MATH. SCAND. 102 (2008), 27–44

ÜBER KOASSOZIIERTE PRIMIDEALE III

HELMUT ZÖSCHINGER

Einleitung

Sei R ein kommutativer noetherscher Ring. In Fortsetzung von [6] und [9] wollen wir für spezielle Klassen von R-Moduln die Menge $\mathrm{Koass}(M)$ aller zu M *koassoziierten* Primideale untersuchen, d.h. die Menge $\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(M')$ für einen artinschen Faktormodul M' von $M\}$. Für einen freien R-Modul F ist das Ergebnis wohlbekannt: Ist F endlich erzeugt $\neq 0$, gilt $\mathrm{Koass}(F) = \mathrm{Max}(R)$; ist F nicht endlich erzeugt, gilt $\mathrm{Koass}(F) = \mathrm{Spec}(R)$. Daraus folgt für jedes Primideal $\mathfrak{p}$, das kein maximales Ideal ist: Genau dann ist $\mathfrak{p}$ koassoziiert zu F, wenn $F_{\mathfrak{p}}$ als $R_{\mathfrak{p}}$-Modul nicht endlich erzeugt ist. Unser erstes Hauptergebnis (Satz 1.5) lautet, daß diese Charakterisierung nicht nur für jeden freien, sondern für jeden torsionslosen R-Modul M gilt. Zur weiteren Beschreibung der Ergebnisse dieser Arbeit sei ab jetzt M stets ein *torsionsloser* R-Modul, d.h. Untermodul eines direkten Produktes von Exemplaren des Ringes R. Mit Hilfe des Ideales $I = \bigcap\{\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(M) \mid M_{\mathfrak{q}}$ ist als $R_{\mathfrak{q}}$-Modul nicht endlich erzeugt$\}$ und $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subset \mathfrak{p}\}$ erhalten wir dann aus Satz 1.5 folgenden geschlossenen Ausdruck:

(1.6) $$\mathrm{Koass}(M) = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R) \mid \mathrm{Ann}_R(M) \subset \mathfrak{m}\} \cup V(I).$$

Damit folgt aus $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(M)$ sogar $V(\mathfrak{p}) \subset \mathrm{Koass}(M)$, und im semilokalen Fall wird $\mathrm{Koass}(M)$ eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{Spec}(R)$. Für die Menge $\mathrm{Att}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(M/\mathfrak{p}M)\}$ aller zu M *attachierten* Primideale ist das immer richtig, denn wir zeigen in Satz 1.3, daß $\mathrm{Att}(M) = V(\mathrm{Ann}_R(M))$ ist.

Ist $M \subset X$ eine injektive Hülle von M, so gilt bekanntlich $\mathrm{Koass}(X) \subset \mathrm{Ass}(R)$ ([4, p. 145] oder [6, p. 200]). Wir fragen uns, wann auch $\mathrm{Koass}(M) \subset \mathrm{Ass}(R)$ gilt und werden das durch die "Lage" von M in X beschreiben. Dabei spielen die Abschwächung $\mathrm{Koass}(M) \cap \mathrm{Max}(R) \subset \mathrm{Ass}(R)$ und die Verschärfung $\mathrm{Koass}(M) \subset \mathrm{Ass}(R) \cap \mathrm{Max}(R)$ eine wichtige Rolle, denn jede der drei Bedingungen gibt ein Maß dafür an, wie weit M von der Eigenschaft "injektiv"

Eingegangen am 29. Mai 2006.

entfernt ist. Zur Formulierung der Hauptergebnisse müsssen wir an folgende Definitionen erinnern: Ist B ein R-Modul und A ein Untermodul von B, so heißt A ein (Additions-)*Komplement* in B, wenn es einen Untermodul $B_1 \subset B$ gibt, so daß $A + B_1 = B$ ist und A bzgl. dieser Eigenschaft minimal ist. A heißt *koabgeschlossen* in B, wenn aus $A_1 \subset A$ und A/A_1 klein in B/A_1 stets folgt $A_1 = A$, und A heißt *erblich* in B, wenn aus $A_1 \subset A$ und A_1 klein in B stets folgt A_1 klein in A. Die Dualisierungen dieser drei Begriffe sind wohlbekannt und stimmen auf Grund des Zornschen Lemmas in jedem R-Modul B überein [1, Proposition 1.4]. In unserem Fall können sie aber sehr verschieden sein, denn für jeden torsionslosen flachen R-Modul M mit injektiver Hülle X zeigen wir:

(3.7) *Genau dann ist* $\mathrm{Koass}(M) \cap \mathrm{Max}(R) \subset \mathrm{Ass}(R)$*, wenn M erblich in X ist.*

(4.6) *Genau dann ist* $\mathrm{Koass}(M) \subset \mathrm{Ass}(R)$*, wenn M koabgeschlossen in X ist.*

(3.10) *Genau dann ist* $\mathrm{Koass}(M) \subset \mathrm{Ass}(R) \cap \mathrm{Max}(R)$*, wenn M ein Komplement in X ist.*

Wie weit diese Eigenschaften auseinanderfallen können, zeigt schon der Spezialfall $M = R^{(\mathsf{N})}$. In ihm bedeutet (3.7), daß R mit seinem totalen Quotientenring K übereinstimmt, (4.6) bedeutet, daß $R = K$ und $\dim(R) \leq 1$ ist, und (3.10) bedeutet, daß R sogar artinsch ist.

1. Die attachierten und koassoziierten Primideale eines torsionslosen Moduls

Stets sei in dieser Arbeit R ein kommutativer noetherscher Ring. Für jede Indexmenge I ist dann nach Chase (siehe [1, p. 142]) der R-Modul R^I flach und besitzt deshalb nach [7, Folgerung 2.7] eine Primärzerlegung, d.h. Untermoduln $V_1, \dots, V_n$ derart, daß alle R^I/V_i primär sind und $V_1 \cap \cdots \cap V_n = 0$ ist. Insbesondere besitzt jeder torsionslose R-Modul M, als Untermodul eines geeigneten Produkts R^I, selbst eine Primärzerlegung und deshalb ist $\mathrm{Ass}(M)$ endlich.

Lemma 1.1. *Sei M ein torsionsloser R-Modul, S eine multiplikative Teilmenge von R und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R. Dann gilt:*

(a) *M_S ist als R_S-Modul torsionslos.*

(b) *Ist M_S als R_S-Modul endlich erzeugt, so gibt es ein $s_0 \in S$ derart, daß $s_0 M$ als R-Modul endlich erzeugt ist.*

(c) *Ist $M/\mathfrak{a}M$ endlich erzeugt, so ist auch $M/\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i M$ endlich erzeugt.*

Beweis. Ein R-Modul M ist genau dann torsionslos, wenn es zu jedem $0 \neq x \in M$ ein $f \in M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$ gibt mit $f(x) \neq 0$, d.h. wenn die kanonische Abbildung $M \to M^{**}$ in den Bidualen injektiv ist.

