MATH. SCAND. 79 (1996), 189–201

ESPACES DE STEIN ET FAISCEAUX LOCALEMENT LIBRES

OMAR ALEHYANE

1. Introduction.

Un espace de Stein est un espace analytique X holomorphiquement séparé et holomorphiquement convexe. Cartan et Grauert ont montré qu'un espace analytique X est de Stein si et seulement si $H^p(X, \mathscr{F}) = 0$ pour tout $p \geq 1$ et tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur X. Grauert réduisit la condition suffisante à $H^1(X, \mathscr{I}) = 0$ pour tout faisceau d'idéaux $\mathscr{I}$ sur X. Laufer a démontré qu'un domaine de Riemann X au-dessus d'une variété de Stein tel que X soit holomorphiquement séparé et les groupes de cohomologie $H^p(X, \mathscr{O})$ soient de dimensions finies pour $p \geq 1$, est une variété de Stein. Jennane a démontré qu'un espace analytique holomorphiquement séparé, de dimension n, est de Stein si les groupes de cohomologie $H^p(X, \mathscr{O})$ sont de dimensions dénombrables pour $1 \leq p \leq n-1$.

Vigna Suria a démontré qu'un ouvert relativement compact Ω d'un espace analytique fortement holomorphiquement séparé est de Stein si $H^1(\Omega, \mathscr{L}) = 0$ pour tout faisceau localement libre $\mathscr{L}$ dans Ω.

On généralise tout d'abord le résultat de Vigna Suria à un espace holomorphiquement séparé, de dimension n. Comme conséquence on démontre qu'un domaine de Riemann X, connexe de dimension n, au-dessus d'une variété de Stein est de Stein si X est holomorphiquement séparé et $H^1(X, \mathscr{L}) = 0$ pour tout faisceau localement libre sur X. Pour un espace analytique X, de dimension n, holomorphiquement séparé on donne une condition suffisante pour que X soit de Stein si $H^1(X, \mathscr{L}) = 0$ pour tout faisceau localement libre sur X.

2. Préliminaires.

Soit X un espace analytique dénombrable à l'infini. X est dit holomorphiquement séparé si pour tout $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe $f \in \mathscr{O}(X)$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

Received March 10, 1995.

X est holomorphiquement convexe si pour tout compact $K \subset X$, l'enveloppe holomorphiquement convexe $\hat{K}$ est compact dans X, avec

$$\widehat{K} = \left\{x \in X / |f(x)| \leq \sup_K |f| \quad \forall f \in \mathcal{O}(X)\right\}.$$

DÉFINITION 2.1. Un espace analytique complexe X est dit *de Stein* si:
1. X est holomorphiquement séparé,
2. X est holomorphiquement convexe.

Un espace de Stein est aussi un espace analytique sur lequel est défini une fonction continue ϕ strictement plurisousharmonique telle que les ensembles

$$\{x \in X / \phi(x) < c\}$$

sont relativement compacts dans X (voir [6]).

Un espace analytique de dimension n est fortement holomorphiquement séparé si pour tout $x_0 \in X$, il existe $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(X)$ telles que:

$$\{x_0\} = \{x \in X / f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0\}.$$

Forster et Ramspott [5] ont démontré que tout espace de Stein est fortement holomorphiquement séparé.

LEMME 2.1. *Soit X un espace analytique holomorphiquement séparé de dimension n, alors pour tout $x_0 \in X$, il existe $f_1, \ldots, f_{n+1} \in \mathcal{O}(X)$ telles que:*

$$\{x_0\} = \{x \in X / f_1(x) = \ldots = f_{n+1}(x) = 0\}.$$

Pour $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{O}(X)$, on définit le faisceau $\mathscr{L}$ par:

$$\mathscr{L}_x = \left\{(g_1, \ldots, g_k) \in \mathcal{O}_x^k / \sum_{i=1}^{k} g_i (f_i)_x = 0\right\}.$$

Un faisceau $\mathscr{L}$ de $\mathcal{O}_X$-module est dit localement libre de rang p si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que:

$$\mathscr{L}_{|U} \simeq \mathcal{O}^p_{|U}.$$

LEMME 2.2. *Si $f_1, \ldots, f_k$ sont sans zéro commun dans X, alors le faisceau $\mathscr{L}$ est localement libre dans X et la suite:*

$$0 \to \mathscr{L} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}^k \xrightarrow{\beta} \mathcal{O} \to 0$$

est exacte dans X, où α est l'inclusion et $\beta(g_1, \ldots, g_k) = \sum_{i=1}^k f_i g_i$.

DÉMONSTRATION. Soit $x \in X$, il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $f_i(x) \neq 0$; on suppose $i = 1$. Il existe un voisinage ouvert U de x tel que $f_1(y) \neq 0$ pour tout $y \in U$.

