MATH. SCAND. 93 (2003), 23–40

DIEXTENSIONS ET PANEXTENSIONS DE CATÉGORIES

GEORGES HOFF

Abstract

Considering some different notions of kernel for a quotient functor, news kinds of extensions of (small) categories appear. In each context, one sees how 2-cocycles are naturally defined. Classical 2-cohomologies, like Hochschild's one (for which the need of commutativity is here discussed), are particular cases in this framework. One has thus an unifying point of view for extensions structures.

1. Introduction

Dans [9], nous reprenions la notion d'extension de (petites) catégories définie dans [8] pour l'élargir. De nombreux travaux ont montré le besoin réitéré et l'importance de ce type de structures donnant de la 2-cohomologie.

La définition considère le noyau $\mathbf{K}$ d'un foncteur quotient $\mathbf{H} \to \mathbf{C}$ i.e. plein (surjectif sur les morphismes) et bijectif sur les objets (par commodité, on peut dire que $\mathbf{H}$ et $\mathbf{C}$ ont les mêmes objets).

Définition 1.1. Une *extension de catégories* (de la catégorie $\mathbf{C}$ par la catégorie $\mathbf{K}$) est une suite $\mathbf{E}\colon \mathbf{K} \xrightarrow{i} \mathbf{H} \xrightarrow{p} \mathbf{C}$, où i est un foncteur fidèle et p un foncteur quotient, telle que pour h et $h' \in \mathbf{H}_1$, on a:

$$(\star)\qquad p(h) = p(h') \iff \exists! k \in \mathbf{K}_1, h' = i(k)h.$$

Comme nous l'avons vu dans [9], ceci mène à de la 2-cohomologie à coefficients covariants et on peut l'adapter pour avoir de la 2-cohomologie à coefficients contravariants.

Définition 1.2. Une *opextension de catégories* est une suite $\mathbf{E}\colon \mathbf{K} \xrightarrow{i} \mathbf{H} \xrightarrow{p} \mathbf{C}$, où i est un foncteur fidèle et p un foncteur quotient, telle que pour h et $h' \in \mathbf{H}_1$, on a:

$$(\star)\qquad p(h) = p(h') \iff \exists! k \in \mathbf{K}_1, h' = hi(k).$$

Received May 25, 2001.

Hormis $\mathscr{G}r$ ou $\mathscr{A}b$, catégories des groupes ou des groupes abéliens, les catégories considérées sont petites. Si $\mathbf{C}$ est une catégorie, nous noterons $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \ldots$ les ensembles de ses objets, de ses morphismes, de ses couples de morphismes composables... Si A et $B \in \mathbf{C}_0$ sont des objets, nous noterons $\mathbf{C}(A, B)$ l'ensemble des morphismes f de source A et de but B (on notera aussi $A = \alpha(f)$ et $B = \beta(f)$).

On remarquera, comme dans [9], que les extensions (resp. les opextensions) sont les précofibrations (resp. les préfibrations) au sens de Grothendieck dont les fibres sont des groupes. La catégorie $\mathbf{K}$ est donc un groupoïde coproduit (somme disjointe) des groupes fibres.

Dans les définitions ci-dessus, ce sont les fibres de p qui déterminent la relation d'équivalence $p(h) = p(h')$ par une action à gauche ou à droite. Dans ce qui suit, nous remplacerons l'action sur $\mathbf{H}$ des groupes $\mathbf{K}_A = p^{-1}(A)$ indexés par $\mathbf{C}_0$ par celle de groupes $\mathbf{K}_{A,B}$ indexés par $\mathbf{C}_0 \times \mathbf{C}_0$, puis par celle de groupes $\mathbf{K}_f$ indexés par $\mathbf{C}_1$. Ces manières différentes d'envisager le noyau d'un foncteur quotient fournissent de nouveaux types d'extensions.

La première démarche fait apparaître de la 2-cohomologie à coefficients bivariants. Comme cas particulier, on retrouve la cohomologie de Hochschild-Mitchell à coefficients dans un bimodule ([11]) et son interprétation en termes d'extensions. La seconde démarche prolonge naturellement la précédente et mène à une 2-cohomologie dont un cas particulier est la cohomologie de Baues-Wirsching à coefficients dans un système naturel ([2]). Nous mesurerons en passant le besoin de commutativité de ces contextes.

Ces nouvelles perspectives sur la 2-cohomologie s'étendent à l'étude des cohomologies d'ordres supérieurs à l'aide des extensions n-uples. Ceci fut envisagé par [3] et [6] avec nos extensions de [8] et, après la soumission du présent article, par [1] avec les extensions de [2].

L'auteur remercie M. C. Werquin pour son aimable TEX assistance.

2. Diextensions de categories

Soit $\mathbf{H} \to \mathbf{C}$ un foncteur quotient entre (petites) catégories. Pour chaque couple d'objets $(A, B) \in \mathbf{C}_0 \times \mathbf{C}_0$ $(= \mathbf{H}_0 \times \mathbf{H}_0)$, on considère un groupe $\mathbf{K}_{A,B}$. On définit ainsi un groupoïde

$$\mathbf{K} = \coprod_{(A,B) \in \mathbf{C}_0 \times \mathbf{C}_0} \mathbf{K}_{A,B}$$

dont l'ensemble des objets $\mathbf{K}_0$ peut être identifié à $\mathbf{C}_0 \times \mathbf{C}_0$.

DÉFINITION 2.1. On dira que $\mathbf{K}$ *opère fidèlement* sur $\mathbf{H}$ si pour chaque $(A, B) \in \mathbf{C}_0 \times \mathbf{C}_0$ on a:

$$\mathbf{K}_{A,B} \times \mathbf{H}(A, B) \longrightarrow \mathbf{H}(A, B) : (k, h) \mapsto k[h]$$

de sorte que:

(i) $k'k[h] = k'[k[h]]$ et $1_{\mathbf{K}_{A,B}}[h] = h$,

(ii) si l'on a $k[h] = h'$ et $k[h_1] = h'_1$, alors on a

$$k'[hl] = h'l \Longrightarrow k'[h_1 l] = h'_1 l \quad \text{et} \quad k'[lh] = lh' \Longrightarrow k'[lh_1] = lh'_1,$$

quand ces expressions ont un sens.

REMARQUES. Les expressions de (ii) ont un sens quand

$$\beta(l) = A \quad \text{et} \quad k' \in \mathbf{K}_{\alpha(l),B}, \quad \text{resp.} \quad \alpha(l) = B \quad \text{et} \quad k' \in \mathbf{K}_{A,\beta(l)}.$$

La condition de fidélité *(ii)* dit que si un même $k \in \mathbf{K}_1$ égalise par son action deux couples (h, h') et (h_1, h'_1), alors les couples de composés $(hl, h'l)$ et $(h_1 l, h'_1 l)$, resp. (lh, lh') et (lh_1, lh'_1), sont égalisés par un même élément k' de $\mathbf{K}_1$. Elle étend naturellement une propriété qui est simple quand l'action est le fait de la composition par les éléments des fibres dans 1.1 et 1.2 (voir exemples ci-dessous).

