MATH. SCAND. 81 (1997), 247–259

ÜBER KOASSOZIIERTE PRIMIDEALE II

HELMUT ZÖSCHINGER

Einleitung.

Über einem kommutativen noetherschen Ring R wollen wir – in Fortsetzung von Teil I [9] – für spezielle R-Moduln M die Menge Koass(M) aller zu M koassoziierten Primideale bestimmen. Dabei heißt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ *koassoziiert* zu M, wenn es einen artinschen Faktormodul M' von M gibt mit $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(M')$. Es ist naheliegend, zuerst die im allgemeinen einfachere Menge $\mathrm{Att}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(M/\mathfrak{p}M)\}$ aller *attachierten* Primideale zu untersuchen und anschließend die Teilmenge Koass(M) von Att(M) zu präzisieren. Für einen flachen R-Modul M sieht man z.B. sofort, daß $\mathrm{Att}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid M/\mathfrak{p}M \neq 0\}$ ist, während die Berechnung von $\mathrm{Koass}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid M/\mathfrak{p}M \neq 0\})$, und falls $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Max}(R)$, ist $M/\mathfrak{p}M$ nicht koatomar$\}$ in ([10] Satz 2.1) einige Mühe kostete. Bei einer beliebigen Ringerweiterung $R \subset A$ ist sogar die Frage nach Att(A) zu allgemein: $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ ist offenbar genau dann zum R-Modul A attachiert, wenn $\mathfrak{p}A \cap R = \mathfrak{p}$ ist, d.h. wenn es ein $P \in \mathrm{Spec}(A)$ gibt mit $P \cap R = \mathfrak{p}$. Aber über die Menge $\mathrm{Att}(A) = \mathrm{Bild}(\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(R))$ kann man ohne Zusatzvoraussetzungen wenig sagen.

Ist nun R ein noetherscher Integritätsring mit Quotientenkörper K, ist $0 \neq u \in K$ und $B = R[u]$ der von R und u erzeugte Unterring von K, so wollen wir in der vorliegenden Arbeit alle koassoziierten und alle attachierten Primideale des R-Moduls $_RB$ angeben. Dies gelingt unter der Zusatzbedingung, daß der Kern des Einsetzhomomorphismus $\varphi : R[T] \to B$ eine lineare Basis besitzt (z.B. wenn R ganz abgeschlossen in B ist; siehe Abschnitt 2), denn dann können wir mit Hilfe der Ideale $\mathfrak{c} = \{r \in R \mid ru \in R\}$ und $\mathfrak{d} = \mathfrak{c} \cdot u$ zeigen:

(a) $\mathrm{Att}(B) = V(\mathfrak{c} + \mathfrak{d}) \dot\cup D(\mathfrak{c})$.

(b) $\mathrm{Koass}(B) = V(\mathfrak{c} + \mathfrak{d}) \dot\cup \{\mathfrak{p} \in D(\mathfrak{c}) \mid$ falls $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Max}(R)$, ist im Ring $R/\mathfrak{p}$ das Ideal $\dot{\mathfrak{c}}$ *keine* Reduktion von $\dot{\mathfrak{c}} + \dot{\mathfrak{d}}\}$.

Eingegangen am 27. November 1995.

Dabei sei wie üblich $V(\mathfrak{c}+\mathfrak{d}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid \mathfrak{c}+\mathfrak{d} \subset \mathfrak{p}\}$, $D(\mathfrak{c}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid \mathfrak{c} \not\subset \mathfrak{p}\}$, und die Reduktionsbedingung in (b) kann man auch so lesen: Im Ring $R/\mathfrak{p}$ ist das Ideal $\dot{\mathfrak{d}}$ nicht ganz über dem Ideal $\dot{\mathfrak{c}}$.

In dem Spezialfall, daß $(R, \mathfrak{m})$ regulär und 2-dimensional ist, $\mathfrak{m} = (x, y)$ und $u = \frac{y}{x}$, läst sich dieses Ergebnis (und das war der Ausgangspunkt unserer Untersuchungen) noch anschaulicher formulieren. Für den R-Modul $B = R[u] = R[\mathfrak{m}/x]$ gilt jetzt:

(a′) $\operatorname{Att}(B) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \neq (x)\}$.

(b′) $\operatorname{Koass}(B) = \{0, \mathfrak{m}\} \mathbin{\dot\cup} \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid h(\mathfrak{p}) = 1, \mathfrak{p} \neq (x)$ und mit $\operatorname{ord}(\mathfrak{p}) = n$ gilt $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}^{n+1} + (x)\}$.

1. Kleine Oberringe.

Stets sei in dieser Arbeit R ein kommutativer noetherscher Ring und K der totale Quotientenring von R. Jeder Ring A zwischen R und K heißt ein Oberring von R, und die Untersuchung von $\operatorname{Koass}_R(A)$ führt als erstes zur Frage, wann A als R-Modul klein in K ist, d.h. wann für jeden R-Untermodul $X \subsetneqq K$ auch $X + A \subsetneqq K$ ist. Wir werden sie in (1.2) mit Hilfe von [10] vollständig beantworten und damit in (1.7) alle Primideale $\mathfrak{p}$ charakterisieren, die zu $B = R[u]$ koassoziiert sind und die $\mathfrak{c}$ nicht enthalten (R ein Integritätsring, $0 \neq u \in K$ und $\mathfrak{c} = \{r \in R \mid ru \in R\}$ wie in der Einleitung).

Lemma 1.1. *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Integritätsring, $u \in K$ nicht ganz über R und $B = R[u]$. Dann folgt* $0 \in \operatorname{Koass}(B)$.

Beweis. (1) Bekanntlich ist R', der ganze Abschluß von R in K, gleich dem Durchschnitt aller diskreten Bewertungsringe zwischen R und K. Wir müssen aber für $u \notin R'$ genauer zeigen, daß es einen diskreten Bewertungsring $(V, \mathscr{M})$ zwischen R und K gibt, für den neben $u \notin V$ auch $\mathscr{M} \cap R = \mathfrak{m}$ gilt. Dazu sei $v = \frac{1}{u}$, $C = R[v]$ und $\psi : R[T] \to C$ der zugehörige Einsetzhomomorphismus, d.h. $\psi(T) = v$. Aus $\psi(\sum_{i=0}^n r_i T^i) = 0$, also $r_0 u^n + r_1 u^{n-1} + \ldots + r_n = 0$, folgt dann nach Voraussetzung $r_0 \in \mathfrak{m}$, d.h. es ist $\operatorname{Ke}\psi \subset \mathfrak{m}R[T] + (T)$. Damit ist $M = \mathfrak{m}C + vC$ ein maximales Ideal im Ring C mit $M \cap R = \mathfrak{m}$, nach Chevalley (siehe [3] Theorem 258) gibt es einen diskreten Bewertungsring $(V, \mathscr{M})$ zwischen C und K mit $\mathscr{M} \cap C = M$, und daraus folgt sowohl $\mathscr{M} \cap R = \mathfrak{m}$ als auch $v \in \mathscr{M}, \frac{1}{v} \notin V$, d.h. $u \notin V$.

(2) Mit dem Paar $(V, \mathscr{M})$ aus (1) behaupten wir, daß $B/B \cap V$ ein halbartinscher, treuer R-Modul ist: Wie in ([10] Lemma 1.1) ist der R-Modul K/V halbartinsch, also auch der Untermodul $B/B \cap V$; hätte man aber ein $0 \neq s \in R$ mit $s(B/B \cap V) = 0$, folgte aus $sB \subset V$ und $V[u] = K$ schon $sK \subset V$, und das ist unmöglich. Aus der ersten Eigenschaft folgt nun

$\mathrm{Koass}(B/B \cap V) = \mathrm{Att}(B/B \cap V)$ ([9] Satz 2.9), aus der zweiten $0 \in \mathrm{Att}(B/B \cap V)$, also zusammen $0 \in \mathrm{Koass}(B)$.