Le morphisme:

$$\pi : \mathscr{L}_{|U} \longrightarrow \mathcal{O}^{k-1}_{|U}$$

$$(g_1, \dots, g_k) \longrightarrow (g_2, \dots, g_k)$$

est bijectif. De plus si $f \in \mathcal{O}(V)$ où $V \subset U$ est un voisinage de x, on pose $g_1 = f/f_1, g_2 = \dots = g_k = 0$ dans V. On a bien $\beta(g_1, \dots, g_k) = \sum_{i=1}^{k} f_i g_i = f$, ce qui démontre que β est surjective.

Un espace analytique X est holomorphiquement convexe si pour toute suite infinie discrète $(x_k)_{k \geq 1} \subset X$, il existe $f \in \mathcal{O}(X)$ telle que f soit non bornée sur la suite $(x_k)_{k \geq 1}$ [8].

PROPOSITION 2.1. [8] *Soit X un espace holomorphiquement convexe et $(x_k)_{k \geq 1} \subset X$ une suite infinie discrète. Soit $(r_k)_k \subset R_+$ une suite de nombres réels > 0. Alors il existe $g \in \mathcal{O}(X)$ telle que:*

$$|g(x_k)| \geq r_k \quad \text{pour tout } k \geq 1.$$

3. Espaces de Stein et faisceaux localement libres.

Dans son article [16] Vigna Suria a démontré le résultat suivant:

THÉORÈME 3.1. [16] *Soit X un espace fortement holomorphiquement séparé, de dimension n, et soit $\Omega \subset X$ un ouvert vérifiant:*

$H^1(\Omega, \mathscr{L}) = 0$ pour tout $\mathscr{L}$ localement libre dans Ω. Alors Ω est de Stein dans les deux cas suivants:

1. *$\Omega \subset\subset X$ ouvert relativement compact,*
2. *X est de Stein.*

Nous obtenons ce théorème pour un espace holomorphiquement séparé de dimension n, comme conséquence du théorème suivant: (voir théorème 3.3 ci-dessous).

THÉORÈME 3.2. *Soit X un espace holomorphiquement séparé de dimension n, $\Omega \subset X$ un ouvert vérifiant:*

$H^1(\Omega, \mathscr{L}) = 0$ pour tout $\mathscr{L}$ localement libre dans Ω. Alors pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe un voisinage ouvert V de $\partial\Omega$ tel que $\widehat{K}_\Omega \cap V = \emptyset$.

DÉMONSTRATION. Soit $K \subset \Omega$. Pour $x_0 \in \partial\Omega$, il existe $f_1, \ldots, f_{n+1} \in \mathcal{O}(X)$ telles que:

$$\{x_0\} = \{x \in X / f_1(x) = \ldots = f_{n+1} = 0\}.$$

Le faisceau $\mathscr{L}$ définit par $(f_1, \ldots, f_{n+1})$ est localement libre dans Ω et la suite:

$$(S) \qquad 0 \to \mathscr{L} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}^{n+1} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O} \to 0$$

est exacte dans Ω. La suite exacte longue de cohomologie associée à (S) et l'hypothèse $H^1(\Omega, \mathscr{L}) = 0$ entrainent que l'application:

$$\Gamma(\Omega, \mathcal{O})^{n+1} \longrightarrow \Gamma(\Omega, \mathcal{O})$$

est surjective. En particulier, il existe $g_1, \ldots, g_{n+1} \in \Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ telles que: $\sum_{i=1}^{n+1} f_i g_i = 1$ dans Ω.

Soit $(x_m)_m \subset \Omega$ une suite qui converge vers x_0. Puisque $f_i(x_0) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, il existe i_0 tel que $(g_{i_0}(x_m))_m$ soit non bornée. On en déduit que $x_0 \notin \widehat{K}_\Omega$ et qu'il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que $\widehat{K}_\Omega \cap V_{x_0} = \emptyset$. $V = \bigcup_{x_0 \in \partial\Omega} V_{x_0}$ est un voisinage de $\partial\Omega$ et vérifie: $\widehat{K}_\Omega \cap V = \emptyset$.

THÉORÈME 3.3. *Soit X un espace analytique holomorphiquement séparé, de dimension n, $\Omega \subset X$ un ouvert vérifiant:*

$H^1(\Omega, \mathscr{L}) = 0$ pour tout $\mathscr{L}$ localement libre dans Ω. Alors Ω est de Stein dans les deux cas suivants:

1. *$\Omega \subset\subset X$ ouvert relativement compact,*
2. *X est de Stein.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que Ω est holomorphiquement convexe. Soit K un compact de Ω, $\hat{K}_\Omega$ est fermé dans Ω et d'après le théorème 3.2, $\hat{K}_\Omega$ ne rencontre pas la frontière $\partial\Omega$ de l'ouvert Ω:

1. si $\Omega \subset\subset X$, $\hat{K}_\Omega$ est compact dans Ω,
2. si X est de Stein, $\hat{K}_\Omega \subset\subset X$, donc $\hat{K}_\Omega$ est compact dans Ω.

