MATH. SCAND. 81 (1997), 212–218

LA STABILITÉ DES ESPACES L^p NON-COMMUTATIFS

JOSÉ LUIS MARCOLINO NHANY

Abstract.

Let M be a von Neumann algebra and R the hyperfinite factor of type II_1. We show that if M is not of type I then $L^p(R)$ is a 1-complemented subspace of $L^p(M)$ for all $1 \leq p < \infty$. We show also that M is of type I if and only if $L^p(M)$ is stable for all $1 \leq p < \infty$.

Introduction.

Les espaces de Banach stables ont été introduits par Krivine et Maurey (K-M). Ils ont montré que tout espace de Banach stable contient un l^p presque isométriquement et que les espaces L^p sont tous stables pour tout $1 \leq p < \infty$. Notre objectif est d'étudier la stabilité des espaces $L^p(M)$ où M est une algèbre de von Neumann. Nous obtiendrons notamment que $L^p(M)$ est stable pour tout $1 \leq p < \infty$ si et seulement si M est de type I. Cette note se compose de deux parties : d'abord nous introduisons les notions et les résultats que nous utiliserons par la suite ; dans la deuxième partie nous énonçons et démontrons les résultats principaux.

Je remercie les professeurs E. Christensen et U. Haagerup pour d'utiles indications bibliographiques.

I) Préliminaires.

I-1) *Espaces de Banach stables.*

DÉFINITION. Un espace de Banach X est dit *stable* si pour toutes suites bornées (x_n) et (y_m) dans X et tous ultrafiltres U et V sur $\mathbf{N}$ on a :

$$\lim_{m,U} \lim_{n,V} \|x_n + y_m\| = \lim_{n,V} \lim_{m,U} \|x_n + y_m\|.$$

EXEMPLES. Les espaces de dimension finie, les espaces de Hilbert, les espaces L^p $(1 \leq p < \infty)$ sont tous des espaces de Banach stables, par contre c_o n'est pas stable (cf K-M).

Received November 17, 1995.

I-2) *Le facteur hyperfini de type* II_1

Soit A la C^*-algèbre engendrée par $\cup_{n\geq 1} M_{2^n}(C)$, (où $M_{2^n} \hookrightarrow M_{2^{n+1}}$ par l'application $a \longrightarrow a \otimes I_{M_2}$), et soit τ_2 la trace normalisée sur M_2 : $\tau_2[(a_{ij})] = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})$. Alors $\tau_o(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \otimes 1 \otimes \ldots) = \tau_2(a_1)\ldots\tau_2(a_n)$, $\forall a_i \in M_2$, définit une trace fidèle normalisée sur A. Soit π_o la C^*-répresentation fidèle de A associée à τ_o.

$\pi_o(A)''$ est alors un facteur de type II_1 (τ_o s'étend en une trace normale fidèle et normalisée sur ce facteur). On le note R et on l'appelle le facteur hyperfini de type II_1.

PROPOSITION. *Soient M une algèbre de von Neumann de type* II_1 (*resp.* II_∞). *Alors R se plonge dans M comme sous algèbre de von Neumann de telle façon qu'il existe une trace normale fidèle et normalisée* (*resp. semifinie*) *sur M vérifiant* $\tau_{|R} = \tau_o$.

PREUVE. Soient M une algèbre de von Neumann de type II_∞, τ une trace normale fidèle et semifinie sur M et $x \in M_+$ tel que $\tau(x) < \infty$. Par la décomposition spectrale de x on obtient une projection $e \neq 0$ telle que $\tau(e) < \infty$. Alors $eMe \subseteq M$ est de type II_1 et $\frac{1}{\tau(e)}\tau_{|eMe}$ est une trace normale fidèle et normalisée sur eMe.

Il suffit donc de considérer M de type II_1 et τ trace normale fidèle et normalisée sur M. Et dans ce cas, d'après TAK-1 Prop.V.1.35 p.302, il existe des projections e_1 et e_2 dans M équivalentes et orthogonales telles que $I = e_1 + e_2$ (où I désigne l'identité de M). Alors M s'identifie à $(e_1Me_1) \otimes M_2$ en tant qu'algèbre de von Neumann (cf TAK-1 Prop.V.1.22 p.297). Comme τ est une trace et e_1 est équivalente à e_2 on a $\tau(e_1) = \tau(e_2) = \frac{1}{2}$. En itérant la même démarche on montre que $\forall n \geq 1$ $\exists e_n$ projection dans M telles que $M \cong (e_nMe_n) \otimes M_{2^n}$ et $\tau(e_n) = \frac{1}{2^n}$. Ainsi $\forall n \geq 1$ M_{2^n} se plonge dans M en tant que sous algèbre de von Neumann. D'autre part, en utilisant TAK-1 Prop.IV.1.8 p.185, on montre que $\tau((x_{i,j})) = \frac{1}{2^n}\sum x_{i,i}$ $\forall (x_{i,j}) \in M_{2^n}$. D'où le résultat enoncé.