(a) Sei $0 \neq \frac{x}{s} \in M_S$. Weil $T_S(R) = \mathrm{Kern}(R \to R_S)$ durch ein $s_0 \in S$ annulliert wird und $s_0 x \neq 0$ ist, gibt es nach Voraussetzung ein $f \in M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$ mit $f(s_0 x) \neq 0$, und $f(x) \notin T_S(R)$ bedeutet $f_S(\frac{x}{s}) \neq 0$.

(b) Wird M_S als R_S-Modul durch $\frac{x_1}{1}, \ldots, \frac{x_n}{1}$ erzeugt, folgt für den endlich erzeugten Untermodul $U = \sum_{i=1}^n Rx_i$ von M, daß $(M/U)_S = 0$ ist. Mit $T_S(R) = \mathrm{Ann}_R(s_0)$ wie in (a) gilt jetzt für jedes $f \in (M/U)^*$, daß $\mathrm{Bild}(f) \subset T_S(R)$, also $s_0 \cdot \mathrm{Bild}(f) = 0$ ist. Insgesamt erhält man $s_0 \cdot (M/U)^* = 0$, so daß in der exakten Folge

$$0 \longrightarrow (M/U)^* \xrightarrow{\nu^*} M^* \longrightarrow U^*$$

$A = \mathrm{Bild}(\nu^*)$ ein Untermodul von M^* ist mit $s_0 A = 0$ und M^*/A endlich erzeugt. In der exakten Folge

$$0 \longrightarrow (M^*/A)^* \longrightarrow M^{**} \longrightarrow A^*$$

ist dann das erste Glied endlich erzeugt und das dritte durch s_0 annulliert, insbesondere $s_0 \cdot M^{**}$ endlich erzeugt. Weil M torsionslos war, ist die kanonische Abbildung $M \to M^{**}$ injektiv, also auch $s_0 M$ endlich erzeugt wie behauptet.

(c) Sei zunächst $M/\mathfrak{a}M$ beliebig. Nach dem Krullschen Durchschnittssatz gibt es ein $a_0 \in \mathfrak{a}$ mit $\bigcap_{i=1}^\infty \mathfrak{a}^i = \mathrm{Ann}_R(1 - a_0)$, und daraus folgt, weil M torsionslos ist

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{a}^i M = \mathrm{Ann}_M(1 - a_0).$$

Klar ist "$\supset$", und hätte man bei "$\subset$" ein $x \in \bigcap_{i=1}^\infty \mathfrak{a}^i M$ mit $(1-a_0)x \neq 0$, gäbe es ein $f \in M^*$ mit $f((1-a_0)x) \neq 0$, d.h. $(1-a_0) \cdot f(x) \neq 0$, $f(x) \notin \bigcap_{i=1}^\infty \mathfrak{a}^i$, und das ist unmöglich.

Sei jetzt zusätzlich $M/\mathfrak{a}M$ endlich erzeugt, d.h. $U + \mathfrak{a}M = M$ mit einem endlich erzeugten Untermodul U von M. Weil dann M/U $\mathfrak{a}$-teilbar ist, gilt für jedes $f \in (M/U)^*$, daß $\mathrm{Bild}(f) \subset \bigcap_{i=1}^\infty \mathfrak{a}^i$, also $(1 - a_0) \cdot \mathrm{Bild}(f) = 0$ ist. Insgesamt erhält man $(1 - a_0) \cdot (M/U)^* = 0$, so daß wie in Teil (b) $(1 - a_0) \cdot M^{**}$, ja sogar $(1 - a_0) \cdot M \cong M/\mathrm{Ann}_M(1 - a_0)$ endlich erzeugt ist, und das ist nach oben gerade $M/\bigcap_{i=1}^\infty \mathfrak{a}^i M$.

Folgerung 1.2. *Sei M ein torsionsloser R-Modul und* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$. *Genau dann ist $M_\mathfrak{m}$ als $R_\mathfrak{m}$-Modul endlich erzeugt, wenn $M/\mathfrak{m}M$ endlich erzeugt ist.*

BEWEIS. "$\Rightarrow$" gilt für jeden R-Modul, und bei "$\Leftarrow$" ist nach Teil (a) auch $M_{\mathfrak{m}}$ als $R_{\mathfrak{m}}$-Modul torsionslos, insbesondere (als Untermodul von $(R_{\mathfrak{m}})^I$) in der $\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$-adischen Topologie separiert. Nach Teil (c) ist daher nur noch zu zeigen, daß $M_{\mathfrak{m}}/\operatorname{Ra}(M_{\mathfrak{m}})$ endlich erzeugt ist, und das ist die Voraussetzung.

SATZ 1.3. *Ist M ein torsionsloser R-Modul, so gilt*

$$\operatorname{Att}(M) = V(\operatorname{Ann}_R(M)).$$

BEWEIS. *1. Schritt*. Ist M ein Modul mit Primärzerlegung und S eine multiplikative Teilmenge von R, so gibt es ein $s_0 \in S$ mit

$$T_S(M) = \operatorname{Ann}_M(s_0).$$

Es genügt offenbar zu zeigen, daß $T_S(M) = \operatorname{Kern}(M \to M_S)$ durch ein solches s_0 annulliert wird, und dazu sei o.B.d.A. M $\mathfrak{p}$-primär: Falls $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, ist sogar $T_S(M) = 0$; falls $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$, folgt wegen $\mathfrak{p}^n M = 0$ mit irgendeinem $s \in \mathfrak{p} \cap S$ und $s_0 = s^n$, daß $s_0 M = 0$ ist.

2. Schritt. Für jeden R-Modul M gilt $\operatorname{Att}(M) \subset V(\operatorname{Ann}_R(M))$. Zur Umkehrung sei jetzt M torsionslos und $\operatorname{Ann}_R(M) \subset \mathfrak{p}$. Der erste Schritt liefert $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$, und weil $M_{\mathfrak{p}}$ nach Lemma 1.1(a) als $R_{\mathfrak{p}}$-Modul wieder torsionslos, also insbesondere separiert ist, muß $M_{\mathfrak{p}} \neq \operatorname{Ra}(M_{\mathfrak{p}})$ sein, so daß $M/\mathfrak{p}M$ als $R/\mathfrak{p}$-Modul nicht torsion ist. Damit ist $M/\mathfrak{p}M$ als $R/\mathfrak{p}$-Modul treu, d.h. $\operatorname{Ann}_R(M/\mathfrak{p}M) = \mathfrak{p}$.