SATZ 1.2. *Für einen Oberring $R \subset A \subset K$ sind äquivalent:*
(i) *A ist als R-Modul klein in K.*
(ii) *$A \subset R'$, und jedes maximale Ideal von R ist regulär.*

BEWEIS. (i $\to$ ii) Die zweite Bedingung ist klar: Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ ist $R + \mathfrak{m}K = K$, also nach Voraussetzung $\mathfrak{m}K = K$, und damit ist $\mathfrak{m}$ regulär. Die erste Bedingung konnten wir in ([10] Satz 3.4) nur unter der Zusatzvoraussetzung beweisen, daß alle $A/\mathfrak{m}A$ endlich erzeugt sind ($\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$), aber die war überflüssig:

Sei im 1. *Schritt* $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler, vollständiger Integritätssring und A klein in K. Wäre $A \not\subset R'$, folgte mit einem $u \in A$, $u \notin R'$, daß das Nullideal nach (1.1) zu $B = R[u]$ koassoziiert ist, also $0 = \mathrm{Ann}_R(M)$ mit einem artinschen Faktormodul $M = B/U$. Mit der injektiven Hülle E des Restklassenkörpers $k = R/\mathfrak{m}$ ist dann, wegen der Vollständigkeit von R, das Matlis-Duale $M^o = \mathrm{Hom}_R(M, E)$ endlich erzeugt und $M^{00} \cong M$, also R ein Untermodul von M^0 und $R^0 \cong E$ ein Faktormodul von M. Mit $B/U_1 \cong E$ ist dann B/U_1 sowohl klein als auch direkter Summand in K/U_1, und das ist unmöglich.

Ist im 2. *Schritt* $(R, \mathfrak{m})$ nur mehr lokal und vollständig, A klein in K, so gilt für jedes $\mathfrak{q} \in \mathrm{Min}(R)$, daß $A + \mathfrak{q}K/\mathfrak{q}K$ als $R/\mathfrak{q}$-Modul klein in $K/\mathfrak{q}K$ ist, also nach dem ersten Schritt ganz über $R/\mathfrak{q}$. Weil das für alle $\mathfrak{q} \in \mathrm{Min}(R)$ galt, folgt $A \subset R'$.

Die nächsten beiden Schritte, der Verzicht auf vollständig und lokal, gehen wörtlich wie in ([10] Satz 3.4), d.h. auch jetzt gilt $A \subset R'$.

(ii $\to$ i) Nach ([10] Folgerung 3.3) ist R' als R-Modul klein in K, also auch der Untermodul A.

FOLGERUNG 1.3. *Ist R ein Integritätsring, $R \subset A \subset K$ ein Oberring und A nicht ganz über R, so folgt* $0 \in \mathrm{Koass}(A)$.

BEWEIS. Nach (1.2) ist A nicht klein in K, so daß es einen R-Untermodul $X \subsetneq K$ gibt mit $X + A = K$. Damit ist $D = A/X \cap A$ ein teilbarer Faktormodul $\neq 0$ von A, und aus $\{0\} = \mathrm{Koass}(D) \subset \mathrm{Koass}(A)$ folgt die Behauptung.

Sei für den Rest dieses Abschnittes R ein Integritätsring, $0 \neq u \in K$ und $B = R[u]$, $\mathfrak{c} = \{r \in R \mid ru \in R\} = \mathrm{Ann}_R(\bar{u})$ mit $\bar{u} \in K/R$. Ist $\mathfrak{p} \in D(\mathfrak{c})$, folgt mit irgendeinem $x \in \mathfrak{c} \backslash \mathfrak{p}$, daß $u = \frac{xu}{x} \in R_\mathfrak{p}$ ist, also $B \subset R_\mathfrak{p}$, $(\mathfrak{p}B) \cap R = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}(B)$. Stets ist daher

$$D(\mathfrak{c}) \subset \mathrm{Att}(B),$$

und welche $\mathfrak{p} \in D(\mathfrak{c})$ sogar zu Koass(B) gehören, werden wir in (1.7) am Primideal $\mathfrak{p}^* = (\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}) \cap B$ ablesen.

LEMMA 1.4. *Sei R ein Integritätsring, $0 \neq u \in K$ und $B = R[u]$. Sei $\mathfrak{c} = \mathrm{Ann}_R(\bar{u})$ und $\mathfrak{p} \in D(\mathfrak{c})$. Dann gilt:*

(a) *$\mathfrak{p}^* = (\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}) \cap B$ ist das einzige Primideal von B, das über $\mathfrak{p}$ liegt.*

(b) *$B/\mathfrak{p}^*$ ist ein Oberring von $R/\mathfrak{p}$ (d.h. enthalten im Quotientenkörper von $R/\mathfrak{p}$) und $B_{\mathfrak{p}^*} = R_{\mathfrak{p}}$.*

(c) *Es ist $\mathfrak{p}^* = \{b \in B \mid \mathfrak{c}^m b \subset \mathfrak{p}$ für ein $m \geq 1\}$. Insbesondere wird $\mathfrak{p}^*/\mathfrak{p}B$ durch eine Potenz von $\mathfrak{c}$ annulliert.*

BEWEIS. (a) Klar ist $\mathfrak{p}^* \cap R = \mathfrak{p}$, und ist $P \in \mathrm{Spec}(B)$ ein zweites Primideal mit dieser Eigenschaft, folgt $\mathfrak{p}^* \subset P$, denn $b \in \mathfrak{p}^* \Rightarrow b = \frac{r}{s}$ mit $r \in \mathfrak{p}$, $s \in R\backslash\mathfrak{p}$, also $sb \in P \not\ni s$, $b \in P$. Es ist aber auch $P \subset \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$, denn $b \in P \Rightarrow \mathfrak{c}^n b \subset R$ für ein $n \geq 1$, mit einem $x \in \mathfrak{c}\backslash\mathfrak{p}$ also $x^n b \in \mathfrak{p}$, $b = \frac{x^n b}{x^n} \in \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$. Schneiden mit B liefert $P \subset \mathfrak{p}^*$.

(b) Der von $R \subset B$ induzierte Ringhomomorphismus $\epsilon : R/\mathfrak{p} \to B/\mathfrak{p}^*$ ist injektiv und jedes $\bar{b} \in B/\mathfrak{p}^*$ ist Quotient von zwei Elementen aus Bi ϵ, denn mit $x \in \mathfrak{c}\backslash\mathfrak{p}$ und $x^n b = r \in R$ ist $\dot{x}^n \neq 0$ in $R/\mathfrak{p}$ und $\epsilon(\dot{x}^n)\bar{b} = \epsilon(\dot{r})$. Damit ist die erste Behauptung bewiesen, und weil bei der zweiten $B \subset R_{\mathfrak{p}} \subset B_{\mathfrak{p}^*}$ klar ist, braucht man nur noch $\frac{1}{b}$ für $b \in B\backslash\mathfrak{p}^*$ zu betrachten: Mit $x \in \mathfrak{c}\backslash\mathfrak{p}$ und $x^n b = r \in R$ wie oben ist $x^n \notin \mathfrak{p}^*$, also $r \notin \mathfrak{p}$, $\frac{1}{b} = \frac{x^n}{r} \in R_{\mathfrak{p}}$.

(c) Aus $b \in \mathfrak{p}^*$, d.h. $b = \frac{r}{s} = r_0 + r_1 u + \ldots + r_m u^m$ mit $r \in \mathfrak{p}$, $s \in R\backslash\mathfrak{p}$ und $r_i \in R$ folgt $\mathfrak{c}^m b \subset \mathfrak{p}$, denn für alle $\alpha \in \mathfrak{c}^m$ ist $\alpha b \in R$, $s(\alpha b) \in \mathfrak{p}$, $\alpha b \in \mathfrak{p}$. Ist umgekehrt $b \in B$ und $\mathfrak{c}^m b \subset \mathfrak{p}$ für ein $m \geq 1$, folgt mit $x \in \mathfrak{c}\backslash\mathfrak{p}$, daß $x^m b \in \varphi$, also $b = \frac{x^m b}{x^m} \in (\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}) \cap B = \mathfrak{p}^*$ ist. Damit ist die Formel für $\mathfrak{p}^*$ bewiesen, und weil der Ring B noethersch, also das Ideal $\mathfrak{p}^*$ endlich erzeugt ist, gibt es zu $\mathfrak{p}^* = b_1 B + \ldots + b_n B$ ein gemeinsames $e \geq 1$ mit $\mathfrak{c}^e b_i \subset \mathfrak{p}$ für alle $1 \leq i \leq n$, woraus $\mathfrak{c}^e \mathfrak{p}^* \subset \mathfrak{p}B$ folgt wie behauptet.

