MATH. SCAND. 96 (2005), 307–319

ESTIMATIONS DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE BEZOUT DANS LES ALGÈBRES DE BEURLING ANALYTIQUES

O. EL-FALLAH et M. ZARRABI

Abstract

Let A be a unitary commutative Banach algebra with unit e. For $f \in A$ we denote by $\hat{f}$ the Gelfand transform of f defined on $\hat{A}$, the set of maximal ideals of A. Let $(f_1, \dots, f_n) \in A^n$ be such that $\sum_{i=1}^n \|f_i\|^2 \leq 1$. We study here the existence of solutions $(g_1, \dots, g_n) \in A^n$ to the Bezout equation $f_1 g_1 + \dots + f_n g_n = e$, whose norm is controlled by a function of n and $\delta = \inf_{\chi \in \hat{A}} (|\hat{f}_1(\chi)|^2 + \dots + |\hat{f}_n(\chi)|^2)^{1/2}$.

We treat this problem for the analytic Beurling algebras and their quotient by closed ideals. The general Banach algebras with compact Gelfand transform are also considered.

1. Introduction

Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire. L'ensemble des caractères de A, qu'on appellera aussi spectre de A, sera noté $\hat{A}$. La transformée de Gelfand associée à A est l'application:

$$\begin{aligned} \mathscr{G} : \; A &\longrightarrow \mathscr{C}(\hat{A}) \\ f &\longrightarrow \hat{f} \end{aligned}$$

où

$$\hat{f}(\chi) = \chi(f), \qquad \chi \in \hat{A},$$

et où $\mathscr{C}(X)$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur l'espace topologique X.

Rappelons maintenant les différentes versions quantitatives de la visibilité du spectre introduites dans [5] et [9]. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $\delta \in (0, 1]$, on dit que le spectre de A est $(\delta - n)$-visible ([5]) s'il existe une constante $C \in (0, +\infty)$ tel que pour tout $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in A^n$ satisfaisant

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^n \|f_i\|^2 \leq 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^n |\hat{f}_i(\chi)|^2 \geq \delta^2 \quad \text{pour tout } \chi \in \hat{A},$$

Received January 25, 2004.

il existe $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in A^n$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i g_i = e \qquad \text{et} \qquad \Big(\sum_{i=1}^{n} \|g_i\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq C. \tag{2}$$

où e est l'élément unité de A.

On notera alors

$$C_n(\delta, A) = \sup\bigg\{\inf\bigg\{\Big(\sum_{i=1}^{n} \|g_i\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} : \sum_{i=1}^{n} f_i g_i = e\bigg\}\bigg\},$$

le sup étant pris sur les éléments f de A^n satisfaisant (1). Notons que le spectre de A est $(\delta - n)$-visible pour $\delta \in \,]0, 1]$ si et seulement si $C_n(\delta, A) < +\infty$. Il est clair que si $0 < \delta' \leq \delta \leq 1$, alors $C_n(\delta, A) \leq C_n(\delta', A)$. Donc il existe un point critique $\delta_n(A) \in [0, 1]$ tel que $C_n(\delta, A) = +\infty$ pour $\delta < \delta_n(A)$ et $C_n(\delta, A) < +\infty$ pour $\delta > \delta_n(A)$. Signalons aussi que $C_n(\delta, A) \leq C_{n+1}(\delta, A)$ pour tout $n \geq 1$.

On dit que le spectre de A est δ-Complétement visible s'il est $(\delta - n)$-visible pour tout $n \geq 1$ et si $\sup_{n\geq 1} C_n(\delta, A) < +\infty$.

On notera dans la suite, T le cercle unité, D le disque unité, pour tout $f \in \mathscr{C}(\mathsf{T})$, $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}\,dt$ le $n^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de f et enfin $A(\mathsf{D})$ l'algèbre des fonctions continues sur $\overline{\mathsf{D}}$ et holomorphe dans D.

Dans ce travail ω désignera une fonction croissante de N à valeurs dans $]0, +\infty[$ vérifiant

$$\omega(0) = 1, \quad \omega(n+m) \leq \omega(n)\omega(m), \quad (n, m \in \mathsf{N}) \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \omega(n)^{\frac{1}{n}} = 1. \tag{3}$$

L'algèbre de Beurling analytique associée au poids ω est l'espace

$$A_\omega^+ = \bigg\{f \in A(\mathsf{D}) : \sum_{n\in\mathsf{N}} |\hat{f}(n)|\omega(n) < +\infty\bigg\},$$

muni du produit ponctuel et de la norme $\|f\|_\omega = \sum_{n\in\mathsf{N}} |\hat{f}(n)|\omega(n)$. Ainsi A_ω^+ est une algèbre de Banach commutative unitaire semi-simple. En identifiant son spectre au disque unité fermé, la transformée de Gelfand devient l'identité i.e $\hat{f} = f$ pour tout $f \in A_\omega^+$. Notons que A_ω^+ est isomorphe à l'algèbre de Beurling sur les entiers naturels $\ell_\omega^1 = \big\{(x_n)_{n\geq 0} : \sum_{n\in\mathsf{N}} |x_n|\omega(n) < +\infty\big\}$.