LEMMA 1.4. *Für einen torsionslosen R-Modul M sind äquivalent:*

(i) *M ist endlich erzeugt.*

(ii) *M ist lokal endlich erzeugt, d.h. für jedes $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ ist $M_{\mathfrak{m}}$ als $R_{\mathfrak{m}}$-Modul endlich erzeugt.*

(iii) *Für jedes $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}(M)$ ist $M_{\mathfrak{q}}$ als $R_{\mathfrak{q}}$-Modul endlich erzeugt.*

(iv) *M hat endliche Goldie-Dimension.*

BEWEIS. (i) $\Rightarrow$ (ii) ist klar, ebenso (ii) $\Rightarrow$ (iii), denn da folgt für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ mit irgendeinem $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$, daß nach Voraussetzung $M_{\mathfrak{m}}$ als $R_{\mathfrak{m}}$-Modul endlich erzeugt ist, also auch $M_{\mathfrak{p}}$ als $R_{\mathfrak{p}}$-Modul.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Induktion über $|\operatorname{Ass}(M)|$: Bei $M = 0$ ist nichts zu zeigen. Bei $M \neq 0$ wähle man irgendein $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}(M)$, und nach Voraussetzung ist dann $M_{\mathfrak{q}}$ als $R_{\mathfrak{q}}$-Modul endlich erzeugt, also nach Lemma 1.1(b) $s_0 M$ endlich erzeugt für ein $s_0 \in R \setminus \mathfrak{q}$. Weil $M_0 = \operatorname{Ann}_M(s_0)$ wieder torsionslos ist und die Bedingung (iii) erfüllt, außerdem $\operatorname{Ass}(M_0) \subsetneq \operatorname{Ass}(M)$ ist (wegen $\mathfrak{q} \notin \operatorname{Ass}(M_0)$), ist nach Induktion M_0 endlich erzeugt, also auch M.

(i) $\Rightarrow$ (iv) ist klar, und (iv) $\Rightarrow$ (i) beweisen wir wieder durch Induktion über $|\operatorname{Ass}(M)|$: Bei $M \neq 0$ wähle man ein *minimales* Element $\mathfrak{q}$ von $\operatorname{Ass}(M)$. Dann ist $\operatorname{Ass}_{R_\mathfrak{q}}(M_\mathfrak{q}) = \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}\}$, d.h. $M_\mathfrak{q}$ ist als $R_\mathfrak{q}$-Modul halbartinsch, außerdem von endlicher Goldie-Dimension, also sogar artinsch. Als torsionsloser $R_\mathfrak{q}$-Modul ist jetzt $M_\mathfrak{q}$ sogar von endlicher Länge, nach Lemma 1.1(b) also s_0M endlich erzeugt für ein $s_0 \in R \setminus \mathfrak{q}$, und wie im letzten Beweisschritt ist dann nach Induktion $M_0 = \operatorname{Ann}_M(s_0)$ endlich erzeugt, also auch M.

SATZ 1.5. *Sei M ein torsionsloser R-Modul und* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Max}(R)$. *Dann gilt:*

$$\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M) \Longleftrightarrow M_\mathfrak{p} \textit{ ist als } R_\mathfrak{p}\textit{-Modul nicht endlich erzeugt.}$$

BEWEIS. "$\Rightarrow$" Wäre $M_\mathfrak{p}$ als $R_\mathfrak{p}$-Modul endlich erzeugt, gäbe es nach Lemma 1.1(b) ein $s_0 \in R \setminus \mathfrak{p}$ mit s_0M endlich erzeugt. Aus $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Koass}(M/s_0M)$ folgte $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(s_0M)$, also der Widerspruch $\mathfrak{p} \in \operatorname{Max}(R)$.

"$\Leftarrow$" Nach Lemma 1.1(c) ist dann nicht einmal $M_\mathfrak{p}/\operatorname{Ra}(M_\mathfrak{p})$ endlich erzeugt, d.h. wegen

$$\kappa(\mathfrak{p}) \bigotimes_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \cong \kappa(\mathfrak{p}) \bigotimes_{R/\mathfrak{p}} M/\mathfrak{p}M$$

der torsionsfreie Rang des $R/\mathfrak{p}$-Moduls $M/\mathfrak{p}M$ unendlich. Aus $0 \in \operatorname{Koass}_{R/\mathfrak{p}}((R/\mathfrak{p})^{(\mathsf{N})})$ folgt deshalb $0 \in \operatorname{Koass}_{R/\mathfrak{p}}(M/\mathfrak{p}M)$, d.h. $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}_R(M/\mathfrak{p}M) \subset \operatorname{Koass}_R(M)$ wie behauptet.

FOLGERUNG 1.6. *Sei M ein torsionsloser R-Modul und* $I = \bigcap\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}(M) \mid M_\mathfrak{q}$ *ist als $R_\mathfrak{q}$-Modul nicht endlich erzeugt*$\}$. *Dann gilt*

$$\operatorname{Koass}(M) = \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R) \mid \operatorname{Ann}_R(M) \subset \mathfrak{m}\} \cup V(I).$$

BEWEIS. "$\subset$". Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M)$, $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Max}(R)$. Nach Satz 1.5 ist dann $M_\mathfrak{p}$ als $R_\mathfrak{p}$-Modul nicht endlich erzeugt, so daß es nach Lemma 1.4(iii) mindestens ein $Q \in \operatorname{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ gibt derart, daß $(M_\mathfrak{p})_Q$ als $(R_\mathfrak{p})_Q$-Modul nicht endlich erzeugt ist. Q ist von der Form $\mathfrak{q}R_\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, es folgt $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}(M)$ und $M_\mathfrak{q}$ als $R_\mathfrak{q}$-Modul nicht endlich erzeugt, damit $I \subset \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p} \in V(I)$,

"$\supset$". Aus $\operatorname{Ann}_R(M) \subset \mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ folgt nach Satz 1.3 $\mathfrak{m} \in \operatorname{Att}(M)$, d.h. schon $\mathfrak{m} \in \operatorname{Koass}(M)$. Aus $I \subset \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ folgt $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ für ein $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}(M)$, $M_\mathfrak{q}$ als $R_\mathfrak{q}$-Modul nicht endlich erzeugt. Falls $\mathfrak{p} \in \operatorname{Max}(R)$, folgt wie eben $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M)$; falls $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Max}(R)$, folgt nach Satz 1.5 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M)$.

FOLGERUNG 1.7. *Für jeden torsionslosen R-Modul M gilt:*

(a) *Ist* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M)$, *so folgt* $V(\mathfrak{p}) \subset \operatorname{Koass}(M)$.

(b) *Ist U ein Untermodul von M, so folgt* $\operatorname{Koass}(U) \subset \operatorname{Koass}(M)$.

BEWEIS. (a) folgt unmittelbar aus der Formel für $\operatorname{Koass}(M)$ in Folgerung 1.6. Bei (b) gibt es zu jedem $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(U)$ bekanntlich ein $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{Koass}(M)$ mit $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}$, und mit (a) folgt $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M)$.