DÉFINITION 2.2. Une *diextension de catégories* (de la catégorie $\mathbf{C}$ par la catégorie $\mathbf{K}$) est une suite $\mathbf{E}\colon \mathbf{K} \dashrightarrow \mathbf{H} \xrightarrow{p} \mathbf{C}$ où p est un foncteur quotient et où $\mathbf{K}$ opère fidèlement sur $\mathbf{H}$ de sorte que l'on ait:

$$(\star) \qquad p(h) = p(h') \Longleftrightarrow \exists! k \in \mathbf{K}_1, k[h] = h'.$$

EXEMPLES. Etant donnée une extension (resp. une opextension) de catégories au sens de 1.1 (resp. 1.2) $\mathbf{E}\colon \mathbf{K} \xrightarrow{i} \mathbf{H} \xrightarrow{p} \mathbf{C}$, en posant $\mathbf{K}_{A,B} = \mathbf{K}_B$ (resp. $\mathbf{K}_{A,B} = \mathbf{K}_A$) et $k[h] = i(k)h$ (resp. $k[h] = hi(k)$), on obtient une diextension de catégories. Dans la première implication de 2.1 (ii), on a $k' = k$ et dans la seconde k' est l'unique élément tel que $k'l = lk$ (resp. $k' = k$ dans la seconde implication et k' est l'unique élément tel que $lk' = kl$ dans la première).

REMARQUES. On voit qu'une diextension n'est pas à la fois une extension et une opextension. Malgré le contexte bivariant qui va apparaître, on ne parle donc pas de biextensions. Signalons ici la notion d'appariement de fibrations considérée par [12] qui relie les constructions de [2] sur la cohomologie des catégories et celles de [5] qui décrit une cohomologie des diagrammes d'algèbres généralisant la cohomologie de Hochschild [7] dont nous reparlerons.

PROPOSITION 2.3. *Si l'on a $k[h] = k'[h]$, alors on a $k = k'$. Si l'on a $k[h] = h'$, alors on a $h = k^{-1}[h']$.*

PREUVE. Ces résultats sont conséquences, respectivement, de $(\star)$ de 2.2 et de (i) de 2.1.

REMARQUE. De par $(\star)$ de 2.2, pour chaque $f \in \mathbf{C}_1$, le groupe $\mathbf{K}_{\alpha(f),\beta(f)}$ opère *transitivement* et *effectivement*, au sens de [2], sur l'ensemble $p^{-1}(f) \subset \mathbf{H}_1$.

PROPOSITION 2.4. *Etant donnés $h \in \mathbf{H}_1$ et $k \in \mathbf{K}_{A,\alpha(h)}$ (resp. $k \in \mathbf{K}_{\beta(h),B}$), il existe un unique ${}^h k \in \mathbf{K}_1$ (resp. $k^h \in \mathbf{K}_1$) tel que*

$$hk[l] = {}^h k[hl] \qquad (\textit{resp.} \quad k[l]h = k^h[lh])$$

lorsque ces expressions ont un sens (i.e. pour l et h composables).

PREUVE. Du fait que l'on a $p(hl) = p(hk[l])$, resp. $p(lh) = p(k[l]h)$, l'existence et l'unicité de ${}^h k$, resp. k^h, pour l fixé, est conséquence de $(\star)$ de 2.2. De plus ceci ne dépend pas du choix de l de par (ii) de 2.1. En effet, si l'on a $k[l] = l'$ et $k[l_1] = l'_1$, la seconde implication de (ii), où ${}^h k$ joue le rôle de k' et h celui de l, nous dit que l'on a:

$${}^h k[hl] = hl' \Rightarrow {}^h k[hl_1] = hl'_1$$

et donc

$${}^h k[hl] = hk[l] \Rightarrow {}^h k[hl_1] = hk[l_1].$$

On a une même démonstration pour k^h.

THÉORÈME 2.5. *L'opération $k \mapsto {}^h(k^{h'}) = ({}^h k)^{h'} = {}^h k^{h'}$ définit un foncteur $\mathbf{H} \times \mathbf{H}^{op} \to \mathscr{G}r$ tel que $(A, B) \mapsto \mathbf{K}_{A,B}$.*

PREUVE. a) Comme on a, de par 2.4, les relations suivantes

$${}^h(k^{h'})[hlh'] = h(k^{h'})[lh'] = hk[l]h',$$

$$({}^h k)^{h'}[hlh'] = {}^h k[hl]h' = hk[l]h',$$

l'unicité de 2.3 montre que l'on a ${}^h(k^{h'}) = ({}^h k)^{h'}$.

b) Comme on a, de par 2.4, les relations suivantes:

$${}^h({}^{h'}k)[hh'l] = h({}^{h'}k)[h'l] = h(h'k[l]) = (hh')k[l],$$

$$(k^h)^{h'}[lhh'] = (k^h)[lh]h' = (k[l]h)h' = k[l](hh'),$$

l'unicité de 2.4 montre que l'on a ${}^h({}^{h'}k) = {}^{hh'}k$ et $(k^h)^{h'} = k^{hh'}$ quand ces expressions ont un sens.

c) Soit $1 \in \mathbf{H}_1$ une identité. On a les relations suivantes:

$$^{1}k[1h] = 1k[h] = k[h] = k[1h],$$

$$k^{1}[h1] = k[h]1 = k[h] = k[h1],$$

et l'unicité de 2.3 montre alors que l'on a $^{1}k = k^{1} = k$.

d) Il nous reste à démontrer que $^{h}(\ )^{h'} : \mathbf{K}_{\beta(h'),\alpha(h)} \to \mathbf{K}_{\alpha(h'),\beta(h)}$ est un homomorphisme de groupes. Considérant les égalités:

$$\begin{aligned}({}^{h}k)({}^{h}k')[hl] &= {}^{h}k[{}^{h}k'[hl]] = {}^{h}k[hk'[l]] \\ &= hk[k'[l]] = h(kk')[l] = {}^{h}(kk')[hl],\end{aligned}$$

de par l'unicité de 2.3, on a l'égalité $({}^{h}k)({}^{h}k') = {}^{h}(kk')$. Ayant la même chose avec l'action à droite, avec a) ci -dessus, on a bien:

$${}^{h}(kk')^{h'} = ({}^{h}k^{h'})({}^{h}k'^{h'}).$$

THÉORÈME 2.6. *On a $k'[h']k[h] = k''[h'h]$ avec:*

$$k'' = ({}^{k'[h']}k)(k'^{h}) = (k'^{k[h]})({}^{h'}k),$$

quand ces expressions ont un sens.