La caractérisation des algèbres de Beurling-Sobolev ayant la $(\delta - 1)$-visibilité a fait l'objet de plusieurs travaux (voir [5], [9], [4], [10] et [1]) . Il a été démontré dans [4], que $\delta_1(A_\omega^+) = 0$ si et seulement si

$$\lim_{p\to+\infty} a(p, \omega) = 0 \tag{4}$$

où

$$a(p,\omega) = \lim_{q\to+\infty} a(q,p,\omega)$$

et

$$a(q,p,\omega) = \sup\left\{\left(\frac{\omega(n_1+n_2+\cdots+n_p)}{\omega(n_1)\omega(n_2)\ldots\omega(n_p)}\right)^{\frac{1}{p}} : n_i \geq q \quad (i=1,2,\ldots,p)\right\}.$$

Notons que toute suite croissante ω qui satisfait la condition (4) diverge nécessairement vers l'infini.

Notre objectif dans ce travail est d'étudier la $(\delta - n)$-visibilité pour les algèbres de Beurling analytiques et pour les quotients de ces algèbres. Les deux résultats principaux de ce travail sont:

THÉORÈME A. *Soit ω une suite croissante satisfaisant* (3). *Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) *Le spectre de A_ω^+ est δ-complétement visible pour tout $\delta \in (0,1]$.*

ii) *Pour tout $n \geq 1$, le spectre de A_ω^+ est $(\delta - n)$–visible pour tout $\delta \in (0,1]$.*

iii) *ω satisfait la condition* (4).

THÉORÈME B. *Soit ω une suite croissante satisfaisant* (3). *Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) *ω satisfait la condition* (4).

ii) *Pour tout idéal fermé I de A_ω^+ et pour tout $\delta \in (0,1]$, le spectre de A_ω^+/I est δ-complétement visible.*

Les théorèmes A et B sont démontrés respectivement dans la section 2 et la section 3. Dans la section 4 nous considérons plus généralement les algèbres dont la transformée de Gelfand est compacte.

2. Preuve du Théorème A

Soit ω une suite croissante satisfaisant (3) et soit $\widetilde{\omega}$ le poids symétrique sur Z associé à ω (i.e $\widetilde{\omega}(n) = \omega(|n|)$ pour tout $n \in \mathsf{Z}$). L'espace

$$A_{\widetilde{\omega}} = \left\{ f \in \mathscr{C}(\mathsf{T}) : \sum_{n\in\mathsf{Z}} |\hat{f}(n)|\widetilde{\omega}(n) < +\infty \right\},$$

muni du produit ponctuel et de la norme $\|f\|_{\widetilde{\omega}} := \sum_{n\in\mathsf{Z}} |\hat{f}(n)|\widetilde{\omega}(n)$ est une algèbre de Banach commutative unitaire dont l'ensemble des caractères s'identifie au cercle unité T. Lorsque $\widetilde{\omega}(n) = 1$ pour tout $n \in \mathsf{Z}$, on écrira $\|f\|_1$ au lieu de $\|f\|_{\widetilde{\omega}}$. Puisque le poids ω est croissant on a $\delta_1(A_\omega^+) = 0$ si et seulement si $\delta_1(A_{\widetilde{\omega}}) = 0$ ([4], Corollaire 5.5).

Dans le Théorème A, l'implication i) $\Rightarrow$ ii) est triviale, l'implication ii) $\Rightarrow$ iii) découle immédiatement de [4] et enfin l'implication iii) $\Rightarrow$ i) est une conséquence directe de [4] et du résultat suivant.

THÉORÈME 2.1. *Soit ω une suite croissante satisfaisant* (3). *Pour tout $\delta \in (0, 1]$ et tout $n \geq 1$ on a*

$$C_n(\delta, A_\omega^+) \leq 5C_1(\delta^2, A_{\tilde{\omega}})^2.$$

PREUVE. Soient $\delta \in (0, 1]$ et $f = (f_1, \dots, f_n) \in (A_\omega^+)^n$ satisfaisant

$$\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_\omega^2 \leq 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} |f_i(\zeta)|^2 \geq \delta^2 \quad \text{pour tout } \zeta \in \overline{\mathsf{D}}. \tag{5}$$

Nous allons construire $g = (g_1, \dots, g_n) \in (A_\omega^+)^n$ satisfaisant

$$\sum_{i=1}^{n} f_i g_i = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} \|g_i\|_\omega^2 \leq 25C_1(\delta^2, A_{\tilde{\omega}})^4.$$

