'après la proposition précédente, on obtient alors  $\mu_x(A_c) = 0$ .

Le théorème précédent donne le théorème A puisque l'ergodicité de  $(\Omega, \varphi_t, m)$  équivaut à  $\mu_x(A_c) \neq 0$  ([CP], théorème 5.2).

REMARQUE. La démonstration que l'on vient de donner du théorème A est une adaptation d'arguments de Sullivan ([Sul], voir aussi [Nic], [Yue]).

### §3. Chaîne de Markov associée à une densité conforme sur le bord d'un arbre homogène; démonstration du théorème B.

Considérons un arbre  $k$ -homogène  $X$  avec  $k \geq 3$  muni de sa métrique canonique et soit  $S$  l'ensemble des sommets de  $X$ . Deux sommets  $x$  et  $y$  sont dits *voisins* si  $|x - y| = 1$ , c'est-à-dire si  $x$  et  $y$  sont reliés par une arête.

La *chaîne équilibrée* sur  $S$  est la chaîne de Markov  $P$  définie par  $P(x, y) = \frac{1}{k}$  si les sommets  $x$  et  $y$  sont voisins et  $P(x, y) = 0$  sinon.

Rappelons que pour tout  $\lambda < 1$ , le  $\lambda$ -noyau de Green associé à la chaîne de Markov  $P$  est l'application  $G_\lambda: S \times S \rightarrow [0, \infty]$  défini par

$$G_\lambda(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \lambda)^{-n-1} P^n(x, y),$$

où  $P^n$  est le produit matriciel de  $P$  avec lui-même  $n$  fois.

Posons

$$\lambda_0 = 1 - 2 \frac{\sqrt{k-1}}{k}.$$

Le résultat suivant est dû à Kesten (voir [Kes]).

PROPOSITION 3.1. *Pour tout  $\lambda \leq \lambda_0$ , on a  $G_\lambda(x, y) = \alpha \beta^{|x-y|}$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les deux constantes strictement positives suivantes:  $\beta$  est la plus petite racine de l'équation*

$$(3.1.1) \quad \frac{k-1}{k} \beta^2 - (1-\lambda)\beta + \frac{1}{k} = 0,$$

et

$$\alpha = \frac{1}{1 - \lambda - \beta}.$$

Pour  $\lambda_0 < \lambda < 1$ , la chaîne de Markov  $P$  est  $\lambda$ -récurrente (c'est-à-dire, pour tout  $x, y \in S$ ,  $G_\lambda(x, y) = \infty$ ).

Soit  $\mu = (\mu_x)_{x \in X}$  une densité conforme de dimension  $d$  sur  $\partial X$ . On définit la fonction  $\phi_\mu: S \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\phi_\mu(x) = \mu_x(\partial X) \quad \forall x \in S.$$

Remarquons tout de suite que l'on a  $\phi_\mu(x) > 0$  pour tout  $x \in S$ , et que

$$(3.1.2) \quad \phi_\mu(x) = \int_{\partial X} j^d(x_0, x, \xi) d\mu_{x_0}(\xi), \quad \forall x_0 \in X.$$

LEMME 3.2. Pour tout  $d \geq 0$  et pour tout  $x_0 \in X$  et  $\xi \in \partial X$  fixés, la restriction à  $S$  de la fonction  $x \mapsto j^d(x_0, x, \xi)$  est  $\lambda$ -harmonique, avec

$$\lambda = \frac{1}{k} (1 - e^{-d})(k - 1 - e^d).$$

DÉMONSTRATION. Pour calculer la valeur de cette fonction en un point  $x \in S$ , on utilisera la formule  $j(x_0, x, \xi) = e^{b_r(x_0) - b_r(x)}$  donnée en (1.3), où  $b_r$  est la fonction de Busemann associée au rayon géodésique  $r: [0, \infty[ \rightarrow X$  vérifiant  $r(0) = x$  et  $r(\infty) = \xi$ . On a ainsi  $b_r(x) = 0$ . Les  $k$  points voisins de  $x$  sont: le point  $r(1)$ , pour lequel on a  $b_r(r(1)) = -1$ , et  $k - 1$  autres points, où la fonction  $b_r$  prend la valeur  $+1$ . On a donc:

$$\begin{aligned} Pj^d(x_0, x, \xi) &= \frac{1}{k} e^{d(b_r(x_0) + 1)} + \frac{k - 1}{k} e^{d(b_r(x_0) - 1)} \\ &= \frac{1}{k} e^d j^d(x_0, x, \xi) + \frac{k - 1}{k} e^{-d} j^d(x_0, x, \xi), \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \Delta j^d(x_0, x, \xi) &= j^d(x_0, x, \xi) - Pj^d(x_0, x, \xi) \\ &= \frac{1}{k} (1 - e^{-d})(k - 1 - e^d) j^d(x_0, x, \xi). \end{aligned}$$

Par linéarité, on déduit du lemme 3.2 et de la formule (3.1.2) la

PROPOSITION 3.3.  $\phi_\mu$  est  $\lambda$ -harmonique avec  $\lambda = \frac{1}{k} (1 - e^{-d})(k - 1 - e^d)$ .

Soit  $\Gamma$  un groupe d'isométries de  $X$  agissant proprement sur cet espace, et supposons que la densité conforme  $\mu$  est  $\Gamma$ -invariante.