3.1. *Remarque.*

Le fait d'avoir $\hat{K}_\Omega \cap V = \emptyset$ pour un compact K de Ω et V un voisinage de $\partial\Omega$ n'implique pas forcément que $\hat{K}_\Omega$ est compact dans Ω:

On considère un fibré holomorphe X, qui n'est pas de Stein et qui est à base et à fibre de Stein, $\pi : X \longrightarrow D$ ([3]). Il existe un ouvert $B \subset D$, $B \neq D$, de Stein tel que $\Omega = \pi^{-1}(B)$ ne soit pas un ouvert de Stein de X [11]. Si K est un compact de Ω, alors $\hat{K}_\Omega \subset \pi^{-1}(\widehat{\pi(K)}_B)$, donc il existe un voisinage V de $\partial\Omega$ tel que $\hat{K}_\Omega \cap V = \emptyset$.

En voulant se passer de l'hypothèse de relative compacité de l'ouvert Ω dans le théorème 3.3, on a été amené à introduire une autre notion de séparation holomorphe: *la séparation holomorphe à l'infini.*

DÉFINITION 3.1. On dira qu'un espace analytique X est *holomorphiquement séparé à l'infini* si pour toute suite infinie discrète $(x_k)_k$ de X, pour tout $x \in X$, il existe $f \in \mathcal{O}(X)$ telle que $f(x)$ ne soit pas un point d'accumulation de la suite $(f(x_k))_k$.

3.2. *Exemples.*

i) Tout espace holomorphiquement convexe est holomorphiquement séparé à l'infini. En effet si $(x_k)_k \subset X$ est une suite infinie discrète, il existe une fonction $f \in \mathcal{O}(X)$ telle que: $\lim_{k \longrightarrow +\infty} |f(x_k)| = +\infty$. Si $x \in X, f(x)$ n'est pas un point d'accumulation de $(f(x_k))_k$.

ii) Il existe des espaces séparés à l'infini qui ne sont pas convexes. En effet soit $K \subset \mathbf{C}^n$ un compact holomorphiquement convexe, $K = \hat{K}$ et $X = \mathbf{C}^n \setminus K$, $n > 1$. Alors X est holomorphiquement séparé à l'infini:

Soit $(x_k)_k \subset X$ une suite infinie discrète et $x \in X$. Si $(x_k)_k$ est discrète dans $\mathbf{C}^n$, il existe $f \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^n)$ telle que $\lim_{k \longrightarrow +\infty} |f(x_k)| = +\infty$; soit $g = f_{|X}$, $g(x)$ n'est pas un point d'accumulation de $(g(x_k))_k$. Si $(x_k)_k$ n'est pas discrète dans $\mathbf{C}^n$, soit $(x_{k_j})_j$ une sous-suite qui converge vers un point $a \in K$. $x \notin \hat{K}$, il existe $f \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^n)$ telle que:

$$|f(x)| > \sup_K |f| \geq |f(y)| \qquad \text{pour tout } y \in K.$$

Donc $f(x) \notin f(K)$, par suite $f(x)$ ne peut pas être un point d'accumulation de la suite $(f(x_k))_k$. Ce qui démontre que X est holomorphiquement séparé à l'infini. Le théorème de Hartogs implique que X n'est pas holomorphiquement convexe.

iii) Soit X l'éclaté de $\mathbf{C}^2$ en $(0, 0)$. X est une variété analytique complexe, holomorphiquement convexe mais non holomorphiquement séparé. Donc un espace holomorphiquement séparé à l'infini n'est pas forcément holomorphiquement séparé.

iv) Il existe des espaces analytiques qui ne sont pas holomorphiquement séparés à l'infini. Grauert [7] a montré l'existence d'une variété Y de dimension 2 non compact telle que:

1. Y est ramifiée à fibres finies au-dessus de $\mathbf{P}_2$,
2. Toute fonction holomorphe sur Y est constante. En particulier Y n'est pas un domaine d'holomorphie.

Signalons que Y, dans l'exemple de Grauert, n'est pas holomorphiquement séparé.

THÉORÈME 3.4. *Soit X un espace analytique holomorphiquement séparé et holomorphiquement séparé à l'infini, de dimension n, vérifiant:*

$H^1(X, \mathscr{L}) = 0$ *pour tout $\mathscr{L}$ localement libre sur X. Alors X est de Stein.*

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant:

LEMME 3.1. *Soit X un espace holomorphiquement séparé et holomorphiquement séparé à l'infini, de dimension n. Soit $(x_k)_k \subset X$ une suite infinie discrète telle que:*

$$\sup_k |f(x_k)| < +\infty \qquad \text{pour tout } f \in \mathcal{O}(X).$$

Alors il existe $f_1, \dots, f_{n+2} \in \mathcal{O}(X)$ sans zéro commun dans X et une sous-suite $(x_m)_m \subset X$ de $(x_k)_k$ telles que:

$$\lim_{m \to +\infty} f_j(x_m) = 0 \qquad \text{pour tout } 1 \leq j \leq n+2.$$

DÉMONSTRATION. Soit $g_1 \in \mathcal{O}(X)$ une fonction non constante sur aucune composante irréductible de X. La suite $(g_1(x_k))_k$ étant bornée, soit $(x_k^1)_k \subset X$ une sous-suite de $(x_k)_k$ telle que: $\lim_{k \to +\infty} g_1(x_k^1) = \alpha_1$. Posons $f_1 = g_1 - \alpha_1$ et $Y_1 = \{x \in X / \ f_1(x) = 0\}$. On a $\lim_{k \to +\infty} f_1(x_k^1) = 0$ et codim $Y_1 \geq 1$.