PREUVE. On a les relations suivantes:

$$k'[h']k[h] = k'^{k[h]}[h'k[h]] = k'^{k[h]}[{}^{h'}k[h'h]] = (k'^{k[h]})({}^{h'}k)[h'h],$$

$$k'[h']k[h] = {}^{k'[h']}k[k'[h']h] = {}^{k'[h']}k[k'^{h}[hh']] = ({}^{k'[h']}k)(k'^{h})[h'h],$$

et de par l'unicité de 2.3 issue de celle de $(\star)$ de 2.2, il vient la relation énoncée.

REMARQUES. Ce que l'on a dans 2.5 et 2.6 joue ici le même rôle que les *bimultiplications permutables* de [10] et que la propriété de *distributivité* de [2].

PROPOSITION 2.7. *Si on a une opération de* $\mathbf{K}$ *sur* $\mathbf{H}$*:*

$$\mathbf{K}_{A,B} \times \mathbf{H}(A,B) \longrightarrow \mathbf{H}(A,B) : (k,h) \mapsto k[h]$$

telle que:

a) (i) *de* 2.1*,*

b) *on a un foncteur* $\mathbf{H} \times \mathbf{H}^{op} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{G}r$ *tel que*

$$(A,B) \mapsto \mathbf{K}_{A,B} \qquad et \qquad (h,h') \mapsto {}^{h}(\ )^{h'},$$

c) 2.6,

d) ($\star$) *de* 2.2.

Alors l'opération est fidèle.

PREUVE. Supposons que l'on a $k[h] = h'$ et $k[h_1] = h'_1$, montrons que l'on a:

$$k'[hl] = h'l \Longrightarrow k'[h_1 l] = h'_1,$$

(la démonstration étant la même de l'autre côté). Ayant

$$k'[hl] = h'l = k[h]1[l],$$

comme Φ est un foncteur, ${}^{k[h]}(\ )$ est un homomorphisme de groupes et de par 2.6 on a:

$$k' = ({}^{k[h]}1)(k^l) = 1k^l = k^l.$$

Si on a aussi $k''[h_1 l] = h'_1 l$, on a de même $k'' = k^l$ et donc $k'' = k'$.

REMARQUE. Dans la définition 2.2 d'une diextension on peut donc remplacer (ii) par la donnée d'un foncteur $\mathbf{H} \times \mathbf{H}^{op} \to \mathcal{G}r$ vérifiant la propriété du théorème 2.6.

DÉFINITION 2.8. Soit $M\colon \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{op} \to \mathcal{G}r$ un foncteur, on appelle *diextension de C par M* une diextension de catégories $\mathbf{K} \dashrightarrow \mathbf{H} \xrightarrow{p} \mathbf{C}$ telle que

$$\mathbf{K}_{A,B} = M(A, B) \qquad \text{et} \qquad {}^{h}k^{h'} = M(ph, ph')(k).$$

3. Diextensions et cocycles

Considérons une diextension de catégories $\mathbf{E}\colon \mathbf{K} \dashrightarrow \mathbf{H} \xrightarrow{p} \mathbf{C}$.

DÉFINITION 3.1. Une *section* de la diextension $\mathbf{E}$ est la donnée, pour chaque $c \in \mathbf{C}_1$ d'un représentant $s(c)$ tel que $ps(c) = c$ de sorte que $s(c)$ soit une identité quand c en est une.

REMARQUE. En associant à chaque $(A, B) \in \mathbf{C}_0 \times \mathbf{C}_0$ le groupe $\mathbf{K}_{A,B}$ et à chaque $(c, c') \in \mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_1$ le morphisme ${}^{s(c)}(\ )^{s(c')}$, on définit un *coefficient* de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^{op}$ vers $\mathcal{G}r$ au sens de [9]. Ce n'est pas nécessairement un foncteur car s n'en est pas nécessairement un.

THÉORÈME 3.2. *La donnée d'une section s de* $\mathbf{E}$ *définit une application* $\psi : \mathbf{C}_2 \to \mathbf{K}_1$ *telle que:*

a) $\psi(c, c') \in \mathbf{K}_{\alpha(c'),\beta(c)}$ *et est une identité si c ou c' en est une,*

b) *étant donné un triple composable* $(c, c', c'') \in \mathbf{C}_3$*, on a la relation:*

$$^{s(c)}\psi(c', c'')\psi(c, c'c'') = (\psi(c, c')^{s(c'')})\psi(cc', c''),$$

c) *étant donnés* $(c, c') \in \mathbf{C}_2$*,* $k \in \mathbf{K}_1$ *et* $h \in \mathbf{H}_1$*, on a les relations:*

$$^{s(c)s(c')}k = (\psi(c, c')^{k[h]})(^{s(cc')}k)((\psi(c, c')^{-1})^h),$$

$$k^{s(c)s(c')} = (^{k[h]}\psi(c, c'))(k^{s(cc')})(^h(\psi(c, c')^{-1})),$$

quand ces expressions ont un sens.

Preuve. a) Comme on a $ps(cc') = p(s(c)s(c')) = cc'$, la propriété $(\star)$ de 2.2 assure l'existence et l'unicité de $\psi(c, c')$ tel que $\psi(c, c')[s(cc')] = s(c)s(c')$. Si c, resp. c', est une identité, on a $s(cc') = s(c') = s(c)s(c')$, resp. $s(cc') = s(c) = s(c)s(c')$ par définition de s. Dans ce cas, $\psi(c, c')$ est une identité de par (i) de 2.1 et l'unicité de 1.5.

b) On a les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} s(c)s(c')s(c'') &= s(c)(s(c')s(c'')) = s(c)\psi(c', c'')[s(c'c'')] \\ &= {}^{s(c)}\psi(c', c'')[s(c)s(c'c'')] = {}^{s(c)}\psi(c', c'')[\psi(c, c'c'')[s(c(c'c''))]] \\ &= {}^{s(c)}\psi(c', c'')\psi(c, c'c'')[s(cc'c'')], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(c)s(c')s(c'') &= (s(c)s(c'))s(c'') = \psi(c, c')[s(cc')]s(c'') \\ &= \psi(c, c')^{s(c'')}[s(cc')sc'')] = \psi(c, c')^{s(c'')}[\psi(cc', c'')s((cc')c'')] \\ &= (\psi(c, c')^{s(c'')})\psi(cc', c'')[s(cc'c'')], \end{aligned}$$

et l'unicité de 2.3 permet de conclure.

c) On a $k \in \mathbf{K}_{A,B}$, $h \in \mathbf{H}(A, B)$ et dans la première expression $\alpha(c') = B$ alors que dans la seconde $\beta(c) = A$. Les formules de 2.4 et 2.6 permettent d'écrire les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} ^{s(c)s(c')}k[s(c)s(c')h] &= s(c)s(c')k[h] = \psi(c, c')[s(cc')]k[h] \\ &= (\psi(c, c')^{k[h]})(^{s(cc')}k)[s(cc')h] \\ &= (\psi(c, c')^{k[h]})(^{s(cc')}k)[\psi(c, c')^{-1}[s(c)s(c')]h] \\ &= (\psi(c, c')^{k[h]})(^{s(cc')}k)\psi(c, c')^{-1})^h[s(c)s(c')h], \end{aligned}$$

et l'unicité de 2.3 donne le premier résultat. Le second provient de:

$$\begin{aligned}k^{s(c)s(c')}[hs(c)s(c')] = k[h]s(c)s(c') &= k[h]\psi(c,c')[s(cc')]\\ &= ({}^{k[h]}\psi(c,c'))(k^{s(cc')})[hs(cc')]\\ &= ({}^{k[h]}\psi(c,c'))(k^{s(cc')})[h\psi(c,c')^{-1}[s(c)s(c')]]\\ &= ({}^{k[h]}\psi(c,c'))(k^{s(cc')})({}^{h}(\psi(c,c')^{-1}))[hs(c)s(c')].\end{aligned}$$

DÉFINITION 3.3. L'application ψ est appelée le 2-*cocycle* associé à la diextension $\mathbf{E}$ par la section s.