FOLGERUNG 1.5. *Mit den Bezeichnungen von* (1.4) *gilt für* $\mathfrak{p} \in D(\mathfrak{c})$:

$$\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(B) \Longleftrightarrow \mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(B/\mathfrak{p}^*). \tag{1}$$

$$\mathfrak{p}^* \in \mathrm{Max}(B) \Longrightarrow \mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(B). \tag{2}$$

BEWEIS. (1) Aus $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(B)$ folgt natürlich $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(B/\mathfrak{p}B)$, also mittels der exakten Folge $0 \to \mathfrak{p}^*/\mathfrak{p}B \to B/\mathfrak{p}B \to B/\mathfrak{p}^* \to 0$ entweder $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(\mathfrak{p}^*/\mathfrak{p}B)$ oder $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(B/\mathfrak{p}^*)$. Weil aber $\mathfrak{p}^*/\mathfrak{p}B$ nach (1.4, c) durch eine Potenz von $\mathfrak{c}$ annulliert wird und $\mathfrak{c} \not\subset \mathfrak{p}$ ist, ist der erste Fall unmöglich. Die Umkehrung $\Longleftarrow$ ist klar.

(2) $\mathfrak{p}^* \in \mathrm{Max}(B)$ bedeutet nach (1.4, b), daß $B/\mathfrak{p}^*$ der Quotientenkörper von $R/\mathfrak{p}$ ist, insbesondere als $R/\mathfrak{p}$-Modul teilbar $\neq 0$. Aus $\mathrm{Koass}_{R/\mathfrak{p}}(B/\mathfrak{p}^*) = \{0\}$ folgt aber $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}_R(B/\mathfrak{p}^*)$.

BEMERKUNG 1.6. Die Konstruktion von $\mathfrak{p}^*$ hat im folgenden Spezialfall eine wohlbekannte Bedeutung: Ist $(R, \mathfrak{m})$ regulär und 2-dimensional, $\mathfrak{m} = (x, y)$ und $u = \frac{y}{x} \in K$, so folgt $\mathfrak{c} = (x)$. Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \neq (x)$ der Höhe 1 und der Ordnung n (also $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}^n$, $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{m}^{n+1}$) gilt dann $\mathfrak{p}B = x^n \cdot \mathfrak{p}^*$, d.h. $\mathfrak{p}^*$ ist die *Zariski-Transformierte* von $\mathfrak{p}$ in B.

BEWEIS. In faktoriellen Ringen ist jedes Primideal der Höhe 1 zyklisch, hier also $\mathfrak{p} = (p)$ für ein Primelement $p \in \mathfrak{m}^n \backslash \mathfrak{m}^{n+1}$. Aus $p \in \mathfrak{m}^n B = x^n B$ folgt $\frac{p}{x^n} \in (\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}) \cap B = \mathfrak{p}^*$, also $\mathfrak{p}B \subset x^n \cdot \mathfrak{p}^*$. Umgekehrt gibt es zu jedem $b \in \mathfrak{p}^*$ nach (1.4, c) ein $m > n$ mit $x^m b \in \mathfrak{p}$, so daß aus $x^m b = rp$ und $p = x^n b_1$ folgt $x^{m-n} b = r b_1$. Weil $p \notin \mathfrak{m}^{n+1} = \mathfrak{m}^{n+1} B \cap R$, also das Primelement x kein Teiler von b_1 ist, folgt $r = x^{m-n} b_2$, daraus $x^m b = x^{m-n} p b_2$, $x^n b = p b_2 \in \mathfrak{p}B$ wie behauptet.

Zur Formulierung des nächsten Satzes erinnern wir an die Definition der Reduktion: Sind $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ zwei Ideale im Ring R, so heißt $\mathfrak{a}$ eine *Reduktion* von $\mathfrak{b}$, wenn es ein $n \geq 1$ gibt mit $\mathfrak{b}^{n+1} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}^n$. Das ist bekanntlich (siehe [1] p. 20) äquivalent damit, daß jedes Element von $\mathfrak{b}$ ganz über dem Ideal $\mathfrak{a}$ ist.

SATZ 1.7. *Sei R ein Integritätsring, $0 \neq u \in K$ und $B = R[u]$. Sei $\mathfrak{c} = \mathrm{Ann}_R(\bar{u})$, $\mathfrak{d} = \mathrm{Ann}_R(\overline{1/u})$ und $\mathfrak{p} \in D(\mathfrak{c})$, $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Max}(R)$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(B)$.

(ii) *$B/\mathfrak{p}^*$ ist nicht endlich erzeugt.*

(iii) *Im Ring $R/\mathfrak{p}$ ist $\dot{\mathfrak{c}}$ keine Reduktion von $\dot{\mathfrak{c}} + \dot{\mathfrak{d}}$.*

BEWEIS. (i $\to$ ii) Für jeden endlich erzeugten R-Modul M gilt $\mathrm{Koass}(M) \subset \mathrm{Max}(R)$. Ist also $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(B)$, d.h. nach (1.5) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(B/\mathfrak{p}^*)$, folgt wegen $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Max}(R)$ die Behauptung.

(ii $\to$ i) Mit einem $x \in \mathfrak{c} \backslash \mathfrak{p}$, d.h. $xu = y \in R$, folgt nach (1.4, b) $B/\mathfrak{p}^* = (R/\mathfrak{p})[\frac{\dot y}{\dot x}]$, so daß nach Voraussetzung $B/\mathfrak{p}^*$ nicht ganz über $R/\mathfrak{p}$ ist, also nach (1.3) $0 \in \mathrm{Koass}_{R/\mathfrak{p}}(B/\mathfrak{p}^*), \mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}_R(B/\mathfrak{p}^*)$.

(ii $\to$ iii) Angenommen, $\dot{\mathfrak{c}}$ ist eine Reduktion von $\dot{\mathfrak{c}} + \dot{\mathfrak{d}}$, so gibt es zum Ideal $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} + \mathfrak{d}$ ein $n \geq 1$ mit $\dot{\mathfrak{a}}^{n+1} = \dot{\mathfrak{c}}\dot{\mathfrak{a}}^n$, insbesondere $\dot{\mathfrak{d}}\dot{\mathfrak{a}}^n \subset \dot{\mathfrak{c}}\dot{\mathfrak{a}}^n$. Mit $x \in \mathfrak{c} \backslash \mathfrak{p}$ und $xu = y \in R$ folgt $0 \neq \dot x \in \dot{\mathfrak{a}}$ und $x\mathfrak{d} = y\mathfrak{c}$, $\dot y \dot{\mathfrak{d}} \dot{\mathfrak{a}}^n \subset \dot x \dot{\mathfrak{d}} \dot{\mathfrak{a}}^n$. Falls $\dot{\mathfrak{d}} \neq 0$, folgt aus dem letzten $\frac{\dot y}{\dot x} \in (R/\mathfrak{p})'$, so daß $B/\mathfrak{p}^* = (R/\mathfrak{p})[\frac{\dot y}{\dot x}]$ entgegen der Voraussetzung endlich erzeugt ist; falls $\dot{\mathfrak{d}} = 0$, folgt aus $y \in \mathfrak{d} \subset \mathfrak{p}$ sogar $\dot y = 0$, so daß $B/\mathfrak{p}^* = R/\mathfrak{p}$ entgegen der Voraussetzung zyklisch ist.

(iii $\to$ ii) Nehmen wir an, $B/\mathfrak{p}^*$ sei endlich erzeugt. Jedes $r \in \mathfrak{d}$ läßt sich in der Form $r = su$ schreiben mit $s \in \mathfrak{c}$: Falls $s \in \mathfrak{p}$, ist $r \in \mathfrak{p}B \cap R = \mathfrak{p}$ (wegen $\mathfrak{p} \in D(\mathfrak{c})$ ist ja $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}(B)$), also $\dot r = 0$; falls $s \notin \mathfrak{p}$, ist $B/\mathfrak{p}^* = (R/\mathfrak{p})[\frac{\dot r}{\dot s}]$, also nach Annahme $\frac{\dot r}{\dot s} \in (R/\mathfrak{p})'$, $\dot r$ ganz über dem Ideal $(\dot s)$. Beide Male ist also $\dot r$

ganz über dem Ideal $\dot{\mathfrak{c}}$, d.h. insgesamt $\dot{\mathfrak{d}}$ ganz über $\dot{\mathfrak{c}}$, und das widerspricht der Voraussetzung.