Il existe $g_2 \in \mathcal{O}(X)$ non constante sur aucune composante irréductible de Y_1 et une sous-suite $(x_k^2)_k$ de $(x_k^1)_k$ telle que: $\lim_{k \to +\infty} g_2(x_k^2) = \alpha_2$. Soit $f_2 = g_2 - \alpha_2$ et $Y_2 = \{x \in X / f_1(x) = f_2(x) = 0\}$, alors $\lim_{k \to +\infty} f_2(x_k^2) = 0$ et codim $Y_2 \geq 2$.

Ainsi de proche en proche, il existe $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(X)$ et une sous-suite $(x_k^n)_k$ de $(x_k)_k$ telles que:
$\lim_{k \to +\infty} f_j(x_k^n) = 0$ pour $1 \leq j \leq n$ et $Y_n = \{x \in X / f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0\}$ est discret.

Posons $Y_n = \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$. Soit $g_{n+1} \in \mathcal{O}(X)$ telle que $g_{n+1}(z_i) \neq g_{n+1}(z_j)$ pour tout $i \neq j$. Il existe une sous-suite $(x_k^{n+1})_k$ de $(x_k^n)_k$ telle que: $\lim_{k \to +\infty} g_{n+1}(x_k^{n+1}) = \alpha_{n+1}$. Posons $f_{n+1} = g_{n+1} - \alpha_{n+1}$, alors $\lim_{k \to +\infty} f_j(x_k^{n+1}) = 0$ pour tout $j = 1, \dots, n+1$.

L'ensemble $Y_{n+1} = \{x \in X / f_1(x) = \dots = f_{n+1}(x) = 0\}$ est soit vide soit réduit à un singleton $\{z_{j_0}\}$. X étant holomorphiquement séparé à l'infini, il existe $g_{n+2} \in \mathcal{O}(X)$ telle que $g_{n+2}(z_{j_0})$ ne soit pas un point d'accumulation de la suite $(g_{n+2}(x_k^{n+1}))_k$. Soit $(x_m)_m$ une sous-suite de la suite $(x_k^{n+1})_k$ telle que $\lim_{m \to +\infty} g_{n+2}(x_m) = \alpha_{n+2}$. $f_{n+2} = g_{n+2} - \alpha_{n+2}$ vérifie $\lim_{m \to +\infty} f_{n+2}(x_m) = 0$ et

$f_{n+2}(z_{j_0}) = g_{n+2}(z_{j_0}) - \alpha_{n+2} \neq 0$. Les fonctions $f_1, \ldots, f_{n+2} \in \mathcal{O}(X)$ n'ont pas de zéro commun dans X et vérifient: $\lim_{m \to +\infty} f_j(x_m) = 0$ pour tout $j = 1, \ldots, n+2$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.4. Il suffit de montrer que X est holomorphiquement convexe. Supposons le contraire, il existe alors une suite infinie discrète $(x_k)_k \subset X$ telle que:

$$\sup_k |f(x_k)| < +\infty \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{O}(X).$$

Soient $f_1, \ldots, f_{n+2} \in \mathcal{O}(X)$ sans zéro commun dans X telles que: $\lim_{m \to +\infty} f_j(x_m) = 0$ pour tout $j = 1, \ldots, n+2$. Le faisceau $\mathcal{L}$ défini par $f_1, \ldots, f_{n+2}$ est localement libre dans X, l'hypothèse $H^1(X, \mathcal{L}) = 0$ implique l'existence de fonctions $g_1, \ldots, g_{n+2} \in \mathcal{O}(X)$ telles que: $\sum_{i=1}^{n+2} f_i g_i = 1$ dans X. Il existe $i_0 \in \{1, \ldots, n+2\}$ tel que $(g_{i_0}(x_m))_m$ soit non bornée, ce qui contredit la supposition de départ. X est donc holomorphiquement convexe.

Un domaine de Riemann au-dessus d'une variété M est la donnée d'un espace topologique X et d'un homéomorphisme local $p: X \to M$.