PROPOSITION 3.4. *La fonction  $\phi_\mu$  est  $\Gamma$ -invariante.*

DÉMONSTRATION. Soit  $\Gamma$  un élément de  $\Gamma$ . On a, en utilisant l'invariance de la densité  $\mu$ :

$$\phi_\mu(\gamma x) = \mu_{\gamma x}(\partial X) = \mu_{\gamma x}(\gamma \partial X) = \mu_x(\partial X) = \phi_\mu(x).$$

Posons, pour  $x$  et  $y$  dans  $S$ ,

$$P_\mu(x, y) = (1 - \lambda)^{-1} \frac{\phi_\mu(y)}{\phi_\mu(x)} P(x, y).$$

La  $\lambda$ -harmonicité de  $\phi_\mu$  (proposition 3.3) montre que  $P_\mu$  est une chaîne de Markov sur  $S$  et l'on vérifie par récurrence que l'on a, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$(3.4.1) \quad P_\mu^n(x, y) = (1 - \lambda)^{-n} \frac{\phi_\mu(y)}{\phi_\mu(x)} P^n(x, y).$$

La  $\Gamma$ -invariance de  $\phi_\mu$  montre que la chaîne de Markov  $P_\mu$  est  $\Gamma$ -invariante. Elle induit sur l'ensemble  $\bar{S} = S/\Gamma$  une chaîne quotient  $\bar{P}_\mu$  définie par

$$\bar{P}_\mu(\Gamma x, \Gamma y) = \sum_{y' \in \Gamma y} P_\mu(x, y').$$

Soit  $G_\mu$  le noyau Green de  $P_\mu$ , c'est à dire l'application  $G_\mu: S \times S \rightarrow [0, \infty]$  définie par

$$G_\mu(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_\mu^n(x, y).$$

La relation (3.4.1) donne:

$$(3.4.2) \quad G_\mu(x, y) = (1 - \lambda) \frac{\phi_\mu(y)}{\phi_\mu(x)} G_\lambda(x, y).$$

Pour tout  $x$  dans  $\Gamma$ , on notera  $\bar{x} = \Gamma x$  sa projection dans  $\bar{S} = S/\Gamma$ . Le noyau de Green de  $\bar{P}_\mu$  est donné, pour tout  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  dans  $\bar{S}$ , par

$$\bar{G}_\mu(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}_\mu^n(\bar{x}, \bar{y}).$$

PROPOSITION 3.5. *Supposons  $d \geq \frac{1}{2} \log(k - 1)$ . On a, pour tout  $x, y \in S$ ,*

$$\bar{G}_\mu(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha \frac{(1 - \lambda)}{N_y} \frac{\phi_\mu(y)}{\phi_\mu(x)} \mathcal{P}_d(x, y),$$

où  $\mathcal{P}_d(x, y)$  est la série de Poincaré d'exposant  $d$ ,  $\alpha$  la constante de la proposition 3.1 et  $N_y$  le cardinal du stabilisateur de  $y$  dans  $\Gamma$ .

DÉMONSTRATION. On a:

$$(3.5.1) \quad \lambda = \frac{1}{k}(1 - e^{-d})(k - 1 - e^d).$$

D'où

$$\lambda \leq \lambda_0 = 1 - 2 \frac{\sqrt{k-1}}{k}.$$

On est donc dans l'hypothèse d'application de la première partie de la proposition 3.1. En notant, comme ci-dessus,  $G_\lambda$  le  $\lambda$ -noyau de Green de la chaîne  $P$ , on peut écrire, pour tout  $x$  et  $y$  dans  $S$ :

$$\begin{aligned} \overline{G}_\mu(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{y' \in \bar{y}} G_\mu(x, y') \\ &= (1 - \lambda) \frac{\phi_\mu(y)}{\phi_\mu(x)} \sum_{y' \in \bar{y}} G_\lambda(x, y') \quad (\text{par (3.4.2)}) \\ &= (1 - \lambda) \frac{\phi_\mu(y)}{\phi_\mu(x)} \sum_{y' \in \bar{y}} \alpha \beta^{|x-y'|} \quad (\text{proposition 3.1}). \end{aligned}$$

La formule (3.5.1) et l'hypothèse  $d \geq \frac{1}{2} \log(k - 1)$  montrent que  $b = e^{-d}$  est la plus petite solution de l'équation

$$(3.5.2) \quad \frac{k-1}{k} b^2 - (1 - \lambda)b + \frac{1}{k} = 0,$$

qui n'est autre que l'équation (3.1.1).

On a donc  $\beta = e^{-d}$ , d'où:

$$\begin{aligned} \overline{G}_\mu(\bar{x}, \bar{y}) &= \alpha(1 - \lambda) \frac{\phi_\mu(y)}{\phi_\mu(x)} \sum_{y' \in \bar{y}} e^{-d|x-y'|} \\ &= \alpha \frac{(1 - \lambda)}{N_y} \frac{\phi_\mu(y)}{\phi_\mu(x)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-d|x-\gamma y|} \\ &= \alpha \frac{(1 - \lambda)}{N_y} \frac{\phi_\mu(y)}{\phi_\mu(x)} \mathcal{P}_d(x, y). \end{aligned}$$

Le théorème découle alors de la proposition 3.5, puisque la récurrence de la chaîne  $\overline{P}_\mu$  équivaut à  $\overline{G}_\mu(\bar{x}, \bar{y}) = \infty$  pour tout  $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{S}$ .

#### §4. La densité conforme comme mesure de frappe.

On garde les mêmes notations que celles de la section précédente. Soit  $W^+ = S^{\mathbb{N}}$  (resp.  $W = S^{\mathbb{Z}}$ ) l'ensemble des suites infinies (resp. bi-infinies) d'éléments de  $S$ . On munit  $S$  de la topologie discrète, et  $W^+$  (resp.  $W$ ) de la topologie produit. Le *décalage à droite* sur  $W$  est l'homéomorphisme  $\sigma: W \rightarrow W$  défini par  $\sigma(w) = w'$  avec  $w'(n) = w(n-1)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  (resp.  $n \in \mathbb{Z}$ ), on note  $X_n^+$  (resp.  $X_n$ ) la projection sur le  $n$ -ième facteur de  $W^+$  (resp.  $W$ ).

La tribu des boréliens de  $W^+$  est engendrée par les *cylindres*, c'est à dire les ensembles de la forme

$$(X_0^+ = x_0, X_1^+ = x_1, \dots, X_n^+ = x_n) = \{w \in W^+ \mid w(0) = x_0, w(1) = x_1, \dots, w(n) = x_n\},$$

où  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in S^{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . On pose pour un tel cylindre

$$\begin{aligned} \nu(X_0^+ = x_0, X_1^+ = x_1, \dots, X_n^+ = x_n) &= \phi_\mu(x_0)P_\mu(x_0, x_1)P_\mu(x_1, x_2) \dots P_\mu(x_{n-1}, x_n) \\ &= (1 - \lambda)^{-n}P(x_0, x_1)P(x_1, x_2) \dots P(x_{n-1}, x_n)\phi_\mu(x_n). \end{aligned}$$

Le théorème d'extension de Kolmogorov permet de montrer que  $\nu$  s'étend de manière unique en une mesure (notée aussi  $\nu$ ) sur  $W^+$ .