Dans un premier temps nous supposons que les f_j, $j = 1, 2, \dots, n$, sont holomorphes au voisinage de $\overline{\mathsf{D}}$. Soient $F = \sum_{j=1}^{n} |f_j|^2$ et $h_j = \frac{\overline{f_j}}{F}$. Il est clair que les restrictions de F et h_j au cercle unité appartiennent à $A_{\tilde{\omega}}$ et que $\sum_{j=1}^{n} f_j h_j = 1$. Comme dans la preuve du théorème de la couronne dans H^∞, nous allons modifier les h_j pour obtenir des solutions holomorphes sur D. Pour cela soit $a_{j,k} = h_j \frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}} - h_k \frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}}$ et

$$b_{j,k}(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathsf{D}} \frac{a_{j,k}(\zeta)}{\zeta - z} \, dA(\zeta),$$

où dA est la mesure d'aire. Puisque les h_j, $j = 1, 2, \dots, n$, sont C^∞ dans un voisinage de $\overline{\mathsf{D}}$, il est bien connu que $b_{j,k}$ l'est aussi et que $\frac{\partial b_{j,k}}{\partial \bar{z}} = a_{j,k}$ sur D. Soit

$$g_j = h_j + \sum_{k=1}^{n} b_{j,k} f_k.$$

Il est alors clair que g_j est holomorphe sur D et que $\sum_{j=1}^{n} f_j g_j = 1$. Le reste de la preuve sera consacrée à la majoration de $\sum_{j=1}^{n} \|g_j\|_\omega^2$.

Nous avons

$$\|g_j\|_\omega = \left\| h_j + \sum_{k=1}^{n} b_{j,k} f_k \right\|_\omega \leq \|h_j\|_{\tilde{\omega}} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=0}^{\infty} |\widehat{b_{j,k} f_k}(m)| \omega(m), \tag{6}$$

où $\widehat{b_{j,k}f_k}(m)$ est le $m^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de la restriction de $b_{j,k}f_k$ au cercle unité. D'après (5), $\|F\|_{\widetilde{\omega}} \le 1$ et $F(\zeta) \ge \delta^2$ pour tout $\zeta \in \mathsf{T}$. Donc

$$\|h_j\|_{\widetilde{\omega}} \le \|f_j\|_{\omega}\|F^{-1}\|_{\widetilde{\omega}} \le \|f_j\|_{\omega} C_1(\delta^2, A_{\widetilde{\omega}}). \tag{7}$$

Notons aussi que

$$\begin{aligned}\widehat{b_{j,k}}(m) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} b_{j,k}(e^{it})e^{-imt}\,dt \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathsf{D}} a_{j,k}(\zeta)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-imt}}{\zeta - e^{it}}\,dt\right)dA(\zeta).\end{aligned}$$

Donc pour $m \ge 0$, $\widehat{b_{j,k}}(m) = 0$ et pour $m \le -1$, on a

$$\begin{aligned}\widehat{b_{j,k}}(m) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathsf{D}} a_{j,k}(\zeta)\zeta^{-m-1}\,dA(\zeta) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} a_{j,k}(re^{it})r^{-m-1}e^{-i(m+1)}r\,dr\,dt \\ &= 2\int_0^1 \widehat{a_{j,k}^{(r)}}(m+1)r^{-m}\,dr.\end{aligned}$$

Ici, lorsqu' une fonction g est définie sur $\overline{\mathsf{D}}$, on note $g^{(r)}(z) = g(rz)$ pour $z \in \overline{\mathsf{D}}$ et $0 \le r < 1$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}|\widehat{b_{j,k}f_k}(m)|\omega(m) &= \sum_{m=0}^{\infty}\left|\sum_{l=0}^{\infty}\widehat{b_{j,k}}(-l)\hat{f}_k(m+l)\omega(m)\right| \\ &\le \sum_{l=0}^{\infty}|\widehat{b_{j,k}}(-l)|\sum_{m=0}^{\infty}|\hat{f}_k(m+l)|\omega(m+l) \\ &\le \|f_k\|_{\omega}\sum_{l=0}^{\infty}|\widehat{b_{j,k}}(-l)| \\ &\le 2\|f_k\|_{\omega}\sum_{l=0}^{\infty}\int_0^1\left|\widehat{a_{j,k}^{(r)}}(1-l)\right|r^l\,dr \\ &\le 2\|f_k\|_{\omega}\int_0^1\|a_{j,k}^{(r)}\|_1\,dr.\end{aligned} \tag{8}$$