FOLGERUNG 1.8. *Seien die Voraussetzungen wie in* (1.7) *und* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(B)$. *Dann folgt für jedes Primideal* $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, *daß auch* $\mathfrak{q} \in \operatorname{Koass}(B)$ *ist.*

BEWEIS. Mit der Formel in (1.4, c) folgt $\mathfrak{q}^* \subset \mathfrak{p}^*$, so daß auch $B/\mathfrak{q}^*$ nicht endlich erzeugt ist.

BEISPIEL 1.9. Sei R ein Integritätsring, $0 \neq x \in R$ und $u = \frac{1}{x} \in K$, $B = R[u]$. Dann haben die bisher eingeführten Größen eine einfache Bedeutung: Aus $\mathfrak{c} = (x)$ und $B = R_x$ folgt $\mathfrak{c}B = B$, also $\operatorname{Att}(B) = D(\mathfrak{c})$. Für jedes $\mathfrak{p} \in D(\mathfrak{c})$ ist $\mathfrak{p}B \in \operatorname{Spec}(B)$ und $\mathfrak{p}B \cap R = \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}B$. Und weil $\mathfrak{d} = R$ ist, erhält man aus der Äquivalenz (i $\leftrightarrow$ iii) in (1.7) die Formel $\operatorname{Koass}(B) = \{\mathfrak{p} \in D(\mathfrak{c}) \mid$ falls $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Max}(R)$, ist $\mathfrak{p} + \mathfrak{c} \neq R\}$. Dies entspricht dem Ergebnis (2.5) in [10] (wo allgemeiner R_S statt R_x untersucht wird). Schon jetzt kann man sehen, daß in (1.5, Punkt 2) im allgemeinen keine Umkehrung gilt: Wählt man $0 \neq x \in Ra(R)$ und $\mathfrak{p} \in D(\mathfrak{c})$ so, daß $\dim(R/\mathfrak{p}) \geq 2$ ist, folgt natürlich $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(B)$, aber der Quotientenkörper $Q(R/\mathfrak{p})$ ist nicht von endlichem Typ über $R/\mathfrak{p}$, also $B/\mathfrak{p}^* \subsetneq Q(R/\mathfrak{p})$, $\mathfrak{p}^* \notin \operatorname{Max}(B)$.

2. Ringerweiterungen $R \subset R[u]$ mit linearer Basis.

Sei R ein Integritätsring und $0 \neq u \in K$, $B = R[u]$. Für den Einsetzhomomorphismus $\varphi : R[T] \to B$, $T \mapsto u$ gilt dann, daß $\operatorname{Ke} \varphi$ alle linearen Polynome $r - sT$ enthält ($r \in R, s \in R\backslash\{0\}, \frac{r}{s} = u$). Wird $\operatorname{Ke} \varphi$ als Ideal in $R[T]$ von all diesen linearen Polynomen erzeugt, so sagt man, $\operatorname{Ke} \varphi$ besitze eine *lineare Basis*, und diese Eigenschaft wurde von Ratliff Jr. u.a. in einer Reihe von Arbeiten, z.B. [7], [8] und [5] untersucht. Aus jeder der folgenden Bedingungen folgt, daß $\operatorname{Ke} \varphi$ eine lineare Basis besitzt:

(α) $B \cap R' = R$ (d.h. R ist ganz abgeschlossen in B),

(β) Mit $\mathfrak{c} = \operatorname{Ann}_R(\bar{u})$ und $\mathfrak{d} = \operatorname{Ann}_R(\overline{1/u})$ gilt $\mathfrak{d} \not\subset \cup\operatorname{Ass}(R/\mathfrak{c})$ (d.h. $\mathfrak{d}$ enthält einen Nichtnullteiler bzgl. $R/\mathfrak{c}$),

(γ) $B \cap R[1/u] = R$.

Genauer gilt ($\alpha \to \beta \to \gamma$), und die letzte Bedingung ist sogar charakteristisch ([5] Theorem 2.5).

LEMMA 2.1. *Sei R ein Integritätsring, $0 \neq u \in K$ und $B = R[u]$. Sei $\mathfrak{c} = \operatorname{Ann}_R(\bar{u})$, $\mathfrak{d} = \operatorname{Ann}_R(\overline{1/u})$ und besitze der Kern des Einsetzhomomorphismus $\varphi : R[T] \to B$ eine lineare Basis. Dann gilt für jedes Ideal I von R:*

(a) $(IB + uB) \cap R = I + \mathfrak{d}$.

(b) *Falls* $\mathfrak{d} \subset I$, *ist* $IB \cap R = I$.

(c) *Falls* $\mathfrak{c} + \mathfrak{d} \subset I$, *ist* $B/IB \cong (R/I)[T]$.

Beweis. (a) Wegen $\mathfrak{d} = \mathfrak{c} \cdot u$ ist $I + \mathfrak{d} \subset IB + uB$. Umgekehrt gilt für jedes $r \in (IB + uB) \cap R$, daß $r = \varphi(f + gT)$ ist mit $f \in IR[T]$, $g \in R[T]$. Als Element von Ke φ ist nach Voraussetzung $r - (f + gT) = \sum_{i=1}^{m} h_i \cdot (r_i - s_i T)$ mit $h_i \in R[T]$, $r_i \in R$, $s_i \in R \backslash \{0\}$ und $\frac{r_i}{s_i} = u$. Ist $\alpha \in I$ das konstante Glied von f und $\beta_i \in R$ das konstante Glied von h_i, folgt wegen $r_i \in \mathfrak{d}$ für alle $1 \leq i \leq m$ auch $r - \alpha = \sum_{i=1}^{m} \beta_i r_i \in \mathfrak{d}$, also $r \in I + \mathfrak{d}$ wie gewünscht.

(b) ist ein Spezialfall von (a), und bei (c) folgt aus $\frac{r}{s} = u$ stets $s \in \mathfrak{c}$, $r \in \mathfrak{d}$, also $r - sT \in (\mathfrak{c} + \mathfrak{d})R[T] \subset IR[T]$, wegen der linearen Basis sogar Ke $\varphi \subset IR[T]$, und daraus natürlich $R[T]/IR[T] \cong B/IB$.

Satz 2.2. *Seien die Bezeichnungen wie in* (2.1) *und besitze* Ke φ *eine lineare Basis. Dann sind für ein Primideal* $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{c})$ *äquivalent*:

(i) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(B)$.

(ii) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}(B)$.

(iii) $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{c} + \mathfrak{d})$.

Beweis. Die Implikationen (i $\to$ ii $\to$ iii) gelten ohne Voraussetzungen an Ke φ, denn (i $\to$ ii) ist klar, und bei (ii $\to$ iii) folgt aus $\mathfrak{p}B \cap R = \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{d} = \mathfrak{c} \cdot u \subset \mathfrak{p}B$ auch $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{p}$. Die Implikation (iii $\to$ i) ist mit (2.1, c) ebenso einfach, denn dann ist $B/\mathfrak{p}B$ als $R/\mathfrak{p}$-Modul isomorph zu $(R/\mathfrak{p})^{(\mathbb{N})}$, und weil $(R/\mathfrak{p})^{(\mathbb{N})}$ einen teilbaren Faktormodul $\neq 0$ hat, folgt $0 \in \mathrm{Koass}_{R/\mathfrak{p}}(B/\mathfrak{p}B)$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}_R(B/\mathfrak{p}B)$wie behauptet.

Bemerkung 2.3. Der Schritt (ii $\to$ iii) und (1.7) zeigen, daß auch ohne Voraussetzungen an Ke φ sowohl $\mathrm{Att}(B) \subset V(\mathfrak{c} + \mathfrak{d}) \,\dot{\cup}\, D(\mathfrak{c})$ ist als auch $\mathrm{Koass}(B) \subset V(\mathfrak{c} + \mathfrak{d}) \,\dot{\cup}\, \{\mathfrak{p} \in D(\mathfrak{c}) \mid$ falls $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Max}(R)$, ist im Ring $R/\mathfrak{p}$ das Ideal $\dot{\mathfrak{c}}$ keine Reduktion von $\dot{\mathfrak{c}} + \dot{\mathfrak{d}}\}$. Mit linearer Basis gilt nach (2.2) bei beiden Inklusionen Gleichheit, und damit sind die in der Einleitung angegebenen Formeln (a) und (b) bewiesen.