Ein R-Modul M heißt *koatomar*, wenn jeder von M verschiedene Untermodul in einem maximalen Untermodul von M enthalten ist, und das ist äquivalent mit $\operatorname{Koass}(M) \subset \operatorname{Max}(R)$. M heißt *kotorsion* [10], wenn jeder artinsche Faktormodul M/U durch einen Nichtnullteiler $r \in R$ annulliert wird, d.h. wenn jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M)$ regulär ist. Beide Modulklassen lassen sich, wenn M zusätzlich torsionslos ist, mit Hilfe von Lemma 1.4 und Satz 1.5 sehr gut beschreiben:

SATZ 1.8. *Ist M ein torsionsloser R-Modul, so gilt:*

(a) *Genau dann ist M koatomar, wenn $M/L(M)$ endlich erzeugt ist.*

(b) *Genau dann ist M kotorsion, wenn M endlich erzeugt ist und wenn für jedes* $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ *gilt: Ist $\mathfrak{m}$ nicht regulär, so ist $M/\mathfrak{m}M = 0$.*

BEWEIS. *Vorbemerkung*. Für jeden R-Modul M heißt $L(M) = \{x \in M \mid R/\operatorname{Ann}_R(x) \text{ ist artinsch}\}$ der *Loewy-Untermodul* von M. Er ist der größte halbartinsche Untermodul von M, und für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \setminus \operatorname{Max}(R)$ ist $L(M)_\mathfrak{p} = 0$. Ist F ein flacher R-Modul, gilt $L(F) = L(R) \cdot F$, mit $\mathfrak{b} = \operatorname{Ann}_R(L(R))$ also $\mathfrak{b} \cdot L(F) = 0$. Für jeden Untermodul $M \subset F$ gilt dann ebenfalls $\mathfrak{b} \cdot L(M) = 0$, d.h. $L(M) \subset \operatorname{Ann}_M(\mathfrak{b})$, und weil $R/\mathfrak{b}$ artinsch, also $\operatorname{Ann}_M(\mathfrak{b})$ als $R/\mathfrak{b}$-Modul halbartinsch ist, gilt in der letzten Inklusion Gleichheit. Wir haben gezeigt: Ist M Untermodul eines flachen R-Moduls, so gilt

$$L(M) = \operatorname{Ann}_M(\mathfrak{b}).$$

(a) Sei ab jetzt M torsionslos. Dann erhält man aus der letzten Formel einen Monomorphismus $M/L(M) \hookrightarrow M^k$, so daß auch $M/L(M)$ torsionslos ist. Mit Satz 1.5 ist jetzt M genau dann koatomar, wenn für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \setminus \operatorname{Max}(R)$ der $R_\mathfrak{p}$-Modul $M_\mathfrak{p} \cong (M/L(M))_\mathfrak{p}$ endlich erzeugt ist, d.h. aber nach Lemma 1.4(iii), wenn $M/L(M)$ endlich erzeugt ist.

(b) "$\Rightarrow$" Jedes $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ mit $M/\mathfrak{m}M \neq 0$ ist koassoziiert zu M, also nach Voraussetzung regulär. Angenommen, M ist nicht endlich erzeugt, so gibt es nach Lemma 1.4(iii) ein $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}(M)$ derart, daß $M_\mathfrak{q}$ als $R_\mathfrak{q}$-Modul nicht endlich erzeugt ist. Nach Folgerung 1.6 ist dann $\mathfrak{q} \in \operatorname{Koass}(M)$, $\mathfrak{q}$ regulär im Widerspruch zu $\operatorname{Ass}(M) \subset \operatorname{Ass}(R)$.

"$\Leftarrow$" Jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Koass}(M)$ ist wegen der ersten Bedingung aus $\operatorname{Max}(R)$, also wegen der zweiten regulär.

2. Torsionslose kosinguläre Moduln

Ist M ein torsionsloser R-Modul und $M \subset X$ eine injektive Hülle, so erlaubt die genauere Kenntnis von Koass(M), Aussagen über die Lage von M in X zu machen: Wann M klein in X ist (Satz 2.3), wann M ein (schwaches) Komplement in X hat (Satz 2.6) oder wann M koabgeschlossen in X ist (siehe Abschnitt 4). Ein R-Modul M heißt *klein*, wenn er in seiner injektiven Hülle klein ist. M heißt *kosingulär* [10], wenn für jeden artinschen Faktormodul M/U gilt, daß $\mathrm{Ann}_R(M/U)$ groß in R ist. Das ist eine Abschwächung des Begriffes "kotorsion": Im Unterschied zu Satz 1.8(b) ist jetzt nur mehr $M/Z(M)$ endlich erzeugt, wobei $Z(M) = \{x \in M \mid \mathrm{Ann}_R(x) \text{ ist groß in } R\}$ der (erste) *singuläre Untermodul* von M sei. Der zweite singuläre Untermodul $Z_2(M)$ wird durch $Z_2(M)/Z(M) = Z(M/Z(M))$ definiert (siehe [1, p. 37]).

LEMMA 2.1. *Ist M ein kleiner R-Modul, so hat $M/Z_2(M)$ endliche Goldie-Dimension.*

BEWEIS. Wir zeigen im *1. Schritt* für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von R: Ist $M = (R/\mathfrak{a})^{(\mathbb{N})}$ ein kleiner R-Modul, so ist $\mathfrak{a}$ groß in R (vgl. [11, Satz 2.9]). Ist nämlich $(R, \mathfrak{m})$ lokal und E die injektive Hülle von $R/\mathfrak{m}$, so ist $E[\mathfrak{a}] = \mathrm{Ann}_E(\mathfrak{a})$ abzählbar erzeugt, es gibt einen Epimorphismus $M \twoheadrightarrow E[\mathfrak{a}]$, so daß auch $E[\mathfrak{a}]$ ein kleiner R-Modul ist, ja sogar $E[\mathfrak{a}]$ klein in E. Damit ist $\mathfrak{a}$ groß in R: Aus $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = 0$ folgt $E[\mathfrak{b}] + E[\mathfrak{a}] = E$, $E[\mathfrak{b}] = E$, $\mathfrak{b} = 0$. Im nichtlokalen Fall gilt aber für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, daß $M_{\mathfrak{m}} \cong (R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{a}R_{\mathfrak{m}})^{(\mathbb{N})}$ als $R_{\mathfrak{m}}$-Modul klein ist, also nach eben $\mathfrak{a}R_{\mathfrak{m}}$ ein großes Ideal im Ring $R_{\mathfrak{m}}$. Damit ist jetzt auch $\mathfrak{a}$ groß in R.

Sei im *2. Schritt* M ein beliebiger kleiner R-Modul. Wegen $Z(M/Z_2(M)) = 0$ können wir gleich $Z(M) = 0$ annehmen, so daß jedes $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(M)$ nicht groß in R ist. Wählt man einen großen Untermodul U von M mit $U \cong \coprod_{\lambda \in \Lambda} R/\mathfrak{p}_\lambda$, so ist die Menge $\{\mathfrak{p}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ als Teilmenge von $\mathrm{Min}(R)$ endlich, und in $U \cong (R/\mathfrak{q}_1)^{(I_1)} \times \cdots \times (R/\mathfrak{q}_m)^{(I_m)}$ müssen nach dem 1. Schritt alle I_i endlich sein. Damit ist U endlich erzeugt und M von endlicher Goldie-Dimension.