La tribu des boréliens de  $W$  est engendrée par les cylindres de la forme

$$\begin{aligned} (X_i = x_0, X_{i+1} = x_1, \dots, X_{i+n} = x_n) \\ = \{w \in W \mid w(i) = x_0, w(i+1) = x_1, \dots, w(i+n) = x_n\}, \end{aligned}$$

où  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in E^{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ . On pose pour un tel cylindre

$$\begin{aligned} \theta(X_i = x_0, X_{i+1} = x_1, \dots, X_{i+n} = x_n) &= \phi_\mu^2(x_0)P_\mu(x_0, x_1)P_\mu(x_1, x_2) \dots P_\mu(x_{n-1}, x_n) \\ &= (1 - \lambda)^{-n}P(x_0, x_1)P(x_1, x_2) \dots P(x_{n-1}, x_n)\phi_\mu(x_0)\phi_\mu(x_n). \end{aligned}$$

Toujours d'après le théorème d'extension de Kolmogorov, et en utilisant cette fois-ci le fait que  $\phi_\mu^2 P_\mu = \phi_\mu^2$  (c'est à dire que l'on a pour tout  $x \in S$ ,  $\sum_y \phi_\mu^2(y)P_\mu(y, x) = \phi_\mu^2(x)$ ) dans la vérification des conditions de compatibilité,  $\theta$  se prolonge de manière unique en une mesure (notée aussi  $\theta$ ) sur  $W$ . Il est clair que  $\theta$  est invariante par le décalage  $\sigma$ .

Pour  $x \in S$ , soit  $W_x^+ \subset W^+$  le cylindre défini par  $(X_0^+ = x)$  et  $W_x \subset W$  le cylindre défini par  $(X_0 = x)$ . On définit les mesures  $\nu_x$  sur  $W^+$  et  $\theta_x$  sur  $W$  par

$$\nu_x(A) = \nu(A \cap W_x^+) \text{ pour tout borélien } A \subset W^+$$

et

$$\theta_x(A) = \theta(A \cap W_x) \text{ pour tout borélien } A \subset W.$$

On a donc, en particulier,  $\nu_x(W^+) = \nu_x(W_x^+) = \phi_\mu(x)$  et  $\theta_x(W) = \theta_x(W_x) = \phi_\mu^2(x)$ .

Identifions  $W_x$  à  $W_x^+ \times W_x^+$  à l'aide de l'homéomorphisme  $W_x \rightarrow W_x^+ \times W_x^+$  qui à  $w \in W_x$  associe  $(w^-, w^+)$  avec  $w^-(n) = w(-n)$  et  $w^+(n) = w(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

PROPOSITION 4.1. On a  $\theta_x = v_x \times v_x$ .

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier que  $\theta_x$  et  $v_x \times v_x$  coïncident sur les cylindres de la forme  $(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0, \dots, X_m = x_m)$  où  $n \leq 0 \leq m$  et  $x_0 = x$ . Cette vérification est immédiate à partir de la relation  $\phi_\mu^2(x)P_\mu(x, y) = \phi_\mu^2(y)P_\mu(y, x)$ , valable pour tout  $x$  et  $y$  dans  $S$ .

On donne maintenant des formules simples pour les mesures  $v$  et  $\theta$  des cylindres dans les espaces de suites  $W^+$  et  $W$ .

On dira qu'une suite (finie ou infinie) d'éléments de  $S$  est *connexe* si deux éléments consécutifs de la suite sont toujours voisins dans l'arbre.

PROPOSITION 4.2. On a  $v(X_0^+ = x_0, X_1^+ = x_1, \dots, X_n^+ = x_n) \neq 0$  si et seulement si la suite  $x_0, x_1, \dots, x_n$  est connexe, et dans ce cas on a :

$$v(X_0^+ = x_0, X_1^+ = x_1, \dots, X_n^+ = x_n) = \frac{(1 - \lambda)^{-n}}{k^n} \phi_\mu(x_n).$$

De même on a  $\theta(X_i = x_0, X_{i+1} = x_1, \dots, X_{i+n} = x_n) \neq 0$  si et seulement si la suite  $x_0, x_1, \dots, x_n$  est connexe, et dans ce cas on a :

$$\theta(X_i = x_0, X_{i+1} = x_1, \dots, X_{i+n} = x_n) = \frac{(1 - \lambda)^{-n}}{k^n} \phi_\mu(x_0)\phi_\mu(x_n).$$

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate des définitions.

COROLLAIRE 4.3. Le sous-ensemble  $N^+ \subset W^+$  (resp.  $N \subset W$ ) formé des suites  $w$  qui ne sont pas connexes est un borélien de  $v$ -mesure nulle (resp. de  $\theta$ -mesure nulle).

DÉMONSTRATION. L'ensemble  $N^+$  est la réunion dénombrable des cylindres

$$(X_0^+ = x_0, X_1^+ = x_1, \dots, X_n^+ = x_n),$$

où  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  décrit l'ensemble des suites finies non connexes de sommets de  $X$ . L'énoncé relatif à  $N$  se démontre de manière analogue.