THÉORÈME 3.4. *Soient ψ et ψ' les 2-cocycles associés à $\mathbf{E}$ par des sections s et s'. Il existe une application $\tau\colon \mathbf{C}_1 \to \mathbf{K}_1$ telle que*

a) $\tau(c) \in \mathbf{K}_{\alpha(c),\beta(c)}$,

b) $$\begin{aligned}\psi(c,c') &= \tau(cc')^{-1}\psi'(c,c')(\tau(c)^{s'(c')})({}^{s(c)}\tau(c'))\\ &= \tau(cc')^{-1}\psi'(c,c')({}^{s'(c)}\tau(c'))(\tau(c)^{s(c')}) \qquad \forall (c,c') \in \mathbf{C}_2,\end{aligned}$$

c) ${}^{s'(c)}k = (\tau(c)^{k[h]})({}^{s(c)}k)(\tau(c)^{-1})^{h}$ *et* $k^{s'(c)} = ({}^{k[h]}\tau(c))(k^{s(c)})({}^{h}(\tau(c)^{-1}))$,

quand ces expressions ont un sens.

PREUVE. a) Comme $ps(c) = ps'(c) = c$, la propriété ($\star$) de 2.2 assure l'existence et l'unicité de $\tau(c) \in \mathbf{K}_{\alpha(c),\beta(c)}$ tel que $s'(c) = \tau(c)[s(c)]$.

b) On utilise encore la formule de 2.6 et l'unicité de 2.3 avec

$$s'(cc') = \tau(cc')[s(cc')]$$

d'une part, et

$$\begin{aligned}s'(cc') = \psi'(c,c')[s'(c)s'(c')] &= \psi'(c,c')[\tau(c)[s(c)]\tau(c')[s(c')]]\\ &= \psi'(c,c')[(\tau(c)^{s'(c')})({}^{s(c)}\tau(c'))[s(c)s(c')]]\\ &= \psi'(c,c')(\tau(c)^{s'(c')})({}^{s(c)}\tau(c'))\psi(c,c')^{-1}[s(cc')],\end{aligned}$$

d'autre part pour la première égalité. La formule de 2.6 donne aussi $({}^{s'(c)}\tau(c'))(\tau(c)^{s(c')})$ au milieu du calcul précédent et donc la deuxième égalité.

c) L'unicité de 2.3 donne les derniers résultats en considérant:

$$\begin{aligned}{}^{s'(c)}k[s'(c)h] = s'(c)k[h] = \tau(c)[s(c)]k[h] &= (\tau(c)^{k[h]})({}^{s(c)}k)[s(c)h]\\ &= (\tau(c)^{k[h]})({}^{s(c)}k)[\tau(c)^{-1}[s'(c)]h]\\ &= (\tau(c)^{k[h]})({}^{s(c)}k)(\tau(c)^{-1})^{h}[s'(c)h],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k^{s'(c)}[hs'(c)] &= k[h]s'(c) = k[h]\tau(c)[s(c)] = ({}^{k[h]}\tau(c))(k^{s(c)})[hs(c)] \\ &= ({}^{k[h]}\tau(c))(k^{s(c)})[h\tau(c)^{-1}[s'(c)]] \\ &= ({}^{k[h]}\tau(c))(k^{s(c)})({}^{h}(\tau(c)^{-1}))[hs'(c)]. \end{aligned}$$

REMARQUE. Les conditions c) de 3.2 et 3.4, comme 2.6 se ramènent à des conditions de commutativité quand **E** est une diextension de **C** par un foncteur $M\colon \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{op} \to \mathcal{G}r$ et disparaît si M est à valeurs dans $\mathcal{A}b$, i.e. si M est un **C**-bimodule.

DÉFINITION 3.5. Deux diextensions de catégories $\mathbf{E}\colon \mathbf{K} \dashrightarrow \mathbf{H} \xrightarrow{p} \mathbf{C}$ et $\mathbf{E}'\colon \mathbf{K}' \dashrightarrow \mathbf{H}' \xrightarrow{p'} \mathbf{C}$ sont dites *congrues* s'il existe un foncteur inversible $\mu\colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ tel que

a) $p'\mu = p$,

b) $k[\mu(h)] = \mu(k[h])$ quand ceci a un sens.

On notera $\mathrm{Diext}(\mathbf{C}, \mathbf{K})$, resp. $\mathrm{Diext}(\mathbf{C}, M)$, l'ensemble des *classes de congruence* de diextensions de **C** par un groupoïde **K**, resp. un foncteur $M\colon \mathbf{C}\times\mathbf{C}^{op} \to \mathcal{G}r$.

LEMME 3.6. *Dans les conditions de la définition* 3.5*, on a:*

$$ {}^{h}k^{h'} = {}^{\mu(h)}k^{\mu(h')}$$

quand ceci a un sens.

PREUVE. Considérons $(h, l) \in \mathbf{H}_2$, on a

$$\begin{aligned} {}^{\mu(h)}k[\mu(hl)] &= {}^{\mu(h)}k[\mu(h)\mu(l)] = \mu(h)k[\mu(l)] = \mu(h)\mu(k[l]) \\ &= \mu(hk[l]) = \mu({}^{h}k[hl]) = {}^{h}k[\mu(hl)]. \end{aligned}$$

De par l'unicité de 2.3, on a donc ${}^{\mu(h)}k = {}^{h}k$ et de même $k^{\mu(h)} = k^{h}$ quand ces expressions ont un sens.

REMARQUE. Cette propriété est triviale dans le cas où **E** est une diextension par un foncteur $M\colon \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{op} \to \mathcal{G}r$.