BEMERKUNG 2.2. Für jeden kleinen R-Modul M hat der Faktormodul $M/Z_2(M)$ noch zwei weitere bemerkenswerte Eigenschaften: Er besitzt keine radikalvollen Untermoduln und ist sockelfrei. Zum Beweis können wir wie oben $Z(M) = 0$ annehmen: Hätte M einen Untermodul $A \neq 0$ mit $\mathrm{Ra}(A) = A$, folgte mit irgendeinem $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(A)$ nach [8, Folgerung 1.5], daß $R_{\mathfrak{q}}$ kein Körper, d.h. $\mathfrak{q}$ groß in R wäre, und das ist unmöglich. Hätte M einen einfachen Untermodul $B \cong R/\mathfrak{m}$, folgte nach [10, Bemerkung 4.8,c] $\mathrm{So}(R) \subset \mathrm{Ann}_R(B) = \mathfrak{m}$, d.h. $\mathfrak{m}$ groß in R, und das ist unmöglich.

SATZ 2.3. *Für einen torsionslosen R-Modul M sind äquivalent:*

(i) *M ist kosingulär.*

(ii) *M ist klein.*

(iii) *$M/Z(M)$ ist endlich erzeugt und* $\mathrm{So}(R) \cdot M = 0$.

BEWEIS. *Vorbemerkung*. Ist N das Nilradikal von R, so wird in jedem R-Modul M der Untermodul NM durch das große Ideal $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}_R(N)$ annulliert und es folgt $NM \subset Z(M)$. Ist F ein flacher R-Modul, gilt sogar $Z(F) = NF$, daraus folgt $Z(F) = \mathrm{Ann}_F(\mathfrak{a})$, und durch Schneiden mit allen Untermoduln von F erhält man: Ist M Untermodul eines flachen R-Moduls, so gilt

$$Z(M) = \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a}).$$

Damit ist (iii) $\Rightarrow$ (i) klar, denn aus der ersten Bedingung folgt $M = U + Z(M)$ mit U endlich erzeugt, aus der zweiten $\mathrm{So}(R) \cdot U = 0$. Nach [10, Beispiel 4.4] ist deshalb U kosingulär, nach der Vorbemerkung aber, weil M torsionslos ist, auch $Z(M)$ kosingulär, also auch M.

Weil (i) $\Rightarrow$ (ii) für beliebige R-Moduln gilt [10, Satz 4.7], bleibt für jeden torsionslosen R-Modul M (ii) $\Rightarrow$ (iii) zu zeigen. $\mathrm{So}(R) \subset \mathrm{Ann}_R(M)$ ist wieder klar nach [10, Bemerkung 4.8,c].

1. Schritt. $M/Z(M)$ ist als R/N-Modul torsionslos und klein. Die erste Aussage erhält man mit $M \subset B \cong R^I$, denn aus $Z(M) = M \cap Z(B) = M \cap NB$ folgt, daß $M/Z(M)$ ein Untermodul von $B/NB \cong (R/N)^I$ ist. Die zweite erhält man mit einer injektiven Erweiterung $M \subset X$, denn aus M R-klein in X folgt, daß $M/Z(M)$ R-klein in $X/Z(X)$ ist, und weil $X/Z(X)$ durch N annulliert wird, gilt diese Kleinheit auch über R/N.

2. Schritt. Weil der Ring R/N keine nilpotenten Elemente hat, ist in jedem torsionslosen R/N-Modul der singuläre Untermodul Null. Nach Lemma 2.1 ist deshalb $M/Z(M)$ von endlicher Goldie-Dimension, also nach Lemma 1.4 sogar endlich erzeugt.

Die beiden Aussagen der nächsten Folgerung wurden für projektive Moduln in [11, Folgerung 3.11] bzw. [5, p. 205] gezeigt:

FOLGERUNG 2.4. *Sei M ein torsionsloser flacher R-Modul und U ein Untermodul von M. Dann gilt:*

(a) *Genau dann ist M kosingulär, wenn M endlich erzeugt und sockelfrei ist.*

(b) *Genau dann ist U klein in M, wenn $U/Z(U)$ endlich erzeugt und $U \subset$* $\mathrm{Ra}(M)$ *ist.*

BEWEIS. (a) Für jeden flachen R-Modul M ist $Z(M) = NM$ klein in M und $\mathrm{So}(M) = \mathrm{So}(R) \cdot M$. Damit ist (a) eine Umformulierung von Satz 2.3(iii).

(b) Bei "$\Rightarrow$" genügt es, daß M torsionslos ist, denn dann ist wieder nach (iii) $U/Z(U)$ endlich erzeugt, und die zweite Aussage ist klar.

Bei "$\Leftarrow$" genügt es, daß M flach ist, denn dann ist $Z(U)$ klein in M, in $U = U_1 + Z(U)$, mit U_1 endlich erzeugt, aber nach der zweiten Voraussetzung $U_1 \subset \mathrm{Ra}(M)$, also U_1 klein in M, U klein in M wie behauptet.

Für einen beliebigen R-Modul M definieren wir $C(M) = \bigcap\{U \subset M \mid M/U$ ist kosingulär$\}$ und wollen nachprüfen, wann wenigstens $M/C(M)$ kosingulär ist. Nach den Beispielen (3.6) bis (3.8) in [11] gilt das unter gewissen Abschwächungen der Grothendieck-Bedingung $AB-5^*$. Für torsionslose Moduln werden wir in Satz 2.6 die genauen Bedingungen angeben, müssen aber zuerst $L(M/Z(M))$ und $Z(M/L(M))$ berechnen.

LEMMA 2.5. *Ist M Untermodul eines flachen R-Moduls, so gilt:*

(a) $L\left(\dfrac{M}{Z(M)}\right) = \dfrac{L(M) + Z(M)}{Z(M)}$.

(b) $Z\left(\dfrac{M}{L(M)}\right) = \dfrac{Z(M) + L(M)}{L(M)}$.

BEWEIS. (a) Es genügt, $L_{\mathfrak{m}}\left(\frac{M}{Z(M)}\right) \subset \frac{L_{\mathfrak{m}}(M)+Z(M)}{Z(M)}$ zu zeigen für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$.

1. Fall. $h(\mathfrak{m}) = 0$. Dann ist sogar der Funktor $L_{\mathfrak{m}}$ rechtsexakt, d.h. für jedes Modulpaar $A \subset B$ gilt $L_{\mathfrak{m}}(B/A) = (L_{\mathfrak{m}}(B) + A)/A$: Der kanonische Epimorphismus $B/L_{\mathfrak{m}}(B) \to B/L_{\mathfrak{m}}(B)+A$ zeigt, daß $\mathfrak{m}$ nicht zu $B/L_{\mathfrak{m}}(B)+A$ assoziiert sein kann (wegen $h(\mathfrak{m}) = 0$), also $\frac{B}{A}\Big/\frac{L_{\mathfrak{m}}(B)+A}{A}$ $\mathfrak{m}$-torsionsfrei ist, und daraus folgt $L_{\mathfrak{m}}\left(\frac{B}{A}\right) \subset \frac{L_{\mathfrak{m}}(B)+A}{A}$.