Des calculs bien connus montrent que $a_{j,k} = \left(\overline{f_j'}\,\overline{f_k} - \overline{f_j}\,\overline{f_k'}\right)F^{-2}$. Par conséquent on a

$$\begin{aligned}
\|a_{j,k}^{(r)}\|_1 &= \left\| \frac{1}{F^{2(r)}}\Big(\overline{f_j'^{(r)} f_k^{(r)}} - \overline{f_j^{(r)} f_k'^{(r)}} \Big) \right\|_1 \\
&\le \left\| \frac{1}{F^{(r)}} \right\|_1^2 \big(\| f_j'^{(r)} \|_1 \| f_k^{(r)} \|_1 + \| f_j^{(r)} \|_1 \| f_k'^{(r)} \|_1 \big) \\
&\le C_1(\delta^2, A_{\widetilde{\omega}})^2 \big(\| f_j'^{(r)} \|_1 \| f_k \|_\omega + \| f_j \|_\omega \| f_k'^{(r)} \|_1 \big).
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 \|a_{j,k}^{(r)}\|_1 \, dr \le C_1(\delta^2, A_{\widetilde{\omega}})^2 \left(\| f_k \|_\omega \int_0^1 \| f_j'^{(r)} \|_1 \, dr + \| f_j \|_\omega \int_0^1 \| f_k'^{(r)} \|_1 \, dr \right).$$

Or pour tout $l = 1, 2, \ldots, n$, on a

$$\int_0^1 \| f_l'^{(r)} \|_1 \, dr = \int_0^1 \sum_{m \ge 1} m |\hat{f}_l(m)| r^{m-1} \, dr = \sum_{m \ge 1} |\hat{f}_l(m)| \le \| f_l \|_\omega.$$

Ce qui donne

$$\int_0^1 \|a_{j,k}^{(r)}\|_1 \, dr \le 2 C_1(\delta^2, A_{\widetilde{\omega}})^2 \| f_j \|_\omega \| f_k \|_\omega. \tag{9}$$

En combinant les inégalités (5), (6), (7), (8) et (9), on obtient

$$\| g_j \|_\omega \le \| f_j \|_\omega C_1(\delta^2, A_{\widetilde{\omega}}) + 4 \| f_j \|_\omega C_1(\delta^2, A_{\widetilde{\omega}})^2 \le 5 \| f_j \|_\omega C_1(\delta^2, A_{\widetilde{\omega}})^2.$$

D'où

$$\left(\sum_{j=1}^n \| g_j \|_\omega^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le 5 C_1(\delta^2, A_{\widetilde{\omega}})^2.$$

Dans le cas où les f_j ne sont pas holomorphes dans un voisinage de $\overline{\mathsf{D}}$ on considère pour $0 < r < 1$, les $f_j^{(r)}$ qui vérifient aussi la condition (5). D'après ce qui précède, il existe $g_r = (g_{r,1}, \ldots, g_{r,n}) \in (A_\omega^+)^n$ satisfaisant

$$\sum_{i=1}^n f_i^{(r)} g_{r,i} = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^n \| g_{r,i} \|_\omega^2 \le 25 C_1(\delta^2, A_{\widetilde{\omega}})^4.$$

Comme A_ω^+ admet un prédual (A_ω^+ peut être identifié au dual de $c_0(1/\omega) = \{(u_n)_{n \ge 0} : \sup_{n \ge 0} |u_n|/\omega(n) < \infty\}$), d'après le théorème de Banach-Alaoglu, la boule unité fermée B_ω de A_ω^+ est compacte pour la topologie faible-*.

Comme de plus $c_0(1/\omega)$ est séparable, B_ω est metrisable pour la topologie faible-*. Il existe alors une suite croissante (r_k) tendant vers 1 et $g = (g_1, \ldots, g_n) \in (A_\omega^+)^n$ tel que pour $1 \leq i \leq n$, $(g_{r_k,i})_k$ converge faiblement vers g_i. Comme la convergence faible entraine la convergence uniforme sur tout compact de D, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} f_i g_i = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} \|g_i\|_\omega^2 \leq 25 C_1(\delta^2, A_{\tilde{\omega}})^4.$$

3. Preuve du Théorème B

Si $f \in A(\mathsf{D})$, on notera $Z(f) = \{z \in \overline{\mathsf{D}} : f(z) = 0\}$ et si $M \subset A(\mathsf{D})$, on notera $Z(M) = \cap_{f \in M} Z(f)$. Pour tout fermé $E \subset \overline{\mathsf{D}}$ on posera $E_\delta = \{\zeta \in \overline{\mathsf{D}} : d(\zeta, E) \leq \delta\}$, où $d(\zeta, E)$ désigne la distance de ζ à E.

Pour la preuve du résultat principal de cette section nous aurons besoin des deux lemmes élémentaires suivants.

LEMME 3.1. *Soit I un idéal fermé de A_ω^+ où ω est un poids satisfaisant* (3) *et soit $E = Z(I)$. Pour tout $\delta > 0$, il existe $f \in I$ tel que pour tout $z \in \overline{\mathsf{D}} \setminus E_\delta$, $f(z) \neq 0$.*

PREUVE. Soit I un idéal fermé de A_ω^+ tel que $Z(I) = E$. La ferméture J de I dans $A(\mathsf{D})$ est un idéal fermé tel que $Z(J) = E$. D'après la caractérisation des idéaux fermés de $A(\mathsf{D})$ ([6]), il existe $g \in J$ tel que $Z(g) = E$. En approchant g par les éléments de I on obtient le résultat.