I-3) *Introduction aux espaces* $L^p(M)$.

Soit φ un poids normal fidèle et semifini sur M_+. Dans les paragraphes a) et b) qui suivent nous exposons des constructions différentes d'espaces $L^p(M, \varphi)$ selon la structure de l'algèbre de von Neumann M. En fait, on peut vérifier que a) correspond à b) dans le cas particulier où φ est une trace.

a) Si M admet une trace normale et fidèle τ, alors $\forall$ $1 \leq p < \infty$, $L^p(M, \tau)$ est la complétion de l'espace vectoriel $\{a \in M : \tau(|a|^p) < \infty\}$ pour la norme $\|a\|^p = [\tau(|a|^p)]$. La théorie de ces espaces a été créée par J. Dixmier (DIX) et I. E. Segal (SEG) dans les années 50. Voir aussi l'article de E. Nelson (NEL) pour une approche relativement récente.

b) Plus généralement, soit φ un poids normal fidèle et semifini sur M_+. Notons n_φ=$\{x \in M; \varphi(x^*x) < \infty\}$ et m_φ l'espace vectoriel engendré par x^*y avec x et y dans n_φ. Soit H_φ la complétion de n_φ par rapport au produit scalaire $< a, b >= \varphi(b^*a)$ et $\alpha : n_\varphi \longrightarrow H_\varphi$ l'inclusion de n_φ dans H_φ. Pour $a \in M$ soit $\pi_a \in B(H_\varphi)$ l'opérateur qui sur n_φ est la multiplication à gauche par a. Soit $J\Delta^{\frac{1}{2}}$ la décomposition polaire de la clôture de l'opérateur d'involution $b \longrightarrow b^*$ sur $n_\varphi \cap n_\varphi^*$. Notons L l'ensemble des $x \in M$ pour lesquels il existe un ψ dans M_* tel que $\psi(z^*y) = < J\pi_{x^*}J\alpha(y), \alpha(z) >$ pour tous y et z dans n_φ. Puisque φ est semifini, m_φ est un sous-espace dense de M pour la topologie faible des opérateurs, donc si ψ existe, il est unique ; par conséquent on peut le noter φ_x. Muni de la norme $\|x\|_L = \max(\|x\|, \|\varphi_x\|)$, L est un espace de Banach et M et M_* peuvent être plongés dans L^* (cf TER pp. 328-338). On définit alors $L^p(M, \varphi)$ par interpolation: $L^p(M, \varphi) = (M, M_*)_\theta$, $\theta = \frac{1}{p}$.

Remarques. 1) La théorie des espaces $L^p(M, \varphi)$ pour des algèbres de von Neumann qui ne sont pas necéssairement semifinies a été initiée par U. Haagerup (cf HAA), dans une construction faisant intervenir les produits croisés. Terp montre que l'espace construit par interpolation est isométrique à l'espace $L^p(M, \varphi)$ d'Haagerup (cf TER Th.36 p.359).

2) Dans la construction b) Terp généralise le point de vue de H. Kosaki qui utilise la théorie de l'interpolation complexe pour produire des espaces $C_\theta(M, M_*)$ dans le cas où φ est un état. Soit $(\sigma_t, t \in \mathbb{R})$ le groupe d'automorphismes modulaires associés à φ. Kosaki observe que pour $x \in M$ fixé, l'application $t \in \mathbb{R} \longrightarrow \sigma_t(x).\varphi$ à valeurs dans M_* (où $(\sigma_t(x).\varphi)(y) = \varphi(y\sigma_t(x)) \forall y \in M)$ admet une extension bornée et continue sur $-1 \leq \operatorname{Im} z \leq 0$ et analytique à l'intérieur (cf KOS, Th.2.5 p.38). Ainsi, à tout $0 \leq \eta \leq 1$ on peut associer un plongement $x \longrightarrow I_\eta(x) = \sigma_{-i\eta}(x).\varphi$ de M dans M_* et par là obtenir une infinité d'espaces d'interpolation de M et M_* tous isomorphes à l'espace $L^p(M, \varphi)$ d'Haagerup. Lorsque $\eta = \frac{1}{2}$ on obtient la construction de Terp dans le cas particulier où φ est un état (cf KOS, Partie II).