2. Fall. $h(\mathfrak{m}) \neq 0$. Dann ist, wegen der Voraussetzung an M, sogar $L_{\mathfrak{m}}\left(\frac{M}{Z(M)}\right) = 0$. Mit einer flachen Erweiterung $M \subset F$ ist $M/Z(M)$ ein Untermodul von $F/Z(F) = F/NF$, so daß es genügt, $L_{\mathfrak{m}}(F/NF) = 0$ zu zeigen: Wäre $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}(F/NF)$, folgte $\overline{\mathfrak{m}} \in \mathrm{Ass}_{\overline{R}}(F/NF)$ mit $\overline{R} = R/N$, also $\overline{\mathfrak{m}} \in \mathrm{Ass}_{\overline{R}}(\overline{R})$ (weil F/NF als $\overline{R}$-Modul flach ist), $\overline{\mathfrak{m}} \in \mathrm{Min}(\overline{R})$, $h_{\overline{R}}(\overline{\mathfrak{m}}) = 0$, $h_R(\mathfrak{m}) = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

(b) Mit $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}_R(N)$ und $\mathfrak{b} = \mathrm{Ann}_R(L(R))$ zeigten wir in den Vorbemerkungen zu Satz 1.8 bzw. Satz 2.3, daß $L(M) = \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{b})$ und $Z(M) = \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a})$ ist. Damit folgt auch

$$L(M) + Z(M) = \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}),$$

denn "$\subset$" ist klar, und bei "$\supset$" gilt für jedes $x \in \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$, daß $\mathfrak{b}x \subset \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a}) = Z(M)$ ist, also $\overline{x} \in L(M/Z(M))$, $x \in L(M) + Z(M)$ nach Teil (a) wie behauptet.

Bleibt in $\frac{Z(M)+L(M)}{L(M)} \subset Z\left(\frac{M}{L(M)}\right)$ die Gleichheit zu zeigen: Aus $\tilde{x} \in Z\left(\frac{M}{L(M)}\right)$ folgt, weil auch $\frac{M}{L(M)}$ Untermodul eines flachen R-Moduls ist, $\mathfrak{a}x \subset L(M)$, daraus $\mathfrak{a}\mathfrak{b}x = 0$, $x \in \mathrm{Ann}_M(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$, also nach der Vorbemerkung $x \in L(M) + Z(M)$.

SATZ 2.6. *Für einen torsionslosen R-Modul M sind äquivalent:*

(i) *$M/C(M)$ ist kosingulär.*

(ii) *$M/Z(M)$ ist koatomar.*

(iii) *M besitzt in seiner injektiven Hülle ein schwaches Komplement.*

BEWEIS. (i) $\Rightarrow$ (ii). In jedem torsionslosen R-Modul M ist $C(M)$ *halbeinfach*, denn mit $M \subset B \cong R^I$ folgt $C(M) \subset C(B) \cong C(R^I)$, und weil C nach [11, Folgerung 1.2] mit direkten Produkten vertauscht sowie $C(R) = \mathrm{So}(R)$ ist, ist $C(R^I) = \mathrm{So}(R) \cdot R^I$ halbeinfach, also auch $C(M)$. Wegen $C(M) \subset L(M)$ folgt jetzt aus (i), daß $M/L(M)$ kosingulär, also nach Satz 2.3 und Lemma 2.5(b) $M/(L(M) + Z(M))$ endlich erzeugt ist und deshalb $M/Z(M)$ koatomar.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Jetzt folgt nach Satz 1.8(a) und Lemma 2.5(a), daß $M/(L(M) + Z(M))$ endlich erzeugt ist, also $M = U + L(M) + Z(M)$ mit U endlich erzeugt. Mit $\overline{M} = M/C(M)$ und $U_1 = U + L(M)$ sind dann in der Darstellung $\overline{M} = \overline{U}_1 + \overline{Z(M)}$ beide Summanden kosingulär (also auch $\overline{M}$): Der erste ist koatomar mit $\mathrm{So}(R) \cdot \overline{U}_1 = 0$, also nach [10, Beispiel 4.4] kosingulär, der zweite wird sogar durch das große Ideal $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}_R(N)$ annulliert.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Allgemeiner gilt für jede injektive Erweiterung $M \subset X$, daß *M genügend viele Komplemente* in X hat, d.h. zu $Y + M = X$ die Menge $\{W \subset Y \mid W + M = X\}$ ein minimales Element W_0 besitzt:

1. Schritt. Aus $Y + M = X$ folgt mit $\mathfrak{b} = \mathrm{Ann}_R(L(R))$ stets $\mathfrak{b}X \subset Y$. Zum Beweis wähle man wie in (ii) $\Rightarrow$ (i) einen koatomaren Untermodul U_1 von M mit $M = U_1 + Z(M)$, und weil $Z(M)$ als kosingulärer Modul klein in X ist, folgt $Y + U_1 = X$. Wegen der Injektivität von X ist aber $\mathfrak{b}X = \mathrm{Ann}_X(\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{b})) = \mathrm{Ann}_X(L(R))$ radikalvoll, also $\mathfrak{b} \cdot (X/Y)$ sowohl koatomar als auch radikalvoll, d.h. Null.

2. Schritt. Zu $Y + M = X$ hat man jetzt, weil $\overline{X} = X/\mathfrak{b}X$ über dem artinschen Ring $R/\mathfrak{b}$ supplementiert ist, einen Zwischenmodul $\mathfrak{b}X \subset W_0 \subset Y$, sodaß $\overline{W}_0$ ein Komplement von $\overline{M}$ in $\overline{X}$ ist. Wir behaupten, daß dann schon W_0 ein Komplement von M in X ist: Klar ist $W_0 + M = X$, und aus $W_1 \subset W_0$, $W_1 + M = X$ folgt nach dem 1. Schritt $\mathfrak{b}X \subset W_1$, aus $\overline{W}_1 = \overline{W}_0$ also sogar $W_1 = W_0$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Sei $M \subset X$ eine injektive Hülle von M und W ein schwaches Komplement von M in X, d.h. $W + M = X$ und $W \cap M$ klein in X. Weil auch $V = W \cap M$ torsionslos, also nach Satz 2.3 $V/Z(V) = V/\mathrm{Ann}_V(\mathfrak{a})$

endlich erzeugt ist, gilt das auch für $\mathfrak{a} \cdot V$ und $\mathfrak{a} \cdot V^*$. Wie im 1. Schritt oben wird jeder koatomare Faktormodul von X durch $\mathfrak{b}$ annulliert, das gilt auch für $X/W \cong M/V$, so daß $\mathfrak{b} \cdot (M/V)^* = 0$ ist. In der exakten Folge

$$0 \longrightarrow (M/V)^* \xrightarrow{\nu^*} M^* \longrightarrow V^*$$

ist deshalb $B = \mathrm{Bild}(\nu^*)$ ein Untermodul von M^* mit $\mathfrak{b} \cdot B = 0$ und $\mathfrak{a} \cdot (M^*/B)$ endlich erzeugt. Aus der exakten Folge

$$0 \longrightarrow (M^*/B)^* \longrightarrow M^{**} \longrightarrow B^*$$

erhält man jetzt, weil auch $\mathfrak{a} \cdot (M^*/B)^*$ endlich erzeugt und $\mathfrak{b} \cdot B^* = 0$ ist, daß $\mathfrak{ab} \cdot M^{**}$ endlich erzeugt ist, also auch $\mathfrak{ab} \cdot M$. Damit ist auch $M/\operatorname{Ann}_M(\mathfrak{ab}) = M/(L(M) + Z(M))$ endlich erzeugt und deshalb $M/Z(M)$ koatomar.