THÉORÈME 3.7. *Soient* **E** *et* $\mathbf{E}'$ *deux diextensions de* **C** *par* **K***. Si* **E** *et* $\mathbf{E}'$ *sont congrues et si* ψ *est un* 2*-cocycle associé à* **E***, alors* ψ *est aussi un* 2*-cocycle associé à* $\mathbf{E}'$*. Réciproquement, si un même* 2*-cocycle* ψ *est associé à* **E** *et à* $\mathbf{E}'$*, alors* **E** *et* $\mathbf{E}'$ *sont congrues.*

PREUVE. a) Soit s la section qui associe ψ à $\mathbf{E}$. En posant $s'(c) = \mu(s(c))$, on définit une section s' de $\mathbf{E}'$. Comme ψ est associé à s, on a

$$\psi(c, c')[s(cc')] = s(c)s(c') \qquad \text{et} \qquad \mu(\psi(c, c')[s(cc')]) = \mu(s(c)s(c')).$$

De par 3.5, on a alors

$$\mu(\psi(c, c')[s(cc')]) = \psi(c, c')[\mu(s(cc'))] = \psi(c, c')[s'(cc')],$$

et

$$\mu(s(c)s(c')) = \mu(s(c)\mu(s(c')) = s'(c)s'(c').$$

Ceci montre que ψ est associé à la section s'.

b) Soient s et s' les sections qui associent ψ à $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$ respectivement. Un morphisme $h \in \mathbf{H}_1$ s'écrit de manière unique sous la forme $k[s(ph)]$ avec $k \in \mathbf{K}_1$. En posant $\mu(h) = k[s'(ph)]$, on va définir un foncteur $\mu \colon \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ qui fait de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$ des extensions congrues. Comme on a

$$p'(\mu((h)) = p'(k[s'(ph)] = p'(s'(ph)) = ph,$$

on a a) de 3.5. Pour b) de 3.5, en posant $h = k[s(ph)]$, on a

$$\begin{aligned} k'[\mu(h)] &= k'[\mu(k[s(ph)])] = k'[k[s'(ph)]] = k'k[s'(ph)] \\ &= \mu(k'k[s(ph)]) = \mu(k'[k[s(ph)]]) = \mu(k'[h]). \end{aligned}$$

Il reste à montrer que μ est un foncteur. On a évidemment $\mu(1) = 1$ et on va montrer que l'on a $\mu(hh') = \mu(h)\mu(h')$. Soient $h = k[s(ph)]$ et $h' = k'[s(ph')]$ composables, on a $\mu(h) = k[s'(ph)]$ et $\mu(h') = k'[s'(ph')]$. Il vient alors

$$\begin{aligned} \mu(h)\mu(h') &= k[s'(ph)]k'[s'(ph')] \\ &= ({}^{k[s'(ph)]}k')(k^{s'(ph')})[s'(ph)s'(ph')] \\ &= ({}^{k[s'(ph)]}k')(k^{s'(ph')})[\psi(ph, ph')[s'(phph')]] \\ &= ({}^{\mu(k[s(ph)]}k')(k^{\mu(s(ph'))})\psi(ph, ph')[\mu(s(phph'))] \\ &= \mu(({}^{k[s(ph)]}k')(k^{s(ph')})\psi(ph, ph')[s(phph')]) \\ &= \mu(({}^{k[s(ph)]}k')(k^{s(ph')})[s(ph)s(ph')]) \\ &= \mu(k[s(ph)]k'[s(ph')]) = \mu(hh'), \end{aligned}$$

en utilisant successivement 2.6, (i) de 2.1, 3.5 démontré précédemment et 3.6 ainsi que le fait que ψ est associé par s et par s' aux deux extensions considérées. L'inverse de μ est défini de la même manière.

4. Cohomologie à coefficients bivariants

Considérons une (petite) catégorie $\mathbf{C}$, un foncteur $M\colon \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{op} \to \mathcal{G}r$ et le groupoîde

$$\mathbf{K} = \coprod_{(A,B)\in \mathbf{C}_0 \times \mathbf{C}_0} M(A, B).$$

On notera $\mathbf{K}_{A,B} = M(A, B)$ et ${}^{c}k^{c'} = M(c, c')(k)$.

PROPOSITION 4.1. *Si l'on a une diextension de* $\mathbf{C}$ *par* M*, alors* M *est un* $\mathbf{C}$*-bimodule.*

PREUVE. Ayant une diextension, de par 2.6 on a

$$({}^{k'[h']}k)(k'^{h}) = (k'^{k[h]})({}^{h'}k)$$

quand ces expressions ont un sens. Comme la diextension considérée est une diextension de $\mathbf{C}$ par M, de par 2.8 on a de plus

$${}^{k'[h']}k = {}^{ph'}k, \quad k'^{h} = k'^{ph}, \quad k'^{k[h]} = k'^{ph}, \quad {}^{h'}k = {}^{ph'}k.$$

Soient k et $k' \in \mathbf{K}_{A,B}$, on a donc

$$({}^{1_A}k)(k'^{1_B}) = (k'^{1_B})({}^{1_A}k) \qquad \text{i.e.} \quad kk' = k'k,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Dans la suite on considère un $\mathbf{C}$-bimodule M.

DÉFINITION 4.2. Un 2*-cocycle de C vers M* est la donnée d'une application $\psi\colon \mathbf{C}_1 \to \mathbf{K}_1$ telle que:

a) $\psi(c, c') \in \mathbf{K}_{\alpha(c'),\beta(c)}$ et est une identité si c ou c' en est une,

b) ${}^{c}\psi(c', c'')\psi(c, c'c'') = (\psi(c, c')^{c''})\psi(cc', c'') \quad \forall (c, c', c'') \in \mathbf{C}_3$.

On notera les différences avec 3.2 comme expliqué dans la remarque suivant le théorème 3.4 et selon la proposition 4.1.

DÉFINITION 4.3. Deux cocycles ψ et ψ' de $\mathbf{C}$ vers M sont dits *cohomologues* s'il existe une application $\tau\colon \mathbf{C}_1 \to \mathbf{K}_1$ telle que:

a) $\tau(c) \in \mathbf{K}_{\alpha(c),\beta(c)}$,

b) $$\begin{aligned}\psi(c, c') &= \tau(cc')^{-1}\psi'(c, c')(\tau(c)^{c'})({}^{c}\tau(c')) \\ &= \tau(cc')^{-1}\psi'(c, c')({}^{c}\tau(c'))(\tau(c)^{c'}), \quad \forall (c, c') \in \mathbf{C}_2.\end{aligned}$$

PROPOSITION 4.4. *La cohomologie ainsi définie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des* 2*-cocycles de* $\mathbf{C}$ *vers* M.