On note alors

$$\varrho_I(\delta) = \sup\{\inf\{|f(z)| : z \in \overline{\mathsf{D}} \setminus E_\delta\}\},$$

le sup étant pris sur les $f \in I$ tels que $\|f\|_\omega \leq 1$. La conclusion du lemme 3.1 se traduit alors par $\varrho_I(\delta) > 0$ pour tout $\delta > 0$.

Pour toute suite $(\omega(n))_{n \geq 0}$, on notera par ω_* la fonction réciproque définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\omega_*(t) = \inf\{n \geq 1 : \omega(n) \geq t\},$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

LEMME 3.2. *Soit ω une suite croissante satisfaisant* (3), *alors pour tout $z, \zeta \in \overline{\mathsf{D}}$ tels que $|z - \zeta| \leq \frac{\delta}{\omega_*(2/\delta)}$ on a $|f(z) - f(\zeta)| \leq \delta \|f\|_\omega$ pour tout $f \in A_\omega^+$.*

PREUVE. Soit $f \in A_\omega^+$ et soit $z, \zeta \in \overline{\mathbb{D}}$ on a:

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq \sum_{n\geq 1} |\hat{f}(n)||z^n - \zeta^n| \leq \sup_{n\geq 1} \frac{|z^n - \zeta^n|}{\omega(n)} \|f\|_\omega$$

D'une part si $n \geq \omega_*(2/\delta)$ alors $\frac{|z^n-\zeta^n|}{\omega(n)} \leq \frac{2}{\omega(\omega_*(2/\delta))} \leq \delta$. D'autre part si $n \leq \omega_*(2/\delta)$ alors $\frac{|z^n-\zeta^n|}{\omega(n)} \leq |z-\zeta|n \leq |z-\zeta|\omega_*(2/\delta) \leq \delta$ dès que $|z-\zeta| \leq \frac{\delta}{\omega_*(2/\delta)}$. On a donc bien $\sup_{n\geq 1} \frac{|z^n-\zeta^n|}{\omega(n)} \leq \delta$ pour $|z-\zeta| \leq \frac{\delta}{\omega_*(2/\delta)}$.

Pour démontrer l'impliction ii) $\Rightarrow$ i) dans le théorème B, il suffit de prendre $I = \{0\}$ et d'utiliser ensuite le Théorème A. Quand à l'implication i) $\Rightarrow$ ii) elle découle du résultat suivant. On rappelle que pour les suites ω croissantes, la condition i) dans le théorème B entraine que ω diverge vers l'infini, ce qui assure que $\omega_*(t)$ est fini pour tout t.

THÉORÈME 3.3. *Soit ω une suite croissante satisfaisant* (3) *et soit I un idéal fermé de A_ω^+ alors*

$$C_n(\delta, A_\omega^+/I) \leq \frac{5}{\sqrt{2}} C_1(M_I(\delta)^2, A_{\tilde{\omega}})^2,$$

où $M_I(\delta) = \mathrm{Min}\big(\frac{1}{4}\varrho_I\big(\frac{\delta^2}{4\omega_*(8/\delta^2)}\big), \frac{\delta}{2\sqrt{2}}\big)$

PREUVE. Soit $\delta \in]0, 1]$ et soit $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in (A_\omega^+)^n$ satisfaisant

$$\sum_{j=1}^n \|f_j\|_\omega^2 \leq 3/2, \qquad \sum_{j=1}^n |f_j(\zeta)|^2 \geq \delta^2 \quad \text{pour tout } \zeta \in E := Z(I).$$

Soit $\delta' = \frac{\delta^2}{4\omega_*(8/\delta^2)}$. D'après le lemme 3.2, si $|z-\zeta| \leq \delta'$, alors $|f_j(z) - f_j(\zeta)| \leq (\delta^2/4)\|f_j\|_\omega$. Donc pour tout $\zeta \in E_{\delta'}$ il existe $z \in E$ tel que $|\zeta - z| \leq \delta'$ et par conséquent

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n |f_j(\zeta)|^2 &= \sum_{j=1}^n |f_j(z)|^2 - \sum_{j=1}^n (|f_j(z)|^2 - |f_j(\zeta)|^2) \\
&\geq \delta^2 - \sum_{j=1}^n |f_j(z) - f_j(\zeta)||f_j(z) + f_j(\zeta)| \\
&\geq \delta^2 - \sum_{j=1}^n \frac{\delta^2}{4}(2\|f_j\|_\omega^2) \\
&\geq \delta^2/4.
\end{aligned}$$