Soient maintenant  $x$  et  $y$  deux sommets quelconques de  $X$ . Etant données une suite finie  $u = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  de sommets de  $X$  allant de  $x_0 = x$  à  $x_n = y$  et une suite  $v \in W_y^+$ , on notera  $uv$  la suite  $w \in W_x^+$  définie par  $w(i) = x_i$  pour  $0 \leq i \leq n$  et  $w(i) = v(i - n)$  pour  $i \geq n$ . On a le

COROLLAIRE 4.4. Soit  $F$  l'ensemble des suites connexes finies de sommets de

$X$  allant de  $x$  à  $y$ . Soient  $A \subset W_x^+$  et  $B \subset W_y^+$  deux ensembles boréliens de suites connexes tels que l'application de concaténation  $(u, v) \mapsto uv$  définisse une bijection de  $F \times B$  sur  $A$ . Alors on a  $v_x(A) = (1 - \lambda)G_\lambda(x, y)v_y(B)$ .

DÉMONSTRATION. Pour  $u = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in F$ , notons  $A_u$  l'ensemble des suites  $w \in A$  de la forme  $w = uv$ ,  $v \in B$ . La proposition 4.2 donne immédiatement

$$v_x(A_u) = (1 - \lambda)^{-n}P(x_0, x_1)P(x_1, x_2) \dots P(x_{n-1}, x_n)v_y(B).$$

La formule annoncée s'obtient alors en remarquant que les  $A_u$ ,  $u \in F$ , forment une partition de  $A$ .

Si une suite  $w \in W^+$  converge vers un point  $\xi \in \partial X$ , on pose  $X_\infty^+(w) = \xi$ . Etant donné  $A \subset \partial X$ , on note  $(X_\infty^+ \in A)$  l'ensemble des suites  $w \in W^+$  qui convergent vers un point de  $A$ .

On a maintenant le

THÉORÈME 4.5. *Supposons  $d \geq \frac{1}{2} \log(k - 1)$ . Soit  $x$  un sommet de l'arbre  $X$ . Alors,  $v_x$ -presque tout  $w \in W^+$  converge vers un point de  $\partial X$ . De plus, la mesure  $\mu_x$  est l'image de  $v_x$  par  $X_\infty^+$ . Autrement dit, pour tout borélien  $A \subset \partial X$ , l'ensemble  $(X_\infty^+ \in A)$  est un borélien de  $W^+$  et l'on a*

$$(4.5.1) \quad v_x(X_\infty^+ \in A) = \mu_x(A).$$

La démonstration du théorème 4.5, que l'on a découpée en une suite de lemmes, s'inspire de la démonstration du théorème 3.1 de [Car].

LEMME 4.6. *On a*

$$j^d(x, y, z) = \frac{G_\lambda(y, z)}{G_\lambda(x, z)}$$

pour tous les  $x, y, z \in \mathcal{S}$ .

DÉMONSTRATION. La condition  $d \geq \frac{1}{2} \log(k - 1)$  implique, comme dans la démonstration de la proposition 3.5, que l'on a  $G_\lambda(x, y) = \alpha\beta^{|x-y|}$  avec  $\alpha > 0$  et  $\beta = e^{-d}$ , d'où  $\frac{G_\lambda(y, z)}{G_\lambda(x, z)} = \frac{\alpha\beta^{|y-z|}}{\alpha\beta^{|x-z|}} = \beta^{|y-z|-|x-z|} = e^{d(|x-z|-|y-z|)} = j^d(x, y, z)$ .

On fixe à partir de maintenant le sommet  $x$ . Pour tout entier  $n \geq 0$ , on note  $S(n)$  (resp.  $B(n)$ ) l'ensemble des sommets de  $X$  à distance  $n$  (resp.  $\leq n$ ) de  $x$ .

Le support d'une fonction  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  est l'ensemble des  $x \in S$  tels que  $f(x) \neq 0$ . Si la fonction  $f$  est de support fini, il est clair que la fonction  $G_\lambda f$  est bien définie.

LEMME 4.7. *Soient  $f_1, f_2: S \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que les supports de  $f_1$  et  $f_2$  sont contenus dans  $B(n)$  et que pour tout  $y \in B(n)$ , on a  $G_\lambda f_1(y) = G_\lambda f_2(y)$ . Alors  $f_1 = f_2$ .*

DÉMONSTRATION. Considérons un sommet  $y'$  qui n'appartient pas à  $B(n)$ . Soit  $z$  le point de  $S(n)$  situé sur le segment géodésique  $[x, y']$ .

Pour tout  $y \in B(n)$ , on a  $|y' - y| = |y' - z| + |z - y|$  et donc, d'après la proposition 3.1,  $G_\lambda(y', y) = \beta^{|z-y'|} G_\lambda(z, y)$ .

On a d'autre part

$$\begin{aligned} G_\lambda f_1(y') &= \sum_{y \in B(n)} G_\lambda(y', y) f_1(y) \\ &= \beta^{|z-y'|} \sum_{y \in B(n)} G_\lambda(z, y) f_1(y) \\ &= \beta^{|z-y'|} G_\lambda f_1(z) \\ &= \beta^{|z-y'|} G_\lambda f_2(z) \\ &= G_\lambda f_2(y'). \end{aligned}$$

Il en résulte que les fonctions  $G_\lambda f_1$  et  $G_\lambda f_2$  coïncident sur  $S$  tout entier. On en déduit  $f_1 = f_2$  en utilisant l'indentité  $I + PG_\lambda = (1 - \lambda)G_\lambda$  valable pour le noyau de Green  $G_\lambda$ , ce qui démontre le lemme 4.7.

Pour tout sommet  $z$ , notons  $O(z)$  l'ensemble des points  $\xi$  de  $\partial X$  tels que le rayon géodésique  $[x, \xi]$  passe par  $z$  (concrètement,  $O(z)$  est l'ombre que  $z$  fait sur  $\partial X$  quand la source lumineuse est en  $x$ ).

LEMME 4.8. Soit  $n$  un entier  $\geq 0$ . Soit  $f_1$  la fonction sur  $S$  définie par

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{\mu_x(O(z))}{G_\lambda(x, z)} \quad \text{si } z \in S(n), \\ &= 0 \quad \text{si } z \in S \setminus S(n). \end{aligned}$$

Alors, on a

$$\phi_\mu(y) = G_\lambda f_1(y) \quad \text{pour tout } y \in B(n).$$

DÉMONSTRATION. On a:

$$\phi_\mu(y) = \mu_y(\partial X) = \int_{\partial X} j^d(x, y, \xi) d\mu_x(\xi) = \sum_{z \in S(n)} \int_{O(z)} j^d(x, y, \xi) d\mu_x(\xi),$$

car les  $O(z)$ ,  $z \in S(n)$ , forment une partition de  $\partial X$ .