Preuve. Un cocycle est cohomologue à lui-même avec $\tau(c) = 1_{\mathbf{K}_{\alpha(c),\beta(c)}}$. Si ψ et ψ' sont cohomologues de par τ, en posant $\tau'(c) = \tau(c)^{-1}$ on a ψ' et ψ cohomologues. Supposons que ψ et ψ' soient cohomologues de par τ et que ψ' et ψ'' le soient de par τ'. On pose $\tau''(c) = \tau'(c)\tau(c)$ et il vient:

$$\psi(c, c') = \tau(cc')^{-1}\tau'(cc')^{-1}\psi''(c, c')(\tau'(c)^{c'})({}^{c}\tau'(c'))(\tau(c)^{c'})({}^{c}\tau(c')).$$

Utilisant la commutativité impliquée par 4.1, il vient:

$$= \tau(cc')^{-1}\tau'(cc')^{-1}\psi''(c, c')(\tau'(c)^{c'})(\tau(c)^{c'})({}^{c}\tau'(c'))({}^{c}\tau(c')).$$

Et comme ${}^{c}(\ )$ et $(\ )^{c'}$ sont des homomorphismes de groupes:

$$\psi(c, c') = \tau''(cc')^{-1}\psi(c, c')(\tau''(c)^{c'})({}^{c}\tau''(c')),$$

explicite la cohomologie de ψ et ψ''.

Définition 4.5. L'ensemble des classes de cohomologie de 2-cocycles de $\mathbf{C}$ vers M est appelé l'*ensemble de cohomologie* de dimension 2 de $\mathbf{C}$ vers M et est noté $H^2(\mathbf{C}, M)$.

Théorème 4.6. *L'application, qui à chaque diextension de* $\mathbf{C}$ *par* M *associe la classe de cohomologie d'un de ses* 2*-cocycles associés, définit une bijection*

$$\omega\colon \mathrm{Diext}(\mathbf{C}, M) \longrightarrow H^2(\mathbf{C}, M).$$

Preuve. a) Le théorème 3.2 montre comment à une diextension $\mathbf{E}$ on associe un 2-cocycle et le théorème 3.4 montre que la classe de cohomologie de celui-ci ne dépend que de $\mathbf{E}$. Le théorème 3.7 montre qu'à deux diextensions congrues on associe le même élément de $H^2(\mathbf{C}, M)$. L'application ω est donc bien définie.

b) Soient $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$ deux extensions auxquelles sont associés des 2-cocycles ψ et ψ' cohomologues définis par des sections s et s' respectivement. On définit une nouvelle section s_1 de $\mathbf{E}$ par $s_1(c) = \tau(c)^{-1}[s(c)]$. Le cocycle ψ_1 défini par s_1 vérifie alors

$$\psi_1(c, c') = \tau(cc')^{-1}\psi(c, c')(\tau(c)^{c'})({}^{c}\tau(c'))$$

et l'application $k[s_1(c)] \mapsto k[s'(c)]$ définit une congruence de $\mathbf{E}$ vers $\mathbf{E}'$. Ceci montre que ω est injective.

c) Soit ψ un 2-cocycle de $\mathbf{C}$ vers M. nous allons construire une diextension à laquelle ψ est associé. Ceci montrera que ω est surjective et finira la preuve.

Soit $\mathbf{H}_\psi$ la catégorie dont les morphismes sont les paires (c,k) avec $c \in \mathbf{C}_1$ et $k \in \mathbf{K}_{\alpha(c),\beta(c)}$ telles que

$$\alpha(c,k) = \alpha(c), \quad \beta(c,k) = \beta(c), \quad (c,k)(c',k') = (cc', ({}^{c}k')(k^{c'})\psi(c,c')).$$

Vérifions que cette composition est associative.

$$\begin{aligned}
((c,k)(c',k'))(c'',k'') &= (cc', ({}^{c}k')(k^{c'})\psi(c,c'))(c'',k'') \\
&= (cc'c'', ({}^{cc'}k'')(({}^{c}k')k^{c'}\psi(c,c'))^{c''}\psi(cc',c'')) \\
&= (cc'c'', ({}^{cc'}k'')({}^{c}k'^{c''})(k^{c'c''})(\psi(c,c')^{c''})\psi(cc',c'')) \\
&= (cc'c'', ({}^{cc'}k'')({}^{c}k'^{c''})(k^{c'c''})({}^{c}\psi(c',c''))\psi(c,c'c'')) \\
&= (cc'c'', ({}^{cc'}k'')({}^{c}k'^{c''})({}^{c}\psi(c',c''))(k^{c'c''})\psi(c,c'c'')) \\
&= (cc'c'', {}^{c}(({}^{c'}k'')(k'^{c''})\psi(c',c''))(k^{c'c''})\psi(c,c'c'')) \\
&= (c,k)(c'c'', ({}^{c'}k'')(k'^{c''})\psi(c',c'')) \\
&= (c,k)((c',k')(c'',k'')).
\end{aligned}$$

Avec $p(c,k) = c$ et $k[(c,k')] = (c,kk')$ on a une diextension de $\mathbf{C}$ par M et ψ est le 2-cocycle associé à la section définie par $s(c) = (c, 1_{\mathbf{K}_{\alpha(c),\beta(c)}})$.

La proposition 4.1 permet de voir le besoin en commutativité de la cohomologie à coefficients bivariants. Le théorème précédent fournit une interprétation en termes d'extensions de la 2-cohomologie de Hochschild-Mitchell évoquée par Mitchell [11] et Baues-Wirsching [2].

Hochschild [7] a introduit ce type de cohomologie (bivariante) dans un cadre commutatif pour l'étude des algèbres associatives. Ceci a été généralisé par Gerstenhaber et Schack [5] qui ont décrit une cohomologie des diagrammes d'algèbres.

Hormis ce que nous en avons dit en 2 et 3, le cadre non abélien a été abordé par Dedecker et Lue pour les algèbres dans [4] et [10].

5. Panextensions de catégories

Les ingrédients techniques de ce qui suit étant contenus dans ce que nous avons vu, nous omettrons les démonstrations qui sont des adaptations de celles déjà faites.

Soient $\mathbf{C}$ une (petite) catégorie et $p\colon \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ un foncteur quotient. Pour chaque morphisme $f \in \mathbf{C}_1$, on considère un groupe $\mathbf{K}_f$. On définit ainsi un groupoïde

$$\mathbf{K} = \coprod_{f \in \mathbf{C}_1} \mathbf{K}_f$$

dont l'ensemble des objets peut être identifié à $\mathbf{C}_1$.

DÉFINITION 5.1. On dira que $\mathbf{K}$ *opère fidèlement* sur $\mathbf{H}$ si pour chaque $f \in \mathbf{C}_1$ on a:

$$\mathbf{K}_f \times p^{-1}(f) \longrightarrow p^{-1}(f) : (k, h) \mapsto k[h]$$

de sorte que:

(i) $k'k[h] = k'[k[h]]$ et $1_{\mathbf{K}_f}[h] = h$,

(ii) si l'on a $k[h] = h'$ et $k[h_1] = h'_1$, alors on a

$$k'[hl] = h'l \Longrightarrow k'[h_1 l] = h'_1 l \quad \text{et} \quad k'[lh] = lh' \Longrightarrow k'[lh_1] = lh'_1,$$

quand ces expressions ont un sens.