D'après le lemme 3.1, il existe $h \in I$ tel que $\|h\|_\omega = 1$ et $|h(z)| \geq \varrho_I(\delta')/2$ pour tout $z \in \mathsf{T} \setminus E_{\delta'}$. On pose alors pour $j = 1, 2, \ldots, n$, $h_j = \frac{1}{\sqrt{2}} f_j$ et $h_{n+1} = \frac{1}{2}h$. Il est alors clair que $\sum_{j=1}^{n+1} \|h_j\|_\omega^2 \leq 1$ et que $\sum_{j=1}^{n+1} |h_j(z)|^2 \geq M_I(\delta)^2$ pour tout $z \in \overline{\mathsf{D}}$. D'après le théorème 2.1, il existe $g_1, g_2, \ldots, g_{n+1} \in A_\omega^+$ tels que $\sum_{j=1}^{n+1} h_j g_j = 1$ et $\sum_{j=1}^{n+1} \|g_j\|^2 \leq 25C_1(M_I(\delta)^2, A_{\tilde{\omega}})^4$. Finalement pour $k_j = (1/\sqrt{2})g_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} \pi(f_j)\pi(k_j) = \pi(1) \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{n} \|k_j\|^2 \leq (25/2)C_1(M_I(\delta)^2, A_{\tilde{\omega}})^4,$$

où π est la surjection canonique de A_ω^+ dans A_ω^+/I, ce qui achève la preuve.

REMARQUE. Soit $p \geq 1$ et $\omega = (\omega_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante telle que $\omega(0) = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \omega(n)^{\frac{1}{n}} = 1$. On pose

$$A_{\omega,p}^+ = \left\{ f \in A(\mathsf{D}) : \|f\|_{\omega,p} = \left(\sum_{n\in\mathsf{N}} |\hat{f}(n)|^p \omega(n)^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}.$$

Si on suppose que $A_{\omega,p}^+$ est une algèbre topologique i.e il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|fg\|_{\omega,p} \leq C\|f\|_{\omega,p}\|g\|_{\omega,p}, \ \ (f, g \in A_{\omega,p}^+),$$

alors les conclusions des théorèmes A et B sont vraies pour $A_{\omega,p}^+$.

4. Exemples et Remarques

Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire et soit I est un idéal fermé de A. L'ensemble des caractères de l'algèbre quotient A/I s'identifie à l'ensemble $Z(I) = \{\chi \in \hat{A} : \hat{f}(\chi) = 0, \chi \in I\}$ ([3]). On a le résultat suivant.

THÉORÈME 4.1. *Supposons que la transformée de Gelfand de A soit compacte. Alors pour tout* $\delta \in (0, 1]$, *il existe une constante* $M(\delta) \in (0, 1]$ *telle que*

i) *Pour tout entier* $n \geq 1$, *il existe un entier* $m \geq 1$ *tel que*

$$C_n(\delta, A/I) \leq C_m(M(\delta), A).$$

En particulier si le spectre de A est δ*-complètement visible pour tout* $\delta \in (0, 1]$, *alors il en est de même pour le spectre de* A/I.

ii) *Si de plus I satisfait la condition suivante: Pour tout voisinage V de* $Z(I)$,

(10) *il existe* $f \in I$ *tel que* $\hat{f}(\chi) \neq 0$ *pour tout* $\chi \notin V$,

alors

$$C_n(\delta, A/I) \leq C_{n+1}(M(\delta), A).$$

En particulier $\delta_{n+1}(A) = 0 \Longrightarrow \delta_n(A/I) = 0.$

La preuve de ce théorème utilise le théorème de Arzèla-Ascoli et des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve du théorème 3.3. Nous l'omittons ici.

On dira que A est symétrique s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $f \in A$ on peut trouver $f^\star \in A$ tel que $\|f^\star\| \leq c\|f\|$ et $\hat{f}^\star(\chi) = \overline{\hat{f}(\chi)}$, $\chi \in \hat{A}$. Si A est symétrique et si $(f_1, \dots, f_n) \in A^n$ satisfait la condition (1) alors on a $\sum_{i=1}^n f_i g_i = e$, où $g_i = f_i^\star \big(\sum_{i=1}^n f_i f_i^\star\big)^{-1}$, $1 \leq i \leq n$. Ceci montre que $C_n(\delta, A) \leq C_1(\delta^2/c, A), n \geq 1$. Ainsi si le spectre de A est $\big(\frac{\delta^2}{c} - 1\big)$-visible alors il est δ–complètement visible (voir aussi [9]).