3. Die koassoziierten Primideale eines torsionslosen flachen Moduls

Ist ein torsionsloser R-Modul M zusätzlich flach und $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, kann man nach Folgerung 3.3 allein an der Dimension von $M/\mathfrak{m}M$ ablesen, wann ein Primideal $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$ zu M koassoziiert ist. Damit können wir in Satz 3.7 entscheiden, wann $\mathrm{Koass}(M) \cap \mathrm{Max}(R) \subset \mathrm{Ass}(R)$ ist und was das für die Lage von M in seiner injektiven Hülle X bedeutet.

LEMMA 3.1. *Sei M ein flacher R-Modul und $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, so daß $M/\mathfrak{m}M$ nicht endlich erzeugt ist. Dann ist jedes Primideal $\mathfrak{p}$, mit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$, koassoziiert zu M.*

BEWEIS. $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ ist klar. Bei $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$ ist $M/\mathfrak{p}M$ als $R/\mathfrak{p}$-Modul wieder flach, insbesondere sockelfrei, so daß $M/\mathfrak{p}M$ auch als R-Modul sockelfrei ist. Bekanntlich ist jeder koatomare sockelfreie Modul lokal endlich erzeugt, und weil nach Voraussetzung $(M/\mathfrak{p}M)/\mathfrak{m} \cdot (M/\mathfrak{p}M) \cong M/\mathfrak{m}M$ als $R_\mathfrak{m}$-Modul nicht endlich erzeugt ist, kann $(M/\mathfrak{p}M)_\mathfrak{m}$ als $R_\mathfrak{m}$-Modul nicht endlich erzeugt, also $M/\mathfrak{p}M$ als R-Modul nicht koatomar sein. Nach [8, Satz 2.1] ist deshalb $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(M)$.

BEMERKUNG 3.2. Falls $M/\mathfrak{m}M$ endlich erzeugt ist, gibt es keine solche Aussage: Zu jedem $n \geq 2$ konstruiert Rotthaus in [3, p. 288] einen regulären lokalen Ring $(R, \mathfrak{m})$ der Krull-Dimension n, so daß für alle Primideale $\mathfrak{p} \neq 0$ der Ring $R/\mathfrak{p}$ vollständig ist, R selbst aber nicht vollständig ist. Nach [8, Beispiel 2.4] bedeutet das $\mathrm{Koass}_R(\hat{R}) = \{0, \mathfrak{m}\}$.

FOLGERUNG 3.3. *Sei M ein torsionsloser flacher R-Modul und $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$, $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$. Dann gilt:*

$$\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(M) \Longleftrightarrow M/\mathfrak{m}M \textit{ ist nicht endlich erzeugt.}$$

BEWEIS. Bei "$\Rightarrow$" genügt es, daß M torsionslos ist, denn dann ist nach Satz 1.5 $M_\mathfrak{p}$ als $R_\mathfrak{p}$-Modul nicht endlich erzeugt, also auch nicht $M_\mathfrak{m}$ als $R_\mathfrak{m}$-Modul, so daß Folgerung 1.2 die Behauptung liefert.

Bei "$\Leftarrow$" genügt es, daß M flach ist, denn dann folgt aus der rechten Seite mit Lemma 3.1 sofort $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(M)$.

BEMERKUNG 3.4. Ohne Voraussetzungen an M gilt keine der Implikationen: Ist $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler, nicht vollständiger Integritätsring, so ist nach [8, Beispiel 2.4] $0 \in \mathrm{Koass}_R(\hat{R})$, aber $\hat{R}/\mathfrak{m}\hat{R} \cong R/\mathfrak{m}$ 1-dimensional. Ist andererseits $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring mit $\mathrm{Ass}(R) \neq \mathrm{Min}(R)$, so folgt mit zwei assoziierten Primidealen $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$, daß $M = (R/\mathfrak{p}) \times (R/\mathfrak{q})^{(\mathbb{N})}$ torsionslos und $M/\mathfrak{m}M \cong (R/\mathfrak{m})^{(\mathbb{N})}$ ist, wegen $\mathrm{Koass}(M) = V(\mathfrak{q})$ aber $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Koass}(M)$.

FOLGERUNG 3.5. *Ist M ein torsionsloser flacher R-Modul, so gilt:*

(a) *Genau dann ist M koatomar, wenn für jedes* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ *gilt: Ist* $\mathrm{Höhe}(\mathfrak{m}) \geq 1$, *so ist* $M/\mathfrak{m}M$ *endlich erzeugt.*

(b) *Genau dann ist* $\mathrm{Koass}(M) \setminus \mathrm{Max}(R)$ *endlich, wenn für jedes* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ *gilt: Ist* $\mathrm{Höhe}(\mathfrak{m}) \geq 2$, *so ist* $M/\mathfrak{m}M$ *endlich erzeugt.*

BEWEIS. Statt $\mathrm{Höhe}(\mathfrak{m}) = \dim(R_\mathfrak{m})$ schreiben wir $h(\mathfrak{m})$.

(a) "$\Rightarrow$" Aus $h(\mathfrak{m}) \geq 1$ folgt mit irgendeinem $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$, daß nach Voraussetzung $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Koass}(M)$, also nach Lemma 3.1 $M/\mathfrak{m}M$ endlich erzeugt ist.

"$\Leftarrow$" Für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ ist $M_\mathfrak{m}$ als $R_\mathfrak{m}$-Modul koatomar (damit fertig): Falls $h(\mathfrak{m}) = 0$, ist der Ring $R_\mathfrak{m}$ artinsch; falls $h(\mathfrak{m}) \geq 1$, ist nach Voraussetzung und Folgerung 1.2 $M_\mathfrak{m}$ endlich erzeugt.

(b) "$\Rightarrow$" Aus $h(\mathfrak{m}) \geq 2$ folgt, daß es unendlich viele Primideale $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{m}$ gibt ($i = 1, 2, 3, \ldots$). Die können nach Voraussetzung nicht alle koassoziiert zu M sein, und nach Lemma 3.1 muß deshalb $M/\mathfrak{m}M$ endlich erzeugt sein.

"$\Leftarrow$" Dann gilt sogar $\mathrm{Koass}(M) \setminus \mathrm{Max}(R) \subset \mathrm{Min}(R)$, denn für $\mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(M)$, $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ folgt nach Folgerung 3.3 $M/\mathfrak{m}M$ nicht endlich erzeugt, also nach Voraussetzung $h(\mathfrak{m}) = 1$, $h(\mathfrak{p}) = 0$.