PROPOSITION 3.1. [15] *Soit X un domaine de Riemann séparable, connexe, au-dessus d'une variété de Stein M,* $\dim X = n$. *Supposons X holomorphiquement séparé, alors X admet une enveloppe d'holomorphie $\hat{X}$ de Stein qui est aussi un domaine de Riemann au-dessus de M.*

COROLLAIRE 3.1. *Soit X un domaine de Riemann connexe au-dessus d'une variété de Stein,* $\dim X = n$ *et supposons que X est holomorphiquement séparé tel que:*

$H^1(X, \mathcal{L}) = 0$ pour tout $\mathcal{L}$ localement libre dans X. Alors X est de Stein.

DÉMONSTRATION. L'enveloppe d'holomorphie $\hat{X}$ de X est de Stein et X est un ouvert de $\hat{X}$. Le théorème 3.3 implique que X est de Stein.
On peut retrouver ce résultat comme conséquence de la proposition suivante:

PROPOSITION 3.2 *Soit X un espace holomorphiquement séparé de dimension n. Supposons que X admet une enveloppe d'holomorphie $\hat{X}$ et vérifie:*

$H^1(X, \mathcal{L}) = 0$ pour tout $\mathcal{L}$ localement libre dans X. Alors $X = \hat{X}$.

DÉMONSTRATION. Supposons $X \neq \hat{X}$, soit alors $x \in \hat{X} \cap \partial X$. $\hat{X}$ étant holomorphiquement séparé, il existe $f_1, \ldots, f_N \in \mathcal{O}(\hat{X})$ telles que:

$$\{x\} = \{y \in \hat{X} / f_1(y) = \ldots = f_N(y) = 0\}.$$

Le faisceau défini par $f_1, \ldots, f_N$ est localement libre dans X. Il existe des fonctions $g_1, \ldots, g_N \in \mathcal{O}(X)$ telles que: $\sum_{i=1}^N f_i g_i = 1$ dans X. Soit $(x_m)_m \subset X$ une suite qui converge vers x, il existe $i_0 \in \{1, \ldots, N\}$ tel que $(g_{i0}(x_m))_m$ soit non bornée. Donc g_{i_0} ne se prolonge pas au voisinage de x, ce qui contredit la définition de $\hat{X}$.

4. Spectre de l'algèbre $\mathcal{O}(X)$

Un caractère de $\mathcal{O}(X)$ est un homomorphisme de C-algèbre $\chi : \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathbf{C}$ non identiquement nul. On note Sp X le spectre de l'algèbre $\mathcal{O}(X)$. $\mathcal{O}(X)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de X est une algèbre de Frechet.

Pour chaque $x \in X$, l'application $\chi_x : \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathbf{C}$ telle que $\chi_x(f) = f(x)$ est un homomorphisme d'algèbre continue .

Pour $f \in \mathcal{O}(X)$, soit $\hat{f}$: Sp $X \longrightarrow \mathbf{C}$ l'application telle que $\hat{f}(\chi) = \chi(f)$. On munit SpX de la topologie la moins fine rendant continue les applications $\hat{f}$. Soit $\chi \in$ Sp $X, f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}(X)$ et $\epsilon > 0$, on pose:

$$V(\chi, f_1, \ldots, f_m; \epsilon) = \{\sigma \in SpX / \ |\sigma(f_j) - \chi(f_j)| < \epsilon, \ 1 \leq j \leq m\}.$$

La topologie de Sp X est définie de telle sorte que pour tout $\chi \in$ Sp X, la famille $\{V(\chi, f_1, \ldots, f_m; \epsilon) / f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}(X); \epsilon > 0\}$ forme un système fondamental de voisinage de χ. L'application naturelle $\xi : X \longrightarrow$ Sp X, qui associe à tout x l'élément χ_x, est continue . Une suite $(\chi_n)_n \subset$ Sp X converge vers $\chi \in$ Sp X si: $\lim_{n \to +\infty} \chi_n(f) = \chi(f)$ pour tout $f \in \mathcal{O}(X)$.

Forster [4] a démontré que pour un espace de Stein de dimension finie, tout caractère χ de $\mathcal{O}(X)$ est continu et il existe $p \in X$ tel que $\chi = \chi_p$. On démontre le même résultat avec des hypothèses moins restrictives à priori:

PROPOSITION 4.1 *Soit X un espace analytique holomorphiquement séparé de dimension n, vérifiant:*

$H^1(X, \mathcal{L}) = 0$ *pour tout* $\mathcal{L}$ *localement libre dans* X.

Alors l'application $\xi : X \longrightarrow SpX$ *est continue et bijective.*

DÉMONSTRATION. ξ est injective si et seulement si X est holomorphiquement séparé.

Soit $\chi \in \operatorname{Sp} X$ et soient $h_1, \ldots, h_N \in \mathcal{O}(X)$ des fonctions qui séparent les points de X ([10]). Posons $f_j = h_j - \chi(h_j)$ pour $j = 1, \ldots, N$, alors $\chi(f_j) = 0$ pour tout $j = 1, \ldots, N$ et $f_1, \ldots, f_N \in \mathcal{O}(X)$ séparent les points de X.

Posons $V(f_1, \ldots, f_N) = \{x \in X / f_1(x) = \ldots = f_N(x) = 0\}$, il est soit vide, soit réduit à un singleton.