D'autre part il est facile de voir que tout idéal fermé d'une algèbre symétrique satisfait la condition (10). Il découle alors de ces observations et du théorème 4.1 que si A est symétrique et si sa transformée de Gelfand est compacte alors

$$\delta_{n+1}(A) = 0 \Longrightarrow \delta_n(A/I) = 0.$$

Considérons maintenant une algèbre A telle que $\mathscr{G}(A)$, l'image de A par sa transformée de Gelfand $\mathscr{G}$, est dense dans $\mathscr{C}(\hat{A})$, pour la norme de la convergence uniforme sur $\hat{A}$. Nous clamons que si I est un idéal fermé de A alors il satisfait la condition (10). En effet, soit J la fermeture de $\mathscr{G}(I)$ dans $\mathscr{C}(\hat{A})$, alors J est un idéal fermé et $Z(J) = Z(I)$. Soit V un voisinage de $Z(I)$ et soit $\varphi \in \mathscr{C}(\hat{A})$ une fonction égale à 1 sur $Z(I)$ et dont le support est contenu dans V. Alors d'après la structure des idéaux fermés de $\mathscr{C}(\hat{A})$ (voir [2], Theorem 4.1.3), la fonction $1 - \varphi$ est dans J et en l'approchant par des fonctions de $\mathscr{G}(I)$ on voit que I satisfait la condition (10).

Enfin nous signalons que la condition (10) n'est pas toujours satisfaite comme le montre l'exemple suivant :

Soit $A(\mathsf{D}^2) = \{f \in \mathscr{C}(\overline{\mathsf{D}^2}) : f$ holomorphe sur $\mathsf{D}^2\}$, l'algèbre du bidisque. Muni du produit ponctuel et de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathsf{D}^2} |f(z)|$, $A(\mathsf{D}^2)$ est une algèbre de Banach commutative et unitaire. Son spectre peut être identifié à $\overline{\mathsf{D}^2}$. Soit $K \subset \mathsf{D}^2$ un compact et soit $I(K)$ l'idéal fermé de $A(\mathsf{D}^2)$ définit par $I(K) = \{f \in A(\mathsf{D}^2) : f_{|K} \equiv 0\}$. On peut vérifier aisément, grâce au théorème de Hartogs, que $I(K)$ ne vérifie pas (10).

Dans la suite nous allons considérer deux exemples d'algèbres de Banach dans les transformées de Gelfand ne sont pas compactes.

1) Rappelons qu'on note par $A(\mathsf{D})$ l'algèbre du disque. Il est bien clair que $\delta_1(A(\mathsf{D})) = 0$ et que pour tout $\delta \in (0, 1]$, $C_1(\delta, A(\mathsf{D})) = 1/\delta$. La proposition

suivante montre, en particulier, qu'il existe des idéaux fermés I de $A(\mathsf{D})$ tel que $\delta_1(A(\mathsf{D})/I) = 1$.

PROPOSITION 4.2. *Soit I un idéal fermé de $A(\mathsf{D})$ tel que $Z(I) \subset \mathsf{T}$.*

(i) *Si $I = \{f \in A(\mathsf{D}) : f(z) = 0 \ (z \in Z(I))\}$, alors pour tout $n \geq 1$, $\delta_n(A(\mathsf{D})/I) = 0$.*

(ii) *Si $I \neq \{f \in A(\mathsf{D}) : f(z) = 0 \ (z \in Z(I))\}$, alors pour tout $n \geq 1$, $\delta_n(A(\mathsf{D})/I) = 1$.*

PREUVE. Posons $E = Z(I)$ et supposons que $I = \{f \in A(\mathsf{D}) : f(z) = 0 \ (z \in E)\}$. Notons que E est de mesure de Lebesgue nulle. D'après le théorème de Rudin-Bishop, toute fonction continue sur E est la restiction à E d'une fonction dans $A(\mathsf{D})$ ([6]). En fait l'injection $f + I \to f_{|E}$ est une isométrie bijective de $A(\mathsf{D})/I$ dans $\mathscr{C}(E)$. On a alors $C_n(\delta, A(\mathsf{D})/I) = C_n(\delta, \mathscr{C}(E)) = 1/\delta, n \geq 1, 0 \leq \delta < 1$. Ainsi la partie i) de la proposition est bien vérifiée.

Soient π la surjection canonique de $A(\mathsf{D})$ dans $A(\mathsf{D})/I$, $u : z \to z$ la fonction identité et $f_n = u^n$, $n \geq 1$. Supposons qu' il existe une constante $C > 0$ telle que $\|\pi(f_n)^{-1}\|_\infty \leq C, n \geq 1$. Pour tout polynôme trignômétrique $p(e^{it}) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$, on a

$$\begin{aligned}
\|p(\pi(u))\|_\infty &= \left\| \pi(u)^{-N} \sum_{n=-N}^{N} a_n \pi(u)^{n+N} \right\|_\infty \\
&\leq \|\pi(u)^{-N}\|_\infty \left\| \sum_{n=-N}^{N} a_n \pi(u)^{n+N} \right\|_\infty \\
&\leq C \left\| \sum_{n=-N}^{N} a_n u^{n+N} \right\|_\infty \\
&\leq C\|p\|_\infty.
\end{aligned}$$

Donc il existe un morphisme continu Φ de $\mathscr{C}(\mathsf{T})$ dans $A(\mathsf{D})/I$ prolongeant π. Le noyau $\operatorname{Ker}\Phi$ est un ideal fermé de $\mathscr{C}(\mathsf{T})$ qui verifie $\operatorname{Ker}\Phi \cap A(\mathsf{D}) = I$. Donc $\{f \in \mathscr{C}(\mathsf{T}) : f(z) = 0 \ (z \in E)\} \subset \operatorname{Ker}\Phi$. D'où $I = \{f \in A(\mathsf{D}) : f(z) = 0 \ (z \in E)\}$.