3) Les espaces $L^p(M, \varphi)$ sont indépendants de φ (cf HAA, Introd.). Pour cette raison on peut, sans ambiguité, noter simplement $L^p(M)$.

II) Le Théorème principal.

Théorème. *Soit M une algèbre de von Neumann. Les assertions suivantes sont alors équivalentes:*

i) *M est de type I.*

ii) *$\forall p$, $1 \leq p < \infty$, $L^p(M)$ est stable.*

iii) *$\exists p$, $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$ tel que $L^p(M)$ soit stable.*

Nous allons démontrer ce résultat par étapes:

PROPOSITION. M de type I $\Longrightarrow L^p(M)$ stable $\forall 1 \leq p < \infty$.

PREUVE. $M = \Sigma^{\oplus}_{\alpha} A_\alpha \otimes B(H_\alpha)$, où $A_\alpha = L^\infty(\Omega_\alpha, \mu_\alpha)$. D'où $L^p(M) = \Sigma^{\oplus}_{\alpha} L^p(C_p(H_\alpha))$ où $C_p(H_\alpha) = L^p(B(H_\alpha))$ est stable. Ce résultat est dû indépendamment à Arazy et à Raynaud (cf ARA. ou RAY.).

D'autre part si X est un espace de Banach, l'espace L^p à valeurs vectorielles $L^p(X)$ est stable dès que X l'est. (cf K-M Th. II-2).

PROPOSITION. Soit R le facteur hyperfini de type II_1. $L^p(R)$ n'est pas stable, pour tout $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$.
Preuve: Dans R soient les suites U_n et V_m définies par :

$$U_n = a \otimes a ... \otimes a \otimes 1 \otimes ... \quad \text{et} \quad V_m = b \otimes b \otimes b ... \otimes 1 ...$$

où a et b apparaissent respectivement $2n$-fois et $2m+1$-fois, et où $a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a $a^* = -a$, $b^* = b$, a, b sont unitaires et $ba = a^* b$. U_n et V_m sont unitaires et donc des suites bornées dans $L^p(R)$. Nous allons montrer que si $1 \leq p < \infty$ et $p \neq 2$ alors

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \|U_n + V_m\|_p \neq \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \|U_n + V_m\|_p$$

et chacune des limites apparaissant dans (1) existe. On a:

$$\|U_n + V_m\|_p = \|1 + U_n^* V_m\|_p.$$

(2) Montrons que si $n > m$ alors $\|U_n + V_m\|_p = \sqrt{2}$.

$\forall n > m$, $U_n^* V_m = a^*b \otimes ... \otimes a^*b \otimes a^* \otimes ... \otimes a^* \otimes 1 ...$ (où a^*b apparait $(2m+1)$-fois et où a^* apparait $(2(n-m)-1)$-fois; et $V_m^* U_n = ba \otimes ... \otimes ba \otimes a ... \otimes a \otimes 1 ....$ Comme $a^* \otimes ... \otimes a^* = (-1)^{2(n-m)-1} a \otimes ... \otimes a$, nous avons $U_n^* V_m = -V_m^* U_n$ et $(U_n + V_m)^*(U_n + V_m) = 2I$. D'où $|U_n + V_m| = \sqrt{2} I$, par conséquent: $\|U_n + V_m\|_p = \sqrt{2}$.

(3) Montrons que si $m \geq n$ alors $\|U_n + V_m\|_p = 2^{\frac{p-1}{p}}$.

Posons $\Pi_{n,m} = a^*b \otimes ... \otimes a^*b \otimes b \otimes ... \otimes b$, où a^*b apparait $2n$-fois et b apparait $(2m+1-2n)$-fois). On a

$U_n^* V_m = \Pi_{n,m} \otimes 1 \otimes 1 \otimes ....$Comme a^*b est auto-adjoint, $\Pi_{n,m}$ l'est aussi; d'autre part, il est unitaire de trace nulle. Son spectre consiste donc de $+1$ et -1 avec la même multiplicité N. D'autre part on a $I + U_n^* V_m = (I + \Pi_{n,m}) \otimes I \otimes I ...$ d'où $|I + U_n{}^* V_m|^p = |I + \Pi_{n,m}|^p \otimes I \otimes I ...$ donc, par définition de τ on a

$$\tau(|I + U_n{}^* V_m|^p)^{\frac{1}{p}} = \|I + \Pi_{n,m}\|_p = \left[\frac{1}{2N}(N.2^p + N.0^p)\right]^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{p-1}{p}}.$$

Finalement (1) découle de (2) et (3).