DÉFINITION 5.2. Une *panextension de catégories* (de la catégorie $\mathbf{C}$ par la catégorie $\mathbf{K}$) est une suite $\mathbf{E}\colon \mathbf{K} \dashrightarrow \mathbf{H} \xrightarrow{p} \mathbf{C}$, où p est un foncteur quotient (i.e. plein et bijectif sur les objets) et où $\mathbf{K}$ opère fidèlement sur $\mathbf{H}$ de sorte que l'on ait:

$$(\star) \qquad p(h) = p(h') \Longleftrightarrow \exists! k \in \mathbf{K}_1, k[h] = h'.$$

EXEMPLES. Etant donnée une diextension de catégories $\mathbf{E}\colon \mathbf{K} \dashrightarrow \mathbf{H} \xrightarrow{p} \mathbf{C}$, en posant $\mathbf{K}_f = \mathbf{K}_{\alpha(f),\beta(f)}$ on obtient une panextension de catégories. On verra aussi que les *extensions linéaires* de Baues-Wirsching ([2]) sont des panextensions.

PROPOSITION 5.3. *Si l'on a $k[h] = k'[h]$, alors on a $k = k'$. Si l'on a $k[h] = h'$, alors on a $h = k^{-1}[h']$.*

PROPOSITION 5.4. *Etant donnés $h \in \mathbf{H}_1$ et $k \in \mathbf{K}_f$ avec $\alpha(h) = \beta(f)$ (resp. $\beta(h) = \alpha(f)$), il existe un unique ${}^h k \in \mathbf{K}_1$ (resp. $k^h \in \mathbf{K}_1$) tel que*

$$hk[l] =^h k[hl] \qquad (\textit{resp.} \quad k[l]h = k^h[lh])$$

lorsque ces expressions ont un sens.

RAPPEL. Comme [2], nous noterons $F\mathbf{C}$ la *catégorie des factorisations* de $\mathbf{C}$ dont les objets sont les morphismes de $\mathbf{C}$ et où les morphismes $f \to g$ sont les couples (u, v) de morphismes de $\mathbf{C}$ tels que $g = ufv$, la composition étant définie par $(u, v)(u', v') = (uu', v'v)$. On a le foncteur d'oubli $F\mathbf{C} \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{op}$.

THÉORÈME 5.5. *L'opération $k \mapsto {}^h(k^{h'}) = ({}^h k)^{h'} =^h k^{h'}$ définit un foncteur $F\mathbf{H} \to \mathcal{G}r$ tel que $h \mapsto \mathbf{K}_{ph}$.*

THÉORÈME 5.6. *On a* $k'[h']k[h] = k''[h'h]$ *avec:*

$$k'' = ({}^{k'[h']}k)(k'^h) = (k'^{k[h]})({}^{h'}k),$$

quand ces expressions ont un sens.

PROPOSITION 5.7. *Si on a une opération de* $\mathbf{K}$ *sur* $\mathbf{H}$*:*

$$\mathbf{K}_f \times p^{-1}(f) \longrightarrow p^{-1}(f) : (k, h) \mapsto k[h]$$

telle que:

a) (i) *de* 5.1*,*

b) *on a un foncteur* $F\mathbf{H} \xrightarrow{\Phi} \mathscr{G}r$ *tel que*

$$h \mapsto \mathbf{K}_{ph} \quad et \quad (u, v) \mapsto {}^{u}(\ )^{v},$$

c) 5.6*,*

d) $(\star)$ *de* 5.2.

Alors l'opération est fidèle.

REMARQUE. Dans la définition 5.2 d'une panextension on peut donc remplacer (ii) par la donnée d'un foncteur $F\mathbf{H} \to \mathscr{G}r$ vérifiant la propriété du théorème 5.6. Ceci justifie la seconde assertion des exemples ci-dessus.

DÉFINITION 5.8. Soit $D\colon F\mathbf{C} \to \mathscr{G}r$ un foncteur, on appelle *panextension de* $\mathbf{C}$ *par* D une panextension $\mathbf{K} \dashrightarrow \mathbf{H} \xrightarrow{p} \mathbf{C}$ telle que

$$\mathbf{K}_f = D(f) \qquad \text{et} \qquad {}^{h}k^{h'} = D(ph, ph')(k).$$

On a ici encore la notion de section s d'une panextension comme en 2.1. En associant à chaque $f \in \mathbf{C}_1 = (F\mathbf{C})_0$ le groupe $\mathbf{K}_f$ et à chaque $(u, v) \in (F\mathbf{C})_1$ le morphisme ${}^{s(u)}(\ )^{s(v)}$, on définit un coefficient, au sens de [9], de $F\mathbf{C}$ vers $\mathscr{G}r$. Ce n'est pas nécessairement un foncteur car s n'en est pas nécessairement un.

THÉORÈME 5.9. *La donnée d'une section s d'une panextension* $\mathbf{E}$ *définit une application* $\psi\colon \mathbf{C}_2 \to \mathbf{K}_1$ *telle que:*

a) $\psi(c, c') \in \mathbf{K}_{cc'}$ *et est une identité si c ou c' en est une.*

b) *étant donné* $(c, c', c'') \in \mathbf{C}_3$*, on a la relation:*

$${}^{s(c)}\psi(c', c'')\psi(c, c'c'') = (\psi(c, c')^{s(c'')})\psi(cc', c''),$$

c) *étant donnés* $(c, c') \in \mathbf{C}_2$, $k \in \mathbf{K}_1$ *et* $h \in \mathbf{H}_1$, *on a les relations:*

$$ {}^{s(c)s(c')}k = (\psi(c,c')^{k[h]})({}^{s(cc')}k((\psi(c,c')^{-1})^h, $$

$$ k^{s(c)s(c')} = ({}^{k[h]}\psi(c,c'))(k^{s(cc')})({}^h(\psi(c,c')^{-1})), $$

quand ces expressions ont un sens.

DÉFINITION 5.10. L'application ψ est appelée le 2-*cocycle* associé à la panextension $\mathbf{E}$ par la section s.

THÉORÈME 5.11. *Soient* ψ *et* ψ' *les* 2-*cocycles associés à* $\mathbf{E}$ *par des sections* s *et* s'. *Il existe une application* $\tau: \mathbf{C}_1 \to \mathbf{K}_1$ *telle que*

a) $\tau(c) \in \mathbf{K}_c$,

b) $\psi(c,c') = \tau(cc')^{-1}\psi'(c,c')(\tau(c)^{s'(c')})({}^{s(c)}\tau(c'))$
$\qquad = \tau(cc')^{-1}\psi'(c,c')({}^{s'(c)}\tau(c'))(\tau(c)^{s(c')}) \qquad \forall (c,c') \in \mathbf{C}_2$,

c) ${}^{s'(c)}k = (\tau(c)^{k[h]})({}^{s(c)}k)(\tau(c)^{-1})^h$ *et* $k^{s'(c)} = ({}^{k[h]}\tau(c))(k^{s(c)})({}^h(\tau(c)^{-1}))$,

quand ces expressions ont un sens.