Ohne lineare Basis kann in (2.2) sowohl (ii $\to$ i) als auch (iii $\to$ ii) verletzt sein:

Beispiel 1. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Integritätsring, so daß R'/R sockelfrei $\neq 0$ ist. Für jedes $u \in R' \backslash R$ ist dann $B = R[u]$ als R-Modul endlich erzeugt, insbesondere $\mathrm{Att}(B) = \mathrm{Spec}(R)$. Weil aber $R/\mathfrak{c} \cong R\bar{u}$ sockelfrei $\neq 0$ ist, gibt es ein Primideal $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$. Damit ist $\mathfrak{p} \in \mathrm{Att}(B)$, $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Koass}(B)$.

Beispiel 2. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein vollständiger lokaler Integritätsring der Krulldimension 1, so daß $R'/R \neq 0$ und der Restklassenkörper $k = R/\mathfrak{m}$ algebraisch abgeschlossen ist. Dann ist R' ein diskreter Bewertungsring, und für sein einziges maximales Ideal $\mathcal{M}$ gilt $R + \mathcal{M} = R'$. Zu $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(R'/R)$ gibt es also ein $v \in \mathcal{M}$ mit $\mathfrak{m} = \mathrm{Ann}_R(\bar{v})$, und für $u = 1/v \in K$, $B = R[u]$ folgt $u \notin R'$, $R' \subsetneq B'$, $B = K$. Damit ist $\mathfrak{m} \in V(\mathfrak{c} + \mathfrak{d})$, $\mathfrak{m} \notin \mathrm{Att}(B)$.

Das nächste Lemma zeigt, daß in Beispiel 1 der R-Modul B nicht radikalvoll sein durfte. Dabei heißt ein R-Modul M (über einem beliebigen Ring R) *radikalvoll*, wenn $\mathfrak{m}M = M$ ist für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, d.h. wenn keines der maximalen Ideale von R zu M koassoziiert ist.

LEMMA 2.4. *Ist $R \subset A$ eine Ringerweiterung und A als R-Modul radikalvoll, so gilt* $\mathrm{Koass}(A) = \mathrm{Att}(A)$.

BEWEIS. Für jeden R-Modul M definieren wir $\mathrm{att}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid M/\mathfrak{p}M$ ist als $R/\mathfrak{p}$-Modul nicht torsion$\}$. Es ist leicht zu sehen, daß ein Primideal $\mathfrak{p}$ genau dann zu $\mathrm{att}(M)$ gehört, wenn $M_\mathfrak{p}$ als $R_\mathfrak{p}$-Modul nicht radikalvoll ist, und unmittelbar aus der Definition folgt $\mathrm{att}(M) \subset \mathrm{Att}(M)$.

(1) Ist M radikalvoll, so gilt $\mathrm{att}(M) \subset \mathrm{Koass}(M)$. Nach ([10] Folgerung 1.5) gilt nämlich für jedes $\mathfrak{p} \in \mathrm{att}(M)$, daß $M/\mathfrak{p}M$ als $R/\mathfrak{p}$-Modul in seiner injektiven Hülle nicht klein sein kann, also über $R/\mathfrak{p}$ einen teilbaren Faktormodul $D \neq 0$ hat (siehe den Beweis von 1.3). Aus $\{0\} = \mathrm{Koass}_{R/\mathfrak{p}}(D) \subset \mathrm{Koass}_{R/\mathfrak{p}}(M/\mathfrak{p}M)$ folgt $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}_R(M/\mathfrak{p}M)$.

(2) Für jede Ringerweiterung $R \subset A$ gilt $\mathrm{Att}(A) = \mathrm{att}(A)$, denn aus $\mathfrak{p} \notin \mathrm{att}(A)$ folgt, daß $A/\mathfrak{p}A$ als $R/\mathfrak{p}$-Modul torsion, also schon beschränkt ist (betrachte $\bar{1} \in A/\mathfrak{p}A$), d.h. $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Att}(A)$. War zusätzlich ${}_RA$ radikalvoll, folgt mit (1) die Behauptung des Lemmas.

Ist $(R, \mathfrak{m})$ wieder ein lokaler Integritätsring und $0 \neq u \in K$, so ist $B = R[u]$ als R-Modul genau dann radikalvoll, wenn $1/u \in \cap\mathrm{Max}(R')$ ist. Falls zusätzlich $\dim(R) = 1$ und $\mathfrak{m}$ durch zwei Elemente erzeugt ist, kann man viel mehr sagen. Wir werden die folgende Äquivalenz (i $\leftrightarrow$ iii) im nächsten Abschnitt (3.1) zur Bestimmung aller $\mathfrak{p} \in D(\mathfrak{c})$ verwenden, bei denen $\mathfrak{p}^* \in \mathrm{Max}(B)$ ist.

SATZ 2.5. *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Integritätsring der Krulldimension* 1 *und der Multiplizität n. Sei $\mathfrak{m} = (x, y)$ mit $x \neq 0$, $y \neq 0$ und sei $u = \frac{y}{x} \in K$, $B = R[u]$. Dann sind äquivalent:*

(i) *B ist als R-Modul radikalvoll.*

(ii) *Es gibt ein $i \geq 1$ mit $x^i \in \mathfrak{m}^{i+1}$.*

(iii) $x^n \in \mathfrak{m}^{n+1}$.

(iv) *$1/u \in R'$, und aus $r_0 + r_1u + \ldots + r_nu^n = 0$ (alle $r_i \in R$) folgt stets $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathfrak{m}$.*

BEWEIS. (i $\to$ ii) Wegen $y = xu$ ist $\mathfrak{m}B = xB$, unter der Voraussetzung (i) also $xB = B$, $\frac{1}{x} \in R + Ru + \ldots + Ru^{i+1}$ für ein $i \geq 1$, $x^i \in Rx^{i+1} + Rx^iy + \ldots + Ry^{i+1} = \mathfrak{m}^{i+1}$.

(ii $\to$ iv) Aus $x^i \in \mathfrak{m}^{i+1}$ folgt nach Nakayama $\mathfrak{m}^i = (x^{i-1}y, x^{i-2}y^2, \ldots, y^i) = y \cdot \mathfrak{m}^{i-1}$, so daß das Ideal (y) eine Reduktion von $\mathfrak{m}$ ist. Nach Matlis ([4] Theorem 13.7) ist nun $\nu(\mathfrak{m}^j) = j+1$ für alle $0 \leq j < n$ (wobei $\nu(M)$ die minimale Erzeugendenanzahl eines R-Moduls M sei), hier aber $\nu(\mathfrak{m}^i) = \nu(\mathfrak{m}^{i-1}) \leq i$, und daraus folgt $i \geq n$.

1. *Schritt.* Für alle $0 \leq j < n$ gilt

$$(*) \qquad x^j y^{n-j} \notin \mathfrak{m}^{n+1} + x^{j+1} \cdot \mathfrak{m}^{n-(j+1)}.$$

Wäre nämlich (*) verletzt, folgte durch Multiplikation mit $x^{i-(j+1)}$ zuerst $x^{i-1}y^{n-j} \in \mathfrak{m}^{n+i-j} + x^i \cdot \mathfrak{m}^{n-(j+1)}$, wegen $x^i \in \mathfrak{m}^{i+1}$ dann $x^{i-1}y^{n-j} \in \mathfrak{m}^{n+i-j} = y^{n-j} \cdot \mathfrak{m}^i$, also $x^{i-1} \in \mathfrak{m}^i$. Induktiv könnte man fortfahren bis $x^{n-1} \in \mathfrak{m}^n$, aber das ist nach der Vorbemerkung unmöglich.