Or, si  $y$  est un point de  $B(n)$ , on voit que  $j(x, y, \xi) = j(x, y, z)$  pour tous les  $z \in S(n)$ ,  $\xi \in O(z)$ . Par conséquent, pour tout  $y \in B(n)$ , on a



$$\begin{aligned} \phi_\mu(y) &= \sum_{z \in S(n)} f^d(x, y, z) \mu_x(O(z)) \\ &= \sum_{z \in S(n)} \frac{G_\lambda(y, z)}{G_\lambda(x, z)} \mu_x(O(z)) \quad \text{d'après le lemme 4.6} \\ &= G_\lambda f_1(y), \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme 4.8.

LEMME 4.9. *Pour tout borélien  $A \subset \partial X$ , l'ensemble  $(X_\infty^+ \in A)$  est un borélien de  $W^+$ .*

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que l'ensemble  $(X_\infty^+ \in \partial X)$ , formé des suites  $w \in W^+$  qui convergent vers un point de  $\partial X$ , est un borélien de  $W^+$ . On va utiliser pour cela la caractérisation de la convergence vers un point du bord en termes de produit de Gromov. Rappelons que le *produit de Gromov* (relativement à  $x$ ) de deux points  $x_1$  et  $x_2$  de  $X$  est le réel  $(x_1, x_2)$  défini par  $(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(|x - x_1| + |x - x_2| - |x_1 - x_2|)$ , et que la suite  $w \in W^+$  converge vers un point du bord si et seulement si  $\lim_{i, j \rightarrow \infty} (w(i), w(j)) = \infty$ . Comme les projections  $X_i^+ : w \mapsto w(i)$  de  $W^+$  sur  $S$  sont continues, on en déduit que  $(X_\infty^+ \in \partial X)$  est un borélien de  $W^+$ .

Montrons maintenant que  $(X_\infty^+ \in A)$  est un borélien de  $W^+$  pour tout borélien  $A \subset \partial X$ . Il suffit pour cela de le montrer pour  $A = O(z)$ ,  $z \in S$ , car les  $O(z)$  engendrent la tribu des boréliens de  $\partial X$ . Or,

$$(X_\infty^+ \in O(z)) = (X_\infty^+ \in \partial X) \cap \left\{ w \in W^+ \text{ tel que } \lim_{i \rightarrow \infty} (z, w(i)) = |x - z| \right\},$$

ce qui montre que  $(X_\infty^+ \in O(z))$  est un borélien de  $W^+$ .

LEMME 4.10.  *$v_x$ -presque tout  $w \in W^+$  converge vers un point du bord.*

DÉMONSTRATION. D'après le corollaire 4.3, il suffit de montrer que l'ensemble  $E \subset W_x^+$  formé des chemins connexes issus de  $x$  qui ne convergent pas vers un point du bord est de  $v_x$ -mesure nulle. Or, étant donné  $w \in E$ , il existe un sommet  $y$  de  $X$  tel que  $w$  passe une infinité de fois par  $y$ . En effet, dans le cas contraire, on pourrait, par compacité de  $S \cup \partial X$ , extraire deux suites  $w_1$  et  $w_2$  de  $w$  convergeant respectivement vers  $\xi_1, \xi_2 \in \partial X$  avec  $\xi_1 \neq \xi_2$ . Mais alors, le chemin  $w$  devrait passer une infinité de fois par tout sommet situé sur la géodésique  $]\xi_1, \xi_2[$ , ce qui aboutirait à une contradiction.

D'après la proposition 4.2, on a

$$v_x(X_n^+ = y) = (1 - \lambda)^{-n} P^n(x, y) \phi_\mu(y),$$

et donc

$$\sum_{n \geq 0} v_x(X_n^+ = y) = (1 - \lambda)G_\lambda(x, y)\phi_\mu(y) < \infty.$$

Par conséquent, l'ensemble des chemins qui passent une infinité de fois par  $y$  est de  $v_x$ -mesure nulle (lemme de Borel-Cantelli). L'ensemble des sommets de  $X$  étant dénombrable, on en déduit  $v_x(E) = 0$ .

LEMME 4.11. Soit  $n$  un entier  $\geq 0$  et soit  $f_2$  la fonction sur  $S$  définie par

$$f_2(z) = \frac{v_x(X_\infty^+ \in O(z))}{G_\lambda(x, z)} \quad \text{si } z \in S(n),$$

$$= 0 \quad \text{si } z \in S \setminus S(n).$$

Alors, on a

$$\Phi_\mu(y) = G_\lambda f_2(y) \quad \text{pour tout } y \in B(n).$$

DÉMONSTRATION. Soit  $y$  un point de  $B(n)$  et  $z$  un point de  $S(n)$ . Notons  $N_z$  l'ensemble des suites connexes  $w \in W^+$  qui convergent vers un point de  $O(z)$  et telles que  $w(0) = z$  et  $w(i) \neq z$  pour tout  $i \geq 1$ . Toute suite connexe  $w' \in W_y^+$  qui converge vers un point de  $O(z)$  passe un nombre fini non nul de fois par  $z$ . Une suite connexe  $w' \in W_y^+$  appartient donc à  $(X_\infty^+ \in O(z))$  si et seulement s'il existe un entier  $n \geq 0$  et  $w \in N_z$  tels que  $w'(n + i) = w(i)$  pour tout  $i \geq 0$ . De plus,  $n$  et  $w$  sont alors déterminés de manière unique par  $w'$ . On a donc, d'après le corollaire 4.4,

$$(4.11.1) \quad v_y(X_\infty^+ \in O(z)) = (1 - \lambda)G_\lambda(y, z)v_z(N_z).$$

En particulier:

$$(4.11.2) \quad v_x(X_\infty^+ \in O(z)) = (1 - \lambda)G_\lambda(x, z)v_z(N_z).$$