Le point essentiel dans le reste de la démonstration du théorème principal est le fait suivant qui est une conséquence immédiate d'une combinaison de résultats connus sur la théorie de l'interpolation complexe et la théorie des algèbres de von Neumann.

PROPOSITION. *Soient φ un poids normal fidèle et semifini sur M et M_0 une sous-algèbre de von Neumann de M. Posons $\varphi_0 = \varphi_{|M_0}$. S'il existe $E : M \longrightarrow M_0$ espérance conditionnelle normale vérifiant $\varphi = \varphi_0 \circ E$ alors $L^p(M_0)$ est un sous-espace 1-complémenté de $L^p(M)$, $\forall 1 \leq p < \infty$.*

PREUVE. Nous allons utiliser l'observation élémentaire suivante:

LEMME. *Sous les hypothèses de la proposition nous avons $(\varphi_0)_{E(x)} = (\varphi_x)_{|M_0}$, $\forall x \in M \cap M_*$.*

PREUVE DU LEMME. Soient J_0, Δ_0, n_{φ_0} et H_{φ_0} associés à φ_0 comme dans la partie I. H_{φ_0} est un sous-espace fermé de H_φ. E espérance conditionnelle normale vérifiant $\varphi = \varphi_0 \circ E$ implique que $J(H_{\varphi_0}) \subseteq H_{\varphi_0}$ et J_0 est la restriction de J à H_{φ_0} (cf TAK-2, Th. p.309 et Sect.4 pp.312-313). Alors $\forall x \in M$ et $\forall y, z \in n_{\varphi_0}$ on a:

$$\begin{aligned}(\varphi_0)_{|E(x)}(z^*y) &= \langle J_0 \pi_{E(x^*)} J_0 \alpha(y), \alpha(z)\rangle \\ &= \langle JP\pi_{x^*} J\alpha(y), \alpha(z)\rangle \\ &= \langle PJ\pi_{x^*} J\alpha(y), \alpha(z)\rangle = \varphi_x(z^*y),\end{aligned}$$

car $\pi_{E(x^*)} = P\pi_{x^*}$, où P est la projection orthogonale de H_φ sur H_{φ_0} (cf TAK-2 Section 5 pp.316–317). Ainsi $(\varphi_0)_{E(x^*)} = \varphi_{x|M_0}$.

On vérifie aisément que $\forall x \in M_0$ et y, $z \in n_\varphi$, on a $\varphi_x(E(z^*y)) = \varphi_x(z^*y)$. Par conséquent le lemme implique que $M_0 \cap (M_0)_*$ est un sous-espace de $M \cap M_*$ et que l'application $\varphi_x \longrightarrow (\varphi_0)_{E(x)}$ est une projection de norme 1; ainsi E induit une projection de norme 1 de $L^p(M)$ sur $L^p(M_0)$ (cf B-L Th.4.1.2 p.88).

Revenons au théorème principal.

Nous allons appliquer la proposition précèdente pour montrer que si M n'est pas de type I alors:

(4) $L^p(R)$ est un sous-espace 1-complémenté de $L^p(M)$, $\forall 1 \leq p < \infty$.

On sait que si M n'a pas de partie de type I alors elle admet une décomposition $M = M_{II_1} \oplus M_{II_\infty} \oplus M_{III}$, où M_N désigne une algèbre de von Neumann de type N pour $N = \mathrm{II}_1$, II_∞, III (cf TAK-1 Th.V.1.19, p.296). D'où on obtient facilement que

$$L^p(M) = L^p(M_{\mathrm{II}_1}) \oplus_p L^p(M_{\mathrm{II}_\infty}) \oplus_p L^p(M_{\mathrm{III}}).$$

Par conséquent, pour montrer (4) il suffit de considérer les deux cas suivants:

1) M de type II_1 ou II_∞.