Supposons maintenant que $I \neq \{f \in A(\mathsf{D}) : f(z) = 0 \ (z \in E)\}$. D'après ce qui précède on a $\sup_n \|f_n\|_\infty = +\infty$. Puisque pour tout n, $\|f_n\|_\infty = 1$ et $|f_n(z)| = 1$, $(z \in E)$, on obtient que $\delta_1(A(\mathsf{D})/I) = 1$. Comme $\delta_n(A(\mathsf{D})/I) \geq \delta_1(A(\mathsf{D})/I)$, $n \geq 1$, on voit que la partie ii) de la proposition est satisfaite.

2) Considérons maintenant l'algèbre de Wiener analytique

$$A^+ = \left\{ f \in A(\mathsf{D}) : \|f\|_1 = \sum_{n\geq 0} |\hat{f}(n)| < +\infty \right\}.$$

Il est montré dans [5] (voir aussi [9]) que $\delta_1(A^+) = \frac{1}{2}$, $C_1(\delta, A^+) = \frac{1}{1-2\delta}$ pour $\frac{1}{2} < \delta \leq 1$ et $C_1(\delta, A^+) = +\infty$ pour $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$.

Pour un fermé non vide E de T, on pose $I_E = \{f \in A^+ : f(z) = 0, \ \ (z \in E)\}$. On supposera que E est de type ZA^+ i.e $I_E \neq \{0\}$. Contrairement à ce qui se passe dans la proposition 4.2, les constantes $\delta_n(A^+/I_E)$ dépendent de E. En effet si E est un ensemble de Helson (voir [7] pour la définition) alors d'après le résultat de Wik [12], on a $A^+(E) = C(E)$, où $A^+(E)$ désigne l'algèbre des restrictions des fonctions de A^+ à E. Dans ce cas on a $\delta_n(A^+/I_E) = 0, n \geq 1$. D'autre part si E n'est pas de type AA^+ (voir [8]) alors on a $\|\pi(u^n)\| = 1$ pour $n \geq 1$, $|u^n(z)| = 1$ pour $z \in E$ et $\lim_{n\to+\infty} \|\pi(u)^{-n}\| = +\infty$, où π est la surjection canonique de A^+ dans A^+/I_E et u la fonction identité $z \to z$. On voit alors que dans ce cas on a $\delta_1(A^+/I_E) = 1$ et par conséquent $\delta_n(A^+/I_E) = 1$, $n \geq 1$.

REFERENCES

1. Aleman, A., and Dahlner, A., *Uniform spectral radius and compact gelfand transforms*, Préprint.
2. Aupetit, B., *A Primer on Spectral Theory*, Springer Verlag, New York, 1991.
3. Bonsal, F. F., and Duncan, J., *Complete Normed Algebras*, Springer Verlag, New York, 1958.
4. El-Fallah, O., and Ezzaaraoui, A., *Majorations uniformes de normes d'inverses dans les Algèbres de Beurling*, J. London Math. Soc. (2) 65 (2002), 705–719.
5. El-Fallah, O., Nikolskii, N. K., and Zarrabi, M., *Resolvant estimates in Beurling-Sobolev algebras*, St. Petersburg Math. J. 10, no 6 (1999), 901–964.
6. Hoffman, K., *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey, 1962.
7. Kahane, J. P., *Séries de Fourier absolument convergentes*, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.
8. Kahane, J. P., Katznelson, Y., *Sur les algèbres de restrictions des séries de Taylor absolument convergentes à un fermé du cercle*, J. Analyse Math. 23 (1970), 185–197.
9. Nikolskii, N. K., *In search of the invisible spectrum*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 49 (1999), 1925–1998.
10. Nikolskii, N. K., *The phenomenon of the invisible spectrum and the problem of efficient inversions*, Proc. Conference "Harmonic Analysis in 20th century", ed. J. Byrnes.
11. Tolokonnikov, V. A., *The corona theorem in algebras of bounded analytic functions*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 149 (1991), 61–95.

12. Wik, I., *On linear dependence in closed sets*, Ark. Mat. 4 (1961), 209–218.

UNIVERITÉ MOHAMED V
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
AVENUE IBN BATTOUTA
BP 1014, RABAT
MAROC
E-mail: elfallah@fsr.ac.ma

UNIVERSITÉ BORDEAUX I
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES
UMR 5467
351, COURS DE LA LIBÉRATION
33405 TALENCE CEDEX
FRANCE
E-mail: zarrabi@math.u-bordeaux.fr