2. *Schritt.* Weil (y) eine Reduktion von $\mathfrak{m}$ war, d.h. x ganz über dem Ideal (y), ist $1/u \in R'$. Sei jetzt $r_0 + r_1u + \ldots + r_nu^n = 0$, d.h. $r_0x^n + r_1x^{n-1}y + \ldots + r_ny^n = 0$. Bei $n = 1$ folgt aus $r_0x + r_1y = 0$ und $y \notin (x)$ (* mit $j = 0$) sofort $r_1 \in \mathfrak{m}$. Bei $n \geq 2$ folgt aus $x(r_0x^{n-1} + \ldots + r_{n-1}y^{n-1}) + r_ny^n = 0$ und $y^n \notin x \cdot \mathfrak{m}^{n-1}$ (* mit $j = 0$) zuerst $r_n \in \mathfrak{m}$. Hat man bereits $r_{k+1}, r_{k+2}, \ldots, r_n \in \mathfrak{m}$ $(1 \leq k < n)$, so folgt aus

$$x^{n-(k-1)}(r_0x^{k-1} + r_1x^{k-2}y + \ldots + r_{k-1}y^{k-1}) + r_kx^{n-k}y^k \in \mathfrak{m}^{n+1}$$

und $x^{n-k}y^k \notin \mathfrak{m}^{n+1} + x^{n-(k-1)} \cdot \mathfrak{m}^{k-1}$ (* mit $j = n-k$) auch $r_k \in \mathfrak{m}$, also induktiv die Behauptung.

(iv $\rightarrow$ iii) Aus $1/u \in R'$ folgt, daß (y) eine Reduktion von $\mathfrak{m}$ ist, also nach Matlis ([4] Theorem 13.10) schon $\mathfrak{m}^n = y \cdot \mathfrak{m}^{n-1}$. Insbesondere ist $x^n = r_1x^{n-1}y + r_2x^{n-2}y^2 + \ldots + r_ny^n$ mit $r_i \in R$, d.h. $-1 + r_1u + r_2u^2 + \ldots + r_nu^n = 0$. Aus der zweiten Bedingung folgt $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathfrak{m}$ und damit $x^n \in \mathfrak{m}^{n+1}$.

(iii $\rightarrow$ i) Aus $x^n \in \mathfrak{m}^{n+1} = Rx^{n+1} + Rx^ny + \ldots + Ry^{n+1}$ folgt $\frac{1}{x} \in R + Ru + \ldots + Ru^{n+1} \subset B$, wegen $R[\frac{1}{x}] = K$ also $B = K$.

Bemerkung 2.6. Betrachtet man die schwächere Bedingung: (i′) B ist als R-Modul nicht endlich erzeugt, so gibt es auch für sie – unter denselben Voraussetzungen wie in (2.5) – eine Reihe von Äquivalenzen. Weil sie im folgenden nicht gebraucht werden, geben wir sie ohne Beweis an: (ii′) $y^i \notin x \cdot \mathfrak{m}^{i-1}$ für alle $i \geq 1$. (iii′) $y^n \notin x \cdot \mathfrak{m}^{n-1}$. (iv′) Aus $r_0 + r_1u + \ldots + r_nu^n = 0$ (alle $r_i \in R$) folgt stets $r_n \in \mathfrak{m}$.

3. Zwei Beispiele.

Sei $(R, \mathfrak{m})$ regulär und 2-dimensional, $\mathfrak{m} = (x, y)$, $u = \frac{y}{x} \in K$ und $B = R[u]$. Weil R normal ist, hat der Kern des Einsetzhomomorphismus $\varphi : R[T] \rightarrow B$ eine lineare Basis (genauer ist $\operatorname{Ke}\varphi = (y - xT)$), und weil die Ideale $\mathfrak{c} = \operatorname{Ann}_R(\bar{u}) = (x)$ und $\mathfrak{d} = \operatorname{Ann}_R(\overline{1/u}) = (y)$ die Eigenschaft $\mathfrak{c} + \mathfrak{d} = \mathfrak{m}$ haben, nehmen die früheren Ergebnisse eine besonders einfache Gestalt an.

Nach (2.2) ist $\mathrm{Att}(B) = \{\mathfrak{m}\} \dot\cup D(\mathfrak{c}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \neq (x)\}$, und neben $\mathfrak{m} \in \mathrm{Koass}(B)$ ist nach (1.1) auch $0 \in \mathrm{Koass}(B)$. Bleiben die Primideale $\mathfrak{p} \neq (x)$ der Höhe 1:

SATZ 3.1. *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein regulärer, 2-dimensionaler Ring und $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$, $B = R[\mathfrak{m}/x]$. Sei $\mathfrak{p} \neq (x)$ ein Primideal der Höhe* 1 *und der Ordnung n. Dann gilt:*

(1) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(B) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}^{n+1} + (x)$.

(2) $\mathfrak{p}^* \in \mathrm{Max}(B) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}^{n+1} + (x^n)$.

BEWEIS. Mit $\mathfrak{m} = (x, y)$ und $u = \frac{y}{x} \in K$ ist $B = R[u]$.

(1) Betrachten wir für $\mathfrak{c} = (x)$ die Bedingung (iii) in (1.7): Nach Rees (siehe [1] p. 147) ist im Ring $R/\mathfrak{p}$ das Ideal $\dot{\mathfrak{c}}$ genau dann eine Reduktion von $\dot{\mathfrak{m}}$, wenn die Multiplizität von $R/\mathfrak{p}$ bzgl. $\dot{\mathfrak{c}}$ gleich der bzgl. $\dot{\mathfrak{m}}$ ist, d.h. $e_{\dot{\mathfrak{c}}}(R/\mathfrak{p}) = e_{\dot{\mathfrak{m}}}(R/\mathfrak{p})$. Weil R regulär und $\mathfrak{p}$ zyklisch $\neq 0$ ist, gilt bekanntlich $e_{\dot{\mathfrak{m}}}(R/\mathfrak{p}) = \mathrm{Mult}(R/\mathfrak{p}) = \mathrm{ord}_R(\mathfrak{p}) = n$. Weil $\dot{\mathfrak{c}}$ zyklisch $\neq 0$ und $\bar{R} = R/\mathfrak{c}$ ein diskreter Bewertungsring ist, gilt andererseits $e_{\dot{\mathfrak{c}}}(R/\mathfrak{p}) = \mathrm{Länge}(R/\mathfrak{p} + \mathfrak{c}) = \mathrm{ord}_{\bar{R}}(\bar{\mathfrak{p}})$. Also folgt mit (1.7): Genau dann ist $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(B)$, wenn $\mathrm{ord}_{\bar{R}}(\bar{\mathfrak{p}}) > n$, d.h. $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}^{n+1} + \mathfrak{c}$ ist.

(2) $\Rightarrow$ Weil $B/\mathfrak{p}^* = (R/\mathfrak{p})[\frac{\dot{y}}{\dot{x}}]$ radikalvoll ist, folgt nach (2.5) $\dot{x}^n \in \dot{\mathfrak{m}}^{n+1}$, d.h. $x^n \in \mathfrak{p} + \mathfrak{m}^{n+1}$. Mit $\mathfrak{p} = (p)$ bedeutet das $x^n - rp \in \mathfrak{m}^{n+1}$, und weil $x^n \notin \mathfrak{m}^{n+1}$, also $r \notin \mathfrak{m}$ ist, erhält man $p - r^{-1} \cdot x^n \in \mathfrak{m}^{n+1}$, $p \in \mathfrak{m}^{n+1} + (x^n)$.

$\Leftarrow$ Mit $\mathfrak{p} = (p)$ folgt $p - rx^n \in \mathfrak{m}^{n+1}$, und weil $p \notin \mathfrak{m}^{n+1}$, also $r \notin \mathfrak{m}$ ist, erhält man $x^n - r^{-1} \cdot p \in \mathfrak{m}^{n+1}$, $\dot{x}^n \in \dot{\mathfrak{m}}^{n+1}$. Der Beweis von (2.5, iii $\to$ i) zeigte, daß dann $B/\mathfrak{p}^* = (R/\mathfrak{p})[\frac{\dot{y}}{\dot{x}}]$ mit dem Quotientenkörper von $R/\mathfrak{p}$ übereinstimmt, also $\mathfrak{p}^* \in \mathrm{Max}(B)$ ist.

BEMERKUNG 3.2. Sei F ein beliebiger Körper und $R = F[X, Y]_{(X,Y)}$. Zu $u = \frac{Y}{X}$ und $B = R[u]$ erhält man dann sofort folgende Beispiele:

(a) Sind $n < m$ natürliche, teilerfremde Zahlen und $\mathfrak{p} = (X^m - Y^n)$, so ist $\mathrm{ord}_R(\mathfrak{p}) = n = \mathrm{ord}_{R/(X)}(\bar{\mathfrak{p}})$, also $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{m}^{n+1} + (X)$, $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Koass}(B)$.