Si $V(f_1, \ldots, f_N) = \emptyset$, il existerait $g_1, \ldots, g_N \in \mathcal{O}(X)$ telles que $\sum_{i=1}^N f_i g_i = 1$ dans X. En appliquant χ, on obtient:

$\chi(1) = \sum_{i=1}^{N} \chi(f_i)\chi(g_i) = 0$, ce qui est impossible car $\chi(1) = 1$. Il existe alors $\omega \in X$ tel que $V(f_1, \ldots, f_N) = \{\omega\}$.

Pour $h \in \operatorname{Ker} \chi$, on va montrer que $h(\omega) = 0$. Supposons que $h(\omega) \neq 0$ donc $V(f_1, \ldots, f_N, h) = \emptyset$ et le même raisonnement aboutit à la contradiction $\chi(1) = 0$.

Si $f \in \mathcal{O}(X)$ alors $f - \chi(f) \in \operatorname{Ker} \chi$, par suite $(f - \chi(f))(\omega) = 0$, d'òu $\chi(f) = f(\omega) = \chi_\omega(f)$. ξ est alors bijective et tout caractère de $\mathcal{O}(X)$ est continu.

Une caractérisation des espaces de Stein est donnée par:

THÉORÈME 4.1. [8] *Soit X un espace analytique de dimension n. Alors X est de Stein si et seulement si $\xi : X \longrightarrow \operatorname{Sp} X$ est un homeomorphisme.*

Dans ce qui suit on va donner une autre démonstration au théorème 3.4 en utilisant le théorème 4.1.

PROPOSITION 4.2. *Soit X un espace analytique tel que l'application $\xi : X \longrightarrow \operatorname{Sp} X$ soit continue et bijective. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *$\xi^{-1} : \operatorname{Sp} X \longrightarrow X$ est séquentiellement continue,*
2. *Pour toute suite infinie discrète $(x_k)_k \subset X$ et pour tout $x \in X$, il existe $f \in \mathcal{O}(X)$ telle que $f(x)$ ne soit pas la limite de la suite $(f(x_k))_k$.*

DÉMONSTRATION. 1) $\Rightarrow$ 2): Supposons qu'il existe $(x_k)_k \subset X$ infinie discrète et un point $x \in X$ tels que: $\lim_{k \to +\infty} f(x_k) = f(x)$ pour tout $f \in \mathcal{O}(X)$, donc $\lim_{k \to +\infty} \chi_{x_k} = \chi_x$ dans $\operatorname{Sp} X$. La continuité séquentielle de ξ^{-1} entraine que $\lim_{k \to +\infty} x_k = x$ ce qui est absurde.

2) $\Rightarrow$ 1) Soit $(\chi_{x_k})_k \subset \operatorname{Sp} X$ une suite convergeant vers $\chi_x \in \operatorname{Sp} X$, on va montrer que $\lim_{k \to +\infty} x_k = x$.

Supposons que $(x_k)_k$ ne converge pas vers x, il existe un voisinage ouvert U de x et une sous-suite $(x_{k_p})_p$ de $(x_k)_k$ tels que $x_{k_p} \notin U$ pour tout $p \geq 1$. La suite $(x_{k_p})_p$ est infinie discrète dans X, sinon il existerait une sous-suite $(x_n)_n$

et un point $z \in X$ tels que: $\lim_{n \to +\infty} x_n = z$, par suite $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(z)$ pour tout $f \in \mathcal{O}(X)$, d'où $\lim_{n \to +\infty} \chi_{x_n} = \chi_z$. Or $(\chi_{x_n})_n$ est une sous-suite de $(\chi_{x_k})_k$, donc $\chi_x = \chi_z$. ξ étant bijective on a $x = z$, ce qui contredit le choix de U.

$(x_{k_p})_p$ est donc une suite infinie discrète dans X et vérifie: $\lim_{p \to +\infty} f(x_{k_p}) = f(x)$ pour tout $f \in \mathcal{O}(X)$, ce qui contredit 2). Donc $(x_k)_k$ converge vers x dans X.

PROPOSITION 4.3. *Soit X un espace analytique, de dimension n, tel que l'application $\xi : X \to \mathrm{Sp}\, X$ soit bijective. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *$\xi^{-1} : \mathrm{Sp}\, X \to X$ est continue,*
2. *$\xi^{-1} : \mathrm{Sp}\, X \to X$ est séquentiellement continue,*
3. *X est holomorphiquement convexe.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que (2) $\Longrightarrow$ (3).
Soit K un compact de X, $\hat{K}$ l'enveloppe holomorphiquement convexe de K. Soit $(x_k)_k \subset \hat{K}$ une suite infinie, donc, par définition de $\hat{K}$, on a:

$$|f(x_k)| \leq \sup_K |f| \quad \text{pour tout } k \geq 1 \quad \text{et tout } f \in \mathcal{O}(X).$$