La masse totale de  $v_y$  est

$$\begin{aligned} \phi_\mu(y) &= v_y(W^+) \\ &= v_y(X_\infty^+ \in \partial X) \quad \text{d'après le lemme 4.10,} \\ &= \sum_{z \in S(n)} v_y(X_\infty^+ \in O(z)) \\ &= \sum_{z \in S(n)} (1 - \lambda)G_\lambda(y, z)v_z(N_z) \quad \text{(d'après 4.11.1)} \\ &= \sum_{z \in S(n)} \frac{G_\lambda(y, z)}{G_\lambda(x, z)} v_x(X_\infty^+ \in O(z)) \quad \text{(d'après 4.11.2)} \\ &= G_\lambda f_2(y), \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme 4.11.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.5. On a vu dans le lemme 4.9 que l'ensemble

$(X_\infty^+ \in A)$  est un borélien de  $W^+$ . Il nous reste donc seulement à établir que  $\mu_x(A) = \nu_x(X_\infty^+ \in A)$ . Il suffit de le démontrer pour  $A = O(z)$ ,  $z \in S$ . Soit  $n$  un entier  $\geq 0$  quelconque. Considérons les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  définies respectivement dans les lemmes 4.8 et 4.11. Les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  vérifient les hypothèses du lemme 4.7. On a donc, pour tout  $z \in S(n)$ ,  $f_1(z) = f_2(z)$ , ce qui donne  $\mu_x(O(z)) = \nu_x(X_\infty^+ \in O(z))$ .

### §5. Démonstration du théorème C.

On se donne toujours un arbre  $k$ -homogène  $X$  avec  $k \geq 3$ , dont l'ensemble des sommets est noté  $S$ , un groupe  $\Gamma$  d'isométries de  $X$  agissant proprement sur  $X$  et une densité conforme  $\Gamma$ -invariante  $\mu$  de dimension  $d$  sur  $\partial X$ . A la fin de cette section (dans la démonstration de la proposition 5.4), on se placera dans l'hypothèse où  $X$  est le revêtement universel d'un graphe  $k$ -régulier et où  $\Gamma$  est le groupe des automorphismes de ce revêtement.

On continue à utiliser les notations de la section précédente. Si  $A$  est un sous-ensemble de  $\partial X \times \partial X$ , on note  $((X_{-\infty}, X_\infty) \in A)$  l'ensemble des éléments  $w \in W$  tels que la suite  $(w(-n), w(n))$  tende vers un point de  $A$ .

**PROPOSITION 5.1.** *On suppose  $d \geq \frac{1}{2} \log(k-1)$ . Soit  $A$  un borélien de  $\partial^2 X$ . Alors, l'ensemble  $A' = ((X_{-\infty}, X_\infty) \in A)$  est un borélien de  $W$  et l'on a  $\theta(A') \geq \Lambda(A)$ .*

**DÉMONSTRATION.** Rappelons l'écriture  $W = \bigcup_{x \in S} W_x$ , où, pour tout  $x \in S$ ,  $W_x$  est le cylindre  $(X_0 = x)$ . Rappelons aussi que l'homéomorphisme  $W_x \rightarrow W_x^+ \times W_x^+$  défini dans la section 4 envoie la mesure  $\theta_x$  sur la mesure  $\nu_x \times \nu_x$  (proposition 4.1).

Posons  $A'_x = W_x \cap A'$ . On a alors  $A' = \bigcup_{x \in S} A'_x$ , et pour voir que  $A'$  est un borélien, il suffit de montrer que chacun des ensembles  $A'_x$  est un borélien. De plus, il suffit de considérer le cas où  $A$  est un rectangle  $A_- \times A_+$ . On écrit alors  $A'_x = W_x \cap ((X_\infty^+ \in A_-) \times (X_\infty^+ \in A_+))$ , et le théorème 4.5 implique que  $A'_x$  est un borélien.

Pour montrer que  $\theta(A') \geq \Lambda(A)$ , on peut se restreindre à une classe de sous-ensembles  $A$  formant une base de voisinages dans  $\partial^2 X$ ; on va donc supposer que  $A$  est de la forme  $A_- \times A_+ \subset \partial^2 X$  et qu'il vérifie de plus la propriété suivante: toutes les géodésiques  $g(t)$  dans l'arbre telles que  $g(-\infty) \in A_-$  et  $g(\infty) \in A_+$  passent par un sommet commun  $x \in S$ . (En effet, un voisinage quelconque de tout point de  $\partial^2 X$  contient un voisinage  $A$  de cette forme.)

On a  $\theta(A') \geq \theta(A'_x)$ . La proposition 4.1 et le théorème 4.5 donnent

$$\theta(A'_x) = \theta_x(A'_x) = \nu_x(X_\infty^+ \in A_-) \nu_x(X_\infty^+ \in A_+) = \mu_x(A_-) \mu_x(A_+).$$

D'autre part, d'après le choix de  $A_-$  et  $A_+$ , la distance visuelle  $|\xi - \eta|_x$  est égale à 1, pour tout  $\xi \in A_-$  et  $\eta \in A_+$ . La formule (1.8) de la section 1 donne alors  $\theta(A'_x) \geq \Lambda(A)$ , d'où  $\theta(A') \geq \Lambda(A)$ .

LEMME 5.2. *Pour  $\theta$ -presque tout  $w \in W$ , la suite  $(w(-n), w(n))$  a une limite dans  $\partial X \times \partial X$  quand  $n$  tend vers l'infini.*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence immédiate de la proposition 4.1 et du théorème 4.5.