(b) Ist $m \geq 2$ und $\mathfrak{p} = (X^m + XY + Y^3)$, so ist $\mathrm{ord}_R(\mathfrak{p}) = 2$ und $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}^3 + (X)$, aber $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{m}^3 + (X^2)$, also $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(B)$, $\mathfrak{p}^* \notin \mathrm{Max}(B)$.

(c) Sind $n < m$ natürliche teilerfremde Zahlen und $\mathfrak{p} = (X^n - Y^m)$, so ist $\mathrm{ord}_R(\mathfrak{p}) = n$ und $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}^m + (X^n)$, also $\mathfrak{p}^* \in \mathrm{Max}(B)$.

Das zweite Beispiel sei, über einem beliebigen Körper k, der Ring $R = k[[W, X, Y, Z]]/(WX - YZ)$ mit dem ausgezeichneten Element $u = \frac{y}{x} \in K$. R ist ein vollständiger, lokaler Integritätsring der Krulldimension 3, Einbettungsdimension 4 und Multiplizität 2, und weil das Primideal (x, z) das Element y nicht enthält, folgt $\mathfrak{c} = \mathrm{Ann}_R(\bar{u}) = (x, z)$. Entsprechend berechnet man $\mathfrak{d} = \mathrm{Ann}_R(\overline{1/u}) = (y, w)$, so daß wieder $\mathfrak{c} + \mathfrak{d} = \mathfrak{m}$ ist. Die Primideale $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ haben die Höhe 1, sind aber nicht zyklisch, so daß R nicht faktoriell ist. Weil aber R normal ist, hat der Kern des Einsetzhomomorphismus $\varphi : R[T] \to B$ eine lineare Basis (genauer wird $\operatorname{Ke}\varphi$ von $y - xT$ und $w - zT$ erzeugt), so daß nach (2.2) folgt $\operatorname{Att}(B) = \{\mathfrak{m}\} \cup D(\mathfrak{c})$. Bleiben für $\operatorname{Koass}(B) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ die Elemente von $D(\mathfrak{c})$ zu betrachten:

SATZ 3.3. *Sei* $R = k[[W, X, Y, Z]]/(WX - YZ)$, $u = \frac{y}{x} \in K$ *und* $B = R[u]$. *Sei* $\mathfrak{c} = (x, z)$ *und* $\mathfrak{p} \in D(\mathfrak{c})$.

(1) Ist $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$, so gilt: $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(B) \Leftrightarrow \mathfrak{p}^* \in \operatorname{Max}(B)$.

(2) Ist $\dim(R/\mathfrak{p}) \geq 2$, so gilt: $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(B) \Leftrightarrow \sqrt{\mathfrak{p} + \mathfrak{c}} \subsetneqq \mathfrak{m}$.

BEWEIS. (1) Nur $\Rightarrow$ ist zu zeigen, und da ist $B/\mathfrak{p}^*$ nach (1.7) nicht endlich erzeugt. Weil aber $R/\mathfrak{p}$ 1-dimensional und vollständig, also $(R/\mathfrak{p})'$ ein diskreter Bewertungsring ist, folgt aus $(R/\mathfrak{p})' \subsetneqq (B/\mathfrak{p}^*)'$ bereits $B/\mathfrak{p}^* = Q(R/\mathfrak{p})$, d.h. $\mathfrak{p}^* \in \operatorname{Max}(B)$.

(2) $\Rightarrow$ Der Kokern der Einbettung $R/\mathfrak{p} \subset B/\mathfrak{p}^*$ ist als $R/\mathfrak{p}$-Modul $\dot{\mathfrak{c}}$-torsion, d.h. $B/\mathfrak{p}^*$ ist enthalten in der Idealtransformation $T_{\dot{\mathfrak{c}}}(R/\mathfrak{p})$ von $R/\mathfrak{p}$ bzgl. des Ideales $\dot{\mathfrak{c}}$. Wieder nach (1.7) ist $B/\mathfrak{p}^*$, also erst recht $T_{\dot{\mathfrak{c}}}(R/\mathfrak{p})$ nicht endlich erzeugt, so daß $\dot{\mathfrak{c}}$ nach Nishimura ([6] Proposition 2.7.2) in einem Primideal $\dot{\mathfrak{q}}$ der Höhe 1 liegt. Aus $\dim(R/\mathfrak{p}) \geq 2$ folgt $\dot{\mathfrak{q}} \neq \dot{\mathfrak{m}}$, also $\mathfrak{p} + \mathfrak{c} \subset \mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{m}$ wie behauptet.

$\Leftarrow$ Angenommen $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Koass}(B)$, so ist im Ring $R/\mathfrak{p}$ das Ideal $\dot{\mathfrak{c}}$ nach (1.7) eine Reduktion von $\dot{\mathfrak{m}}$, insbesondere $\sqrt{\dot{\mathfrak{c}}} = \dot{\mathfrak{m}}$, d.h. $\sqrt{\mathfrak{p} + \mathfrak{c}} = \mathfrak{m}$. Aber das widerspricht der Voraussetzung.

BEMERKUNG 3.4. Seien die Bezeichnungen wie in (3.3). Dann wollen wir einige spezielle Elemente von $\operatorname{Koass}(B)$ angeben:

(a) Es gibt unendlich viele Primideale der Höhe 1, die zu B koassoziiert sind. Zum Beweis wähle man irgendein Primideal $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{c} \subsetneqq \mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{m}$, dazu nach dem Krull'schen Hauptidealsatz unendlich viele Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots$ mit $0 \neq \mathfrak{p}_i \subsetneqq \mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{c}$, und dann sind nach (2) alle $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Koass}(B)$.

(b) Konkreter ist $\mathfrak{a} = (x, y)$ ein Primideal der Höhe 1 mit $\mathfrak{c} \not\subset \mathfrak{a}$, und weil $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} = (x, y, z)$ ein Primideal der Höhe 2 ist, gilt $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{c}} \subsetneqq \mathfrak{m}$, also nach (2) $\mathfrak{a} \in \operatorname{Koass}(B)$. In diesem Fall hat $B/\mathfrak{a}^*$ eine besondere Gestalt: $\bar{R} = R/\mathfrak{a}$ ist regulär und 2-dimensional (nämlich isomorph zu $k[[W, Z]]$), und weil $\bar{w}$ ein Nichtnullteiler bzgl. $\bar{R}/(\bar{z})$ ist, ist $(\bar{w} - \bar{z}T)$ ein Primideal im Polynomring $\bar{R}[T]$, also $\operatorname{Ke}\varphi + \mathfrak{a}R[T]$ ein Primideal in $R[T]$ und $\mathfrak{a}B = xB$ ein Primideal im Ring B mit $\mathfrak{a}B \cap R = \mathfrak{a}$. Es folgt $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}B$, und $B/\mathfrak{a}^* \cong \bar{R}[\frac{\bar{w}}{\bar{z}}] = \bar{R}[\bar{\mathfrak{m}}/\bar{z}]$ ist gerade von dem in (3.1) betrachteten Typ.

(c) Es gibt unendlich viele Primideale der Höhe 2, die zu B koassoziiert sind. Zum Beweis betrachte man $\mathfrak{a} = (x, y)$ und $\bar{R} = R/\mathfrak{a} \cong k[[W, Z]]$ wie in (b). Für alle $m \geq 2$ ist dann $(\bar{z} - \bar{w}^m)$ im Ring $\bar{R}$ ein Primideal der Ordnung

1, also $\mathfrak{p} := \mathfrak{a} + (z - w^m)$ im Ring R ein Primideal der Höhe 2 und $R/\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring. Aus $\mathfrak{p} + \mathfrak{c} = (x, , y, z, w^m)$ folgt Länge $(R/\mathfrak{p} + \mathfrak{c}) = m$, so daß verschiedene m auch verschiedene $\mathfrak{p}$ liefern, und aus $\dot{\mathfrak{c}} \subsetneqq \dot{\mathfrak{m}}$ im Ring $R/\mathfrak{p}$ folgt, daß $\dot{\mathfrak{c}}$ keine Reduktion von $\dot{\mathfrak{m}}$ ist, also nach (1.7) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(B)$.