Les conditions c) de 5.9 et 5.11 se ramènent à des conditions de commutativité quand $\mathbf{E}$ est une panextension de $\mathbf{C}$ par un foncteur D: $F\mathbf{C} \to \mathcal{G}r$ et disparaît si D est à valeurs dans $\mathcal{A}b$ i.e. si D est un $\mathbf{C}$-système linéaire au sens de [2].

DÉFINITION 5.12. Deux panextensions de catégories $\mathbf{E}: \mathbf{K} \dashrightarrow \mathbf{H} \xrightarrow{p} \mathbf{C}$ et $\mathbf{E}': \mathbf{K} \dashrightarrow \mathbf{H}' \xrightarrow{p'} \mathbf{C}'$ sont dites *congrues* s'il existe un foncteur inversible $\mu: \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ tel que

a) $p'\mu = p$,

b) $k[\mu(h)] = \mu(k[h])$ quand ceci a un sens.

On notera Panext($\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$), resp. Panext($\mathbf{C}$, D), l'ensemble des *classes de congruence* de panextensions de $\mathbf{C}$ par un groupoïde $\mathbf{K}$, resp. un foncteur D: $F\mathbf{C} \to \mathcal{G}r$.

LEMME 5.13. *Dans les conditions de la définition précédente, on a:*

$$ {}^h k^{h'} = {}^{\mu(h)}k^{\mu(h')} $$

quand ceci a un sens. Cette propriété est triviale dans le cas où $\mathbf{E}$ *est une panextension par un foncteur* D: $F\mathbf{C} \to \mathcal{G}r$.

THÉORÈME 5.14. *Soient* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{E}'$ *deux panextensions de* $\mathbf{C}$ *par* $\mathbf{K}$. *Si* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{E}'$ *sont congrues et si* ψ *est un* 2-*cocycle associé à* $\mathbf{E}$, *alors* ψ *est aussi un*

2-*cocycle associé à* $\mathbf{E}'$. *Réciproquement, si un même* 2-*cocycle* ψ *est associé à* $\mathbf{E}$ *et à* $\mathbf{E}'$, *alors* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{E}'$ *sont congrues.*

6. Cohomologie à coefficients panvariants

Considérons une (petite) catégorie $\mathbf{C}$, un foncteur $D\colon F\mathbf{C} \to \mathcal{G}r$ et le groupoïde

$$\mathbf{K} = \coprod_{f \in \mathbf{C}_1} D(f).$$

On notera $\mathbf{K}_f = D(f)$ et ${}^{c}k^{c'} = D(c, c')(k)$.

PROPOSITION 6.1. *Si l'on a une panextension de* $\mathbf{C}$ *par* D, *alors* D *est un* $\mathbf{C}$-*système naturel.*

Dans la suite on considère un $\mathbf{C}$-système naturel D.

DÉFINITION 6.2. Un 2-*cocycle de* C *vers* D est la donnée d'une application $\psi\colon \mathbf{C}_2 \to \mathbf{K}_1$ telle que:

a) $\psi(c, c') \in \mathbf{K}_{cc'}$ et est une identité si c ou c' en est une,

b) ${}^{c}\psi(c', c'')\psi(c, c'c'') = (\psi(c, c')^{c''})\psi(cc', c'') \qquad \forall (c, c', c'') \in \mathbf{C}_3$.

DÉFINITION 6.3. Deux cocycles ψ et ψ' de $\mathbf{C}$ vers D sont dits *cohomologues* s'il existe une application $\tau\colon \mathbf{C}_1 \to \mathbf{K}_1$ telle que:

a) $\tau(c) \in \mathbf{K}_c$,

b) $$\begin{aligned}\psi(c, c') &= \tau(cc')^{-1}\psi'(c, c')(\tau(c)^{c'})({}^{c}\tau(c'))\\ &= \tau(cc')^{-1}\psi'(c, c')({}^{c}\tau(c'))(\tau(c)^{c'}), \qquad \forall (c, c') \in \mathbf{C}_2.\end{aligned}$$

DÉFINITION 6.4. L'ensemble des classes de cohomologie de 2-cocycles de $\mathbf{C}$ vers D est appelé l'*ensemble de cohomologie* de dimension 2 de $\mathbf{C}$ vers D et est noté $H^2(\mathbf{C}, D)$.

THÉORÈME 6.5. *L'application, qui à chaque panextension de* $\mathbf{C}$ *par* D *associe la classe de cohomologie d'un de ses* 2-*cocycles associés, définit une bijection*

$$\omega\colon \mathrm{Panext}(\mathbf{C}, D) \longrightarrow H^2(\mathbf{C}, D).$$

Compte tenu de 5.7, les panextensions de $\mathbf{C}$ par D sont exactement les extensions linéaires de $\mathbf{C}$ par D et le dernier théorème se trouve dans [2]. On comparera sa démonstration et celle de 4.6.

La théorie de Baues-Wirsching que l'on retrouve ici est reliée par Pavešić dans [12] à l'extension de la cohomologie de Hochschild décrite par Gerstenhaber-Schack dans [5].

RÉFÉRENCES

1. Baues, H. J., and Minian, E. G., *Track extensions of categories and cohomology*, K-theory 23 (2001), 1–13.
2. Baues, H. J., and Wirsching, G., *Cohomology of small categories*, J. Pure Appl. Algebra 38 (1985), 187–211.
3. Datuashvili, T., *On the cohomology of categories* (russian), Trudy Tbiliss. Mat. Inst. 62 (1979), 28–37.
4. Dedecker, P., and Lue, A. T. S., *A non abelian two-dimensional cohomology for associative algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 1044–1050.
5. Gerstenhaber, M., and Schack, S., *On the deformation of algebra morphisms and diagrams*, Trans. Amer. Math. Soc. 279 (1983), 1–50.
6. Golasinski, M., *n-fold extensions and cohomology of small categories*, Mathematica (Cluj) 31 (54) (1989), 53–59.
7. Hochschild, G., *On the cohomology groups of an associative algebra*, Ann. of Math. 46 (1945), 58–67.
8. Hoff, G., *On the cohomology of categories*, Rend. Mat. 7 (1974), 169–192.
9. Hoff, G., *Cohomologies et extensions de catégories*, Math. Scand. 74 (1994), 191–207.
10. Lue, A. T. S., *Non-abelian cohomology of associative algebras*, Quart. J. Math. Oxford 19 (1968), 159–180.
11. Mitchell, B., *Rings with several objects*, Adv. Math. 8 (1972), 1–161.
12. Pavešić, P., *Diagram cohomologies using categorical fibrations*, J. Pure Appl. Algebra 112 (1996), 73–90.

LAGA (UMR 7539 DU CNRS)
INSTITUT GALILÉE
AVENUE J. B. CLÉMENT
F-93430 VILLETANEUSE
FRANCE
E-mail: hoff@math.univ-paris13.fr