Soit $(\chi_{x_k})_k \subset SpX$ définie par $\chi_{x_k}(f) = f(x_k)$ pour tout $f \in \mathcal{O}(X)$. La suite $(\chi_{x_k})_k$ est bornée dans $\mathrm{Sp}\, X \subset \mathcal{O}'(X)$ (dual de $\mathcal{O}(X)$). Le théorème de Banach-Alaoglu implique qu'il existe une sous-suite $(\chi_{x_{k_j}})_j$ de $(\chi_{x_k})_k$ et $\chi \in \mathrm{Sp}\, X$ tels que: $\lim_{j \to +\infty} \chi_{x_{k_j}}(f) = \chi(f)$ pour tout $f \in \mathcal{O}(X)$, par suite $\lim_{j \to +\infty} \chi_{x_{k_j}} = \chi$ dans $\mathrm{Sp}\, X$. $\chi \in \mathrm{Sp}\, X$ et ξ bijective, il existe $p \in X$ tel que $\chi = \chi_p$. ξ^{-1} séquentiellement continue implique que $\lim_{j \to +\infty} \xi^{-1}(\chi_{x_{k_j}}) = \xi^{-1}(\chi_p)$ et donc la suite $(x_{k_j})_j$ converge vers p dans X. $\hat{K}$ étant fermé dans X, on a $p \in \hat{K}$, par suite $\hat{K}$ est compact dans X.

THÉORÈME 4.2. *Soit X un espace analytique holomorphiquement séparé, de dimension n, vérifiant:*

$H^1(X, \mathscr{L}) = 0$ pour tout $\mathscr{L}$ localement libre dans X. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. *X est holomorphiquement convexe,*
2. *X est holomorphiquement séparé à l'infini,*
3. *Pour toute suite infinie discrète $(x_k)_k \subset X$ et pour tout $x \in X$, il existe $f \in \mathcal{O}(X)$ telle que $f(x)$ ne soit pas la limite de la suite $(f(x_k))_k$.*

DÉMONSTRATION Il suffit de montrer que (3) $\Longrightarrow$ (1).

$\xi : X \to \operatorname{Sp} X$ est continue bijective, la propriété (3) implique que ξ^{-1} est séquentiellement continue, par suite X est holomorphiquement convexe d'après la proposition 4.3.

Le théorème 4.2 généralise les théorèmes 3.3, 3.4 et le corollaire 3.1.

4.1. REMARQUES.

1) Soit X un espace analytique holomorphiquement séparé et $\Omega \subset\subset X$ un ouvert relativement compact. Alors Ω vérifie la propriété (3) du théorème 4.2:

En effet soit $(x_k)_k \subset \Omega$ une suite infinie discrète et $x \in \Omega$. Soit $(x_{k_j})_j$ une sous-suite de $(x_k)_k$ qui converge vers un point $a \in \partial\Omega$, $x \neq a$, il existe $f \in \mathcal{O}(X)$ telle que $f(x) \neq f(a)$. Soit $g = f_{|\Omega} \in \mathcal{O}(\Omega)$, alors $g(x)$ ne peut pas être la limite de la suite $(g(x_k))_k$.

2) Si X est un espace de Stein et $\Omega \subset X$ un ouvert, alors Ω vérifie la propriété (3) du théorème 4.2:

Soit $(x_k)_k \subset \Omega$ une suite infinie discrète et $x \in \Omega$. Si $(x_k)_k \subset X$ est infinie discrète dans X, il existe $f \in \mathcal{O}(X)$ telle que $\lim_{k\to+\infty} |f(x_k)| = +\infty$.

Si $(x_k)_k$ n'est pas discrète dans X, soit $(x_{k_j})_j$ une sous-suite qui converge vers un point $a \in X$. On a $a \notin \Omega$, donc $x \neq a$, il existe $f \in \mathcal{O}(X)$ telle que $f(x) \neq f(a)$ et $g = f_{|\Omega} \in \mathcal{O}(\Omega)$ vérifie la propriété (3) du théorème 4.2.

DÉFINITION 4.1. Soit X un espace analytique, $\Omega \subset X$ un ouvert. On dit que Ω est un ouvert d'holomorphie si pour tout domaine $D \neq \emptyset$, $D \subset \Omega$ et pour tout domaine D', $D \subset D' \not\subset \Omega$, il existe une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que pour tout $g \in \mathcal{O}(D')$ on ait $f_{|D} \neq g_{|D}$.

Comme corollaire de la proposition 4.1 on obtient:

COROLLAIRE 4.1. *Soit X un espace holomorphiquement séparé, de dimension n, $\Omega \subset X$ un ouvert vérifiant:*

$H^1(\Omega, \mathscr{L}) = 0$ pour tout $\mathscr{L}$ localement libre dans Ω. Alors Ω est un ouvert d'holomorphie.