D'après la partie I on a un plongement $R \subseteq M$ et tel que $\tau_{|R} = \tau_o$ pour une trace normale fidèle et semifinie τ sur M. D'où l'existence de $E : M \longrightarrow R$ espérance conditionnelle normale vérifiant $\tau = \tau_o \circ E$ (cf TAK-1 Prop.V.2.36 p.332) et on obtient alors (4) par la proposition précédente.

2) M de type III.

Supposons d'abord qu'il existe un état normal et fidèle sur M. Alors il en existe un, noté φ dont le centralisateur M_φ est de type II_1 et $\varphi_{|M_\varphi}$ est une trace normale fidèle et finie (cf H-S Th.11.1, p.249). D'où l'existence d'une espérance conditionnelle normale $E : M \longrightarrow M_\varphi$ telle que $\varphi = \varphi_{|M_\varphi} \circ E$ (cf TAK-2 Théorème p.309) et donc $L^p(M_\varphi)$ est 1-complémenté dans $L^p(M)$. Or on vient de voir que $L^p(R)$ est 1-complémenté dans $L^p(M_\varphi)$; d'où (4).

Supposons, plus géneralement, que φ est un poids normal fidèle et semifini sur M_+. On sait qu'il existe une projection e dans le centralisateur de φ telle que sur eMe il existe un état normal et fidèle (cf PED-TAK, Prop.7.1 p.80). Comme on vient de le voir, $L^p(R)$ est alors 1-complémenté dans $L^p(eMe)$ $\forall 1 \leq p < \infty$.

D'autre part, en utilisant le théorème de la page 309 de TAK-2, on montre aisément que $x \longrightarrow E(x) = exe$ est une espérance conditionnelle normale de M sur eMe vérifiant $\varphi = \varphi_e \circ E$ (où $\varphi_e = \varphi_{|eMe}$). D'où $L^p(eMe)$ est un sous-espace 1-complémenté de $L^p(M)$ $\forall 1 \leq p < \infty$. D'où on obtient (4).

Finalement nous avons:

Si M n'est pas de type I alors $L^p(M)$ n'est pas stable, $\forall 1 \leq p < \infty$, car $L^p(R)$ se plonge isométriquement dans $L^p(M)$, d'où iii)$\Longrightarrow$ i). Ce qui achève la démonstration du résultat principal.

REFERENCES

[ARA] J. Arazy, *On stability of unitary matrix spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. 87 (1983), 317–321.

[B-L] J. Berg, J. Löfström, *Interpolation Spaces,* Springer-Verlag 1976.

[DIX] J. Dixmier, *Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs,* Bull. Soc. Math. France, 81 (1953) 9–39.

[HAA] U. Haagerup, *L^p-spaces associated with an arbitrary von Neumann algebra,* Colloques Internationaux du CNRS, No. 274 (1977), 175–184.

[H-S] U. Haagerup, E. Störmer, *Equivalence of normal states on von Neumann algebras and the flow of weights,* Adv. in Math. 83 (1990) 180–262.

[KOS] H. Kosaki, *Applications of the complex interpolation method to a von Neumann algebra: Non-commutative L^p-spaces,* J. Funct. Anal. 56 (1984) 29–78.

[K-M] J. Krivine, B. Maurey, *Espaces de Banach stables,* Israel J. Math. 39 (1981), 273–295.

[NEL] E. Nelson, *Notes on non-commutative integration,* J. Funct. Anal. 15 (1974), 103–116.

[P-T] G. Pedersen, M. Takesaki, *The Radon-Nikodym Theorem for von Neumann algebras,* Acta Math. 130 (1973), 53–87.

[RAY] Y. Raynaud, *Stabilité des espaces d'opérateurs C_E,* Sém. Géom. Espaces de Banach, Paris VII (1983), 1–12.

[SEG] I. E. Segal, *A non-commutative extension of abstract integration,* Ann. of Math. 57 (1953), 401–457.

[TAK1] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras* I, Springer-Verlag 1979.

[TAK2] M. Takesaki, *Conditional expectations in von Neumann algebras,* J. Funct. Anal. 9 (1972), 306–321.

[TER] M. Terp, *Interpolation spaces between a von Neumann algebra and its predual,* J. Operator Theory 8 (1982), 327–360.

EQUIPE D'ANALYSE, TOUR 46-0, 4èME éTAGE
UNIVERSITé PARIS VI
4, PLACE JUSSIEU,
75252 PARIS-CEDEX 05
FRANCE
marcol@ccr.JUSSIEU-FR