On peut maintenant démontrer le

THÉORÈME 5.3. *On suppose toujours  $d \geq \frac{1}{2} \log(k - 1)$ . Si l'action conjointe de  $\Gamma$  et de  $Z$  sur  $(W, \theta)$  est ergodique, alors l'action de  $\Gamma$  sur  $\partial^2 X$  est ergodique.*

DÉMONSTRATION. Soit  $A \subset \partial^2 X$  un borélien  $\Gamma$ -invariant. Le sous-ensemble

$$A' = ((X_{-\infty}, X_{\infty}) \in A) \subset W$$

est alors  $\Gamma$ -invariant et  $Z$ -invariant. De plus,  $A'$  est un borélien de  $W$  d'après la proposition 5.1. Si l'on suppose que l'action conjointe de  $\Gamma$  et de  $Z$  sur  $W$  est ergodique, on a alors ou bien  $\theta(A') = 0$  ou bien  $\theta(W \setminus A') = 0$ .

Dans le premier cas, on a, par la proposition 5.1,

$$\Lambda(A) \leq \theta(A') = 0.$$

Dans le second cas, on a, par le lemme 5.2,

$$\theta(W \setminus A') = \theta((X_{-\infty}, X_{\infty}) \in (\partial X \times \partial X \setminus A)) = 0.$$

D'autre part, on a

$$((X_{-\infty}, X_{\infty}) \in (\partial^2 X \setminus A)) \subset ((X_{-\infty}, X_{\infty}) \in (\partial X \times \partial X \setminus A)).$$

La proposition 5.1 donne alors:

$$\Lambda(\partial^2 X \setminus A) \leq \theta((X_{-\infty}, X_{\infty}) \in (\partial^2 X \setminus A)) = 0.$$

Ainsi, dans tous les cas on a ou bien  $\Lambda(A) = 0$  ou bien  $\Lambda(\partial^2 X \setminus A) = 0$ , ce qui démontre le théorème 5.3.

On peut maintenant démontrer le théorème C. On se place donc dans le cas où  $X$  est le revêtement universel d'un graphe  $k$ -régulier  $G$  et où  $\Gamma$  est le groupe d'automorphismes de ce revêtement.

Considérons la chaîne quotient  $\overline{P}_{\mu}$  définie sur  $\overline{S} = S/\Gamma$ . La fonction  $\phi_{\mu}$  se projette en une fonction  $\overline{\phi}_{\mu}$  sur  $\overline{S}$ . On a, pour tout  $\bar{x} = \Gamma x$  et  $\bar{y} = \Gamma y$  dans  $\overline{S}$ , la relation  $\phi_{\mu}^2(\bar{x})\overline{P}_{\mu}(\bar{x}, \bar{y}) = \phi_{\mu}^2(\bar{y})\overline{P}_{\mu}(\bar{y}, \bar{x})$ . (On utilise ici le fait que les stabilisateurs par  $\Gamma$  de  $x$  et de  $y$  sont triviaux.)

On définit une mesure  $\bar{\nu}$  (resp.  $\bar{\theta}$ ) sur l'espace  $\overline{W}^+$  (resp.  $\overline{W}$ ) des suites infinies (resp. bi-infinies) d'éléments de  $\overline{S}$ , de manière analogue à la mesure  $\nu$  sur  $W^+$  (resp.  $\theta$  sur  $W$ ) construite au début de la section 4.

Supposons que la chaîne  $\overline{P}_\mu$  soit récurrente. Par un résultat classique sur les chaînes de Markov (cf. [Rev], p. 139), on sait que cela implique que l'action naturelle de  $Z$  sur l'espace mesuré  $(\overline{W}, \overline{\theta})$  est ergodique. Pour compléter la démonstration du théorème C, il reste donc, vu le résultat du théorème 5.3, à montrer la

**PROPOSITION 5.4.** *Si l'action de  $Z$  sur  $(\overline{W}, \overline{\theta})$  est ergodique, alors l'action conjointe de  $Z$  et  $\Gamma$  sur  $(W, \theta)$  est ergodique.*

**DÉMONSTRATION.** Supposons que l'action de  $Z$  sur  $(\overline{W}, \overline{\theta})$  soit ergodique. Considérons un borélien  $A \subset W$  qui est  $Z$  et  $\Gamma$ -invariant et soit  $\overline{A} \subset \overline{W}$  sa projection dans  $\overline{W}$ . L'ensemble  $\overline{A}$  est, comme  $A$ ,  $Z$ -invariant, et l'on a donc par hypothèse, ou bien  $\overline{\theta}(\overline{A}) = 0$ , ou bien  $\overline{\theta}(\overline{W} \setminus \overline{A}) = 0$ .

Supposons  $\overline{\theta}(\overline{A}) = 0$ , et montrons que cela implique  $\theta(A) = 0$ .

Pour cela, posons, pour tout  $x \in S$ ,  $A_x = A \cap W_x$ . Il suffit alors de montrer que  $\theta_x(A_x) = 0$ . (En effet,  $A$  est la réunion dénombrable des  $A_x$ .)

De la même manière, posons  $\overline{A}_x = \overline{A} \cap \overline{W}_x$ . On a alors, pour tout  $x$ ,  $\overline{\theta}_x(\overline{A}_x) = 0$ . Les hypothèses sur l'action de  $\Gamma$  impliquent que tout chemin connexe dans  $\overline{A}_x$  se relève de manière unique en un chemin connexe dans  $A_x$ . On a alors le

**LEMME 5.5.** *Pour tout borélien  $A_x \subset W_x$ , on a  $\overline{\theta}_x(\overline{A}_x) = \theta_x(A_x)$ .*

**DÉMONSTRATION.** Il suffit de considérer le cas où  $A_x$  est un cylindre de la forme:

$$\mathcal{C} = (X_n = x_n, \dots, X_{-1} = x_{-1}, X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m) \subset W_x,$$

(avec  $x_0 = x$ ).