DÉMONSTRATION. Supposons que Ω n'est pas d'holomorphie, il existe alors deux domaines D, D', $D \subset D' \not\subset \Omega$ tels que: pour tout $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ il existe $g \in \mathcal{O}(D')$ vérifiant $f_{|D} = g_{|D}$. g est unique du fait que D' est connexe. On va montrer qu'il existe deux points de X qu'on ne peut pas séparer holomorphiquement.

Soit $z \in \partial\Omega \cap D'$, et considérons l'application: $\chi : \mathcal{O}(\Omega) \to \mathbf{C}$ telle que $\chi(f) = g(z)$ pour tout $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. χ est un homomorphisme d'algèbre, la proposition 4.1 implique l'existence d'un point $\omega \in \Omega$ tel que $\chi = \chi_\omega$, par suite $\chi(f) = f(\omega)$ pour tout $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Soit $F \in \mathcal{O}(X)$ et $f = F_{|\Omega} \in \mathcal{O}(\Omega)$, on a $\chi(f) = g(z)$ où $g = F_{|D'}$ car $f_{|D} = F_{|D} = g_{|D}$. $F(\omega) = f(\omega) = \chi(f) = g(z) = F(z)$, de plus $z \neq \omega$, d'où la contradiction.

4.2. REMARQUE.

S.Cœn [2] a démontré qu'un ouvert Ω d'un espace analytique irréductible X, holomorphiquement séparé de dimension n, est un ouvert d'holomorphie si $H^q(\Omega, \mathcal{O}_\Omega) = 0$ pour tout $1 \leq q \leq n-1$. Il est facile de montrer que sous ces hypothèses on a $H^1(\Omega, \mathcal{L}) = 0$ pour tout faisceau $\mathcal{L}$ défini par un nombre fini de fonctions holomorphes sans zéro commun dans Ω. Le résultat de S.Coen est donc une conséquence du corollaire 4.1.

Le problème de savoir si un espace analytique holomorphiquement séparé est holomorphiquement séparé à l'infini reste toujours posé.

REMERCIEMENTS. J'exprime toute ma reconnaissance au professeur B.Jennane pour l'aide qu'il m'a apporté et pour sa disponibilité tout au long de l'élaboration de ce travail. J'exprime mes vifs remerciements au professeur A.Zeriahi pour l'aide qu'il continue à m'apporter et l'intérêt qu'il porte à mon travail.

REFERENCES

1. O. Alehyane, *Une caractérisation des espaces de Stein par les faisceaux localement libres*, Thèse de troisième cycle, Université Mohammed V, Rabat (Maroc), 1989.
2. S. Cœn, *Annulation de la cohomologie à valeurs dans le faisceau structural et espaces de Stein*, Composito Math, 37 (1978), 63-75.
3 G. Cœuré and J. J. Lœb, *A countre example to the Serre problem with a bounded domain of* $\mathbf{C}^2$ *as fiber*, Pub. IRMA. Lille (1985).
4. O. Forster, *Uniqueness of topology in Stein algebras*, Function algebras, F. Britel, Scott Foresman, Chicago (1966), 157-163.
5. O. Forster and K. Ramspott, *Uberdie darstellang analytisher mengen*, Sb. Bayer. Akad. Wiss. Math. Nat. Kl (1965), 89-99.
6. J. E. Fornaess and R. Narasimhan, *The Levi problem on complex spaces with singularuties*, Math. Ann, 248 (1980), 47-72.
7. H. Grauert, *Bemerkenswerte pseudoconvexe mannigfalltigkeiten*, Math. Z, 81 (1963), 377-391.
8. H. Grauert and R. Remmert, *Theory of Stein Spaces*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1979.
9. H. Grauert and R. Remmert, *Coherent Analytic Sheaves*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1984.
10. R. C. Gunning and H. Rossi, *Analytic Functions of Several Complex Variables*, Prentice Hall N.J, 1965.
11. B. Jennane, *Groupes de cohomologie d'un fibré à base et à fibre de Stein*, Séminaire Lelong-Skoda,1978-79. Lecture Notes in Math. 822 (1980).
12. B. Jennane, *Problème de Levi et espaces holomorphiquement séparés*, Math. Ann 268 (1984), 305-316.
13. H. B. Laufer, *On sheaf cohomologie and envelops of holomorphy*, Ann. Math 84 (1966), 102-118.

14. A. Nagel, *Cohomology maximal ideals and point evaluations*, Proc. Amer. Soc. 42 (1974), 47-50.
15. H. Rossi, *On envelops of holomorphy*, Comm. Pure Appl. Math 16 (1963), 9-17.
16. G. Vigna Suria, *Vanishing of cohomology with coefficients in locally free sheaf and pseudo-convexity*, Enseign. Math. 29 (1983), 329-338.

ADRESSE ACTUELLE
UFR M.I.G.
LABORATOIRE E.PICARD
UNIVERSITÉ PAUL SABATIER, 118
ROUTE DE NARBONNE
31062, TOULOUSE CEDEX
FRANCE

ADRESSE PERMANENTE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ MOHAMMED V
B.P 1014, RABAT
MAROC.