Wir wollen $\mathfrak{p}^*$ noch explizit beschreiben: Weil $(1 - \bar{w}^{m-1} \cdot \frac{\bar{w}}{\bar{z}})$ ein Primideal im Ring $\bar{R}[\frac{\bar{w}}{\bar{z}}] \cong \bar{R}[T]/(\bar{w} - \bar{z}T)$ ist (nämlich die Zariski-Transformierte von $(\bar{z} - \bar{w}^m) \in \mathrm{Spec}(\bar{R})$, siehe 1.6), ist $(\bar{w} - \bar{z}T, 1 - \bar{w}^{m-1}T)$ ein Primideal im Polynomring $\bar{R}[T]$, also $\mathrm{Ke}\,\varphi + (x, 1 - w^{m-1}T)$ ein Primideal in $R[T]$ und $P := xB + (1 - w^{m-1} \cdot u)B$ ein Primideal im Ring B. Aus $0 \neq xB \subsetneqq P \subset \mathfrak{p}^*$ und $h(\mathfrak{p}^*) = h(\mathfrak{p}) = 2$ folgt $P = \mathfrak{p}^*$, d.h. $\mathfrak{p}^*$ wird im Ring B von den Elementen x und $1 - w^{m-1} \cdot u$ erzeugt.

(d) Wegen $\mathfrak{c} + \mathfrak{d} = \mathfrak{m}$ ist nach Punkt (2) $\mathfrak{d} \notin \mathrm{Koass}(B)$, also $B/\mathfrak{d}^*$ endlich erzeugt. Aber mit (2.1, a) erhält man genauer: Der kanonische Epimorphismus $R \to B/uB$ hat den Kern $\mathfrak{d}$, so daß uB ein Primideal im Ring B ist mit $uB \cap R = \mathfrak{d}$. Damit folgt $\mathfrak{d}^* = uB$ und $B/\mathfrak{d}^* \cong R/\mathfrak{d}$.

Über jedem Integritätsring R gilt für $0 \neq u \in K$ und $\mathfrak{c} = \mathrm{Ann}_R(\bar{u})$ (mit $\bar{u} \in K/R$), daß $B = R[u]$ in der Idealtransformation $T_\mathfrak{c}(R) = \{v \in K \mid \mathfrak{c}^m \cdot v \subset R$ für ein $m \geq 1\}$ enthalten ist. Im allgemeinen ist diese Inklusion echt: Beim ersten Beispiel, d.h. $(R, \mathfrak{m})$ regulär und 2-dimensional, $\mathfrak{m} = (x, y)$ und $u = \frac{y}{x}$, ist $T_\mathfrak{c}(R) = R_x$ radikalvoll und $\mathfrak{m}B \neq B$, also $B \subsetneqq T_\mathfrak{c}(R)$. Beim zweiten aber gilt Gleichheit:

Satz 3.5. *Sei* $R = k[[W, X, Y, Z]]/(WX - YZ)$, $u = \frac{y}{x} \in K$ *und* $\mathfrak{c} = \mathrm{Ann}_R(\bar{u})$. *Dann stimmt* $B = R[u]$ *mit der Idealtransformation* $T_\mathfrak{c}(R)$ *überein.*

Beweis. Für alle $n \geq 1$ sei $\mathfrak{c}^{-n} = \{v \in K \mid \mathfrak{c}^n v \subset R\}$, und dafür müssen wir $\mathfrak{c}^{-n} \subset B$ zeigen. Wir behaupten genauer, daß $\mathfrak{c}^{-n} = R + Ru + \ldots + Ru^n$ ist, mit dem Primideal $\mathfrak{a} = (x, y)$ aus (3.4, b) also $x^n \cdot \mathfrak{c}^{-n} = \mathfrak{a}^n$.

1. *Schritt* $x^n \cdot \mathfrak{c}^{-n} = \mathfrak{a}^{(n)}$. Für das Ideal $I = x^n \cdot \mathfrak{c}^{-n}$ gilt zunächst $\mathfrak{a}^n \subset I \subset \mathfrak{a}^{(n)}$, denn die erste Inklusion folgt aus $\mathfrak{c}\mathfrak{a} \subset (x)$, und die zweite aus $z \notin \mathfrak{a}$, $z^n I \subset (x^n)$. Bleibt zu zeigen, daß I $\mathfrak{a}$-primär ist, d.h. $\mathrm{Ass}(R/I) = \{\mathfrak{a}\}$: Mit dem R-Modul $M = K/R$ gilt

$$R/I \cong R\frac{1}{x^n}\Big/\mathfrak{c}^{-n} \subset K/\mathfrak{c}^{-n} \cong M/\mathrm{Ann}_M(\mathfrak{c}^n) \hookrightarrow M^m$$

für ein $m \geq 1$, also $\mathrm{Ass}(R/I) \subset \mathrm{Ass}(M)$. Weil R normal ist, haben alle Elemente von $\mathrm{Ass}(M)$ die Höhe 1, so daß für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R/I)$ folgt $I \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}^n \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}$ wie behauptet.

2. *Schritt* $\mathfrak{a}^{(n)} = \mathfrak{a}^n$. Das folgt mit ([2] Theorem 3.1), wenn man beachtet, daß $\mathfrak{a} = (x, y)$ ein im Sinne von Huneke fast vollständiger Durchschnitt ist

und alle Ideale $\mathfrak{a}R_\mathfrak{p}$ zyklisch sind ($\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$). Wir wollen aber einen davon unabhängigen Beweis durch Induktion über n geben. Klar ist $n = 1$, und bei $n \geq 2$ gilt für jedes $r \in \mathfrak{a}^{(n)}$ nach Induktion $r \in \mathfrak{a}^{n-1}$, also

$$(*). \qquad r = r_1x^{n-1} + r_2x^{n-2}y + \ldots + r_ny^{n-1}, \quad \text{alle } r_i \in R.$$

Nach dem 1. Schritt ist $rz^n \in (x^n)$, mit (*) und $wx = yz$ also $r_1x^{n-1}z^n + r_2x^{n-1}z^{n-1}w + \ldots + r_nx^{n-1}zw^{n-1} \in (x^n)$, und daraus folgt $r_1z^{n-1} + r_2z^{n-2}w + \ldots + r_nw^{n-1} \in (x) : (z) \subset \mathfrak{a}$, $r_nw^{n-1} \in \mathfrak{a} + (z) \not\ni w$, $r_n \in \mathfrak{a} + (z)$. Setzt man $r_n = \alpha x + \beta y + \gamma z$ in (*) ein, erhält man $r = sx + \beta y^n$, aus $sx \in \mathfrak{a}^{(n)}$ wieder mit dem 1. Schritt $sxz^n \in (x^n)$, $sz^n \in \mathfrak{a}^{n-1}$, $s \in \mathfrak{a}^{(n-1)} = \mathfrak{a}^{n-1}$, also endlich $r \in \mathfrak{a}^n$.

LITERATUR

1. M. Herrmann, S. Ikeda und U. Orbanz, *Equimultiplicity and Blowing up,* Springer, 1988.
2. C. Huneke, *Symbolic powers of prime ideals and special graded algebras,* Comm. Algebra 9 (1981), 339–366.
3. I. Kaplansky, *Topics in Commutative Ring Theory,* Chicago Univ. Press, 1974.
4. E. Matlis, *1-dimensional Cohen-Macaulay rings,* Lecture Notes in Math. 327 (1973).
5. A. Mirbagheri und L. J. Ratliff, Jr., *On the intersection of two overrings,* Houston J. Math. 8 (1982), 525–535.
6. J. Nishimura, *On ideal transforms of noetherian rings,* II, J. Math. Kyoto Univ. 20 (1980), 149–154.
7. L. J. Ratliff, Jr., *Conditions for* $\mathrm{Ker}(R[X] \to R[c/b])$ *to have a linear base,* Proc. Amer. Math. Soc. 39 (1973), 509–514.
8. L. J. Ratliff, Jr., *On the integral closure of a ring in an over-ring,* Houston J. Math. 2 (1976), 111–127.
9. H. Zöschinger, *Über koassoziierte Primideale,* Math. Scand. 63 (1988), 196–211.
10. H. Zöschinger, *Der Krull'sche Durchschnittssatz für kleine Untermoduln,* Arch. Math. 62 (1994), 292–299.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
THERESIENSTR. 39
D-80333 MÜNCHEN
GERMANY