$\overline{A}_x$  est donc le cylindre  $\overline{\mathcal{C}}$  défini par

$$\overline{\mathcal{C}} = (X_n = \overline{x}_n, \dots, X_{-1} = \overline{x}_{-1}, X_0 = \overline{x}_0, X_1 = \overline{x}_1, \dots, X_m = \overline{x}_m) \subset \overline{W}.$$

En utilisant la proposition 4.1, on a  $\theta_x = \nu_x \times \nu_x$ . On montre de même que  $\overline{\theta}_x = \overline{\nu}_x \times \overline{\nu}_x$ . On a donc:

$$\begin{aligned} \theta_x(\mathcal{C}) &= (1 \times \lambda)^{-m} P(x_0, x_1) \dots P(x_{m-1}, x_m) \phi_\mu(x_m) \\ &\quad \times (1 - \lambda)^n P(x_0, x_{-1}) \dots P(x_{n+1}, x_n) \phi_\mu(x_n), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \overline{\theta}_x(\overline{\mathcal{C}}) &= (1 - \lambda)^{-m} \overline{P}(\overline{x}_0, \overline{x}_1) \dots \overline{P}(\overline{x}_{m-1}, \overline{x}_m) \overline{\phi}_\mu(\overline{x}_m) \\ &\quad \times (1 - \lambda)^n \overline{P}(\overline{x}_0, \overline{x}_{-1}) \dots \overline{P}(\overline{x}_{n+1}, \overline{x}_n) \overline{\phi}_\mu(\overline{x}_n). \end{aligned}$$

Or, on a, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\overline{P}(\overline{x}_0, \overline{x}_1) \overline{P}(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \dots \overline{P}(\overline{x}_{n-1}, \overline{x}_n) = \sum P(y_0, y_1) P(y_1, y_2) \dots P(y_{n-1}, y_n),$$

où  $x_0 = x$  et où la somme est prise sur les  $y_i$  tels que  $y_0 = x_0 = x$ ,  $\bar{y}_1 = \bar{x}_1, \dots, \bar{y}_n = \bar{x}_n$ . Comme  $(x_n, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_m)$  est le seul chemin connexe au-dessus du chemin  $(\bar{x}_n, \dots, \bar{x}_{-1}, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$  vérifiant  $x_0 = x$ , tous les termes dans la somme sont nuls sauf un, et on a

$$\bar{P}(\bar{x}_0, \bar{x}_1)\bar{P}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\dots\bar{P}(\bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n) = P(x_0, x_1)P(x_1, x_2)\dots P(x_{n-1}, x_n).$$

On en déduit la formule recherchée.

Supposons maintenant  $\bar{\theta}(\bar{W} \setminus \bar{A}) = 0$ . En utilisant de nouveau le fait que  $X$  est le revêtement universel du graphe simplicial  $X/\Gamma$ , on voit que tout chemin connexe de  $W \setminus A$  se projette en un chemin connexe de  $\bar{W} \setminus \bar{A}$ . On en déduit  $\theta(W \setminus A) = 0$  comme précédemment. Cela démontre la proposition 5.4 et achève la démonstration du théorème C.

NOTE. Le referee de cet article nous signale que le théorème C peut se déduire de l'article de Kaimanovich [Kai] de la façon suivante: Sous les hypothèses du théorème C, la mesure  $\mu_x$  coïncide avec la mesure qui représente la fonction  $\phi_\mu$  dans l'espace des fonctions  $\lambda$ -harmonique extrémales pour l'opérateur  $P$ . Ainsi,  $\mu_x$  est la mesure qui représente la fonction constante dans l'espace des fonctions harmoniques extrémales de l'opérateur  $P_\mu$ . En d'autres termes  $(\partial X, \mu_x)$  est le bord de Poisson de  $P_\mu$ . Par le théorème 1.3 de [Kai], le groupe  $\Gamma$  agit ergodiquement sur  $(\partial X \times \partial X, \mu_x \times \mu_x)$ , ce qui implique l'ergodicité du flot géodésique.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [Car] P. Cartier, *Fonctions harmoniques sur un arbre*, Sympos. Math. 9 (1972), 203–270.
- [Coo] M. Coornaert, *Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov*, Pacific J. Math. 159 (1993), 241–270.
- [CP] M. Coornaert et A. Papadopoulos, *Une dichotomie de Hopf pour les flots géodésiques associés aux groupes discrets d'isométries des arbres*. Trans. Amer. Math. Soc. 343 (1994), 883–898.
- [Hop] E. Hopf, *Ergodic theory and the geodesic flow on surfaces of constant negative curvature*, Bull. Amer. Math. 77 (1971), 863–877.
- [Kai] V. Kaimanovich, *Ergodicity of harmonic invariant measures for geodesic flows on hyperbolic spaces*, J. Reine Angew. Math. 455 (1994), 57–103.
- [Kes] H. Kesten, *Symmetric random walks on groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 92 (1959), 336–354.
- [Krè] U. Krengel, *Ergodic Theorems*, De Gruyter, 1985.
- [Nic] P. J. Nicholls, *The Ergodic Theory of Discrete Groups*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 143, 1989.
- [Pat] S. J. Patterson, *The limit set of a Fuchsian group*, Acta Math. 136 (1971), 241–273.
- [Pol] G. Polya, *Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Strassennetz*, Math. Ann. 84 (1921), 149–160.
- [Rev] D. Revuz, *Markov Chains*, North Holland, 1985.
- [Sul] D. Sullivan, *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions*, Publ. Math. IHES 50 (1979), 171–202.

- [Var1] N. T. Varopoulos, *Théorie du potentiel sur des groupes et des variétés*, C.R. Acad. Sci. Paris 302 (1984), 203–205.
- [Var2] N. T. Varopoulos, *Green's function and harmonic functions on manifolds*, in “*Geometry of random motion*”, Contemp. Math. 73 (1988), 333–337.
- [Woe] W. Woess, *Random walks on onfinite graphs and harmonic analysis on boundary transitive graphs*, Bull. London Math. Soc. 26 (1994), 1–60.
- [Yue] C. B. Yue, *The ergodic theory of discrete isometry groups of manifolds of variable negative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. (à paraître).

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUES  
AVANCEE  
UNIVERSITE LOUIS PASTEUR ET CNRS  
7, RUE RENE DESCARTES  
67084 STRASBOURG  
FRANCE

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUES  
AVANCEE  
UNIVERSITE LOUIS PASTEUR ET CNRS  
7, RUE RENE DESCARTES  
67084 STRASBOURG  
FRANCE

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY  
PRINCETON, NJ 08540  
U.S.A.