Ein Untermodul U von M heiße *erblich* in M, wenn für jeden kleinen Untermodul Y von M gilt, daß auch $Y \cap U$ klein in U ist. Jeder koabgeschlossene Untermodul U von M ist erblich, und falls U ein schwaches Komplement hat, gilt die Umkehrung. Im allgemeinen gilt sie jedoch nicht: Ist R ein Integritätsring, kein Körper, aber $\mathrm{Ra}(R) = 0$, so ist jedes Ideal erblich in R, aber nur 0 und R sind koabgeschlossen in R. – In jedem R-Modul M gilt: Ist U erblich in M, so folgt $U \cap \mathrm{Ra}(M) = \mathrm{Ra}(U)$.

LEMMA 3.6. *Für einen R-Modul M sind äquivalent:*

(i) $\mathrm{Ann}_M(\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{m})) = \mathfrak{m}M$ *für alle* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$.

(ii) $\mathrm{Ann}_M(\mathrm{So}(R)) = \mathrm{Ra}(M)$.

Mit einer injektiven Erweiterung $M \subset X$ ist das weiter äquivalent mit

(iii) $M \cap \mathfrak{m}X = \mathfrak{m}M$ *für alle* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$.

(iv) $M \cap \mathrm{Ra}(X) = \mathrm{Ra}(M)$.

BEWEIS. Sei im *1. Schritt* $M \subset X$ eine beliebige Erweiterung, aber $M/M \cap \mathrm{Ra}(X)$ halbeinfach. Für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ gilt dann

$$M \cap \mathfrak{m}X = \mathfrak{m}M + M \cap \mathrm{Ra}(X),$$

denn in $\overline{X} = X/\mathrm{Ra}(X)$ ist nach Voraussetzung $\overline{M} = (M + \mathrm{Ra}(X))/\mathrm{Ra}(X)$ ein halbeinfacher Untermodul, also eine nach oben gefilterte Vereinigung von endlich erzeugten Untermoduln, die alle in $\overline{X}$ abspalten. Damit ist $\overline{M}$ rein in $\overline{X}$, und für jedes $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ folgt aus $\overline{M} \cap \mathfrak{m}\overline{X} = \mathfrak{m}\overline{M}$, d.h. $(M + \mathrm{Ra}(X)) \cap \mathfrak{m}X = \mathfrak{m}M + \mathrm{Ra}(X)$ durch Schneiden mit M die Behauptung.

Sei jetzt im *2. Schritt* X injektiv. Dann ist $X/\mathrm{Ra}(X)$ halbeinfach, also die Voraussetzung im 1. Schritt erfüllt und damit (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) bewiesen. Wegen der Injektivität gilt auch $\mathrm{Ra}(X) = \mathrm{Ann}_X(\mathrm{So}(R))$ und $\mathfrak{m}X = \mathrm{Ann}_X(\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{m}))$, also $M \cap \mathrm{Ra}(X) = \mathrm{Ann}_M(\mathrm{So}(R))$ und $M \cap \mathfrak{m}X = \mathrm{Ann}_M(\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{m}))$, und damit folgen die restlichen Äquivalenzen.

SATZ 3.7. *Für einen torsionslosen flachen R-Modul M sind äquivalent:*

(i) $\mathrm{Koass}(M) \cap \mathrm{Max}(R) \subset \mathrm{Ass}(R)$.

(ii) *Für jedes* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ *gilt: Ist* $\mathfrak{m}$ *regulär, so ist* $M/\mathfrak{m}M = 0$.

(iii) *M ist in jeder Erweiterung erblich.*

Ist M sogar projektiv, so ist das weiter äquivalent mit

(iv) *M ist in jeder flachen Erweiterung koabgeschlossen.*

BEWEIS. (i) ist äquivalent mit $(\mathrm{Max}(R) \setminus \mathrm{Ass}(R)) \cap \mathrm{Koass}(M) = \emptyset$, d.h. mit (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Es genügt zu zeigen, daß M in jeder injektiven Erweiterung X erblich ist.

1. Schritt. Für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ gilt $\mathrm{Ann}_M(\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{m})) = \mathfrak{m}M$. Ist nämlich $\mathfrak{m}$ regulär, folgt aus der Voraussetzung sogar $\mathfrak{m}M = M$. Ist aber $\mathfrak{m}$ nicht regulär, folgt $\mathrm{Ann}_R(\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{m})) = \mathfrak{m}$, und weil für jedes Ideal I von R in dem flachen R-Modul M gilt $\mathrm{Ann}_M(I) = \mathrm{Ann}_R(I) \cdot M$, folgt mit $I = \mathrm{Ann}_R(\mathfrak{m})$ die Behauptung.

2. Schritt. Nach Lemma 3.6 gilt jetzt $M \cap \mathrm{Ra}(X) = \mathrm{Ra}(M)$, und damit ist M erblich in X: $U \subset M$ und U klein in $X \Rightarrow U \subset \mathrm{Ra}(M)$ und nach Satz 2.3 $U/Z(U)$ endlich erzeugt $\Rightarrow U$ nach Folgerung 2.4(b) klein in M.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Mit irgendeiner injektiven Erweiterung $M \subset X$ gilt nach Voraussetzung $M \cap \mathrm{Ra}(X) = \mathrm{Ra}(M)$, nach Lemma 3.6 also $\mathrm{Ann}_M(\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{m})) = \mathfrak{m}M$ für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$. War $\mathfrak{m}$ regulär, ist die linke Seite gleich M.

Für (iv) $\Rightarrow$ (ii) genügt es, daß M flach ist. Mit der Menge S aller Nichtnullteiler von R ist dann auch $F = M_S$ als R-Modul flach, außerdem teilbar. Nach Voraussetzung ist aber M koabgeschlossen in F, insbesondere $\mathrm{Koass}(M) \subset \mathrm{Koass}(F)$, also auch M teilbar.

Für (ii) $\Rightarrow$ (iv) sei jetzt M projektiv und $M \subset F$ irgendeine flache Erweiterung. Nach [12, Lemma A.3] müssen wir zeigen, daß M rein in F ist.

1. Schritt. R ist lokal und $\mathrm{So}(R) \neq 0$. Dann ist M als freier R-Modul eine nach oben gefilterte Vereinigung von endlich erzeugten, freien Untermoduln U_i. Die sind, wegen $\mathrm{So}(R) \neq 0$, alle rein in F [12, Beispiel 1.1 und Lemma A.5], so daß auch $M = \bigcup U_i$ rein in F ist.

2. Schritt. R ist beliebig. Dann genügt es zu zeigen, daß $M_\mathfrak{m}$ $R_\mathfrak{m}$-rein in $F_\mathfrak{m}$ ist für alle $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$: Falls $\mathfrak{m}$ regulär ist, gilt nach Voraussetzung $\mathfrak{m}M = M$, also $M_\mathfrak{m} = 0$; falls $\mathfrak{m}$ nicht regulär ist, d.h. $\mathrm{So}(R_\mathfrak{m}) \neq 0$, gilt das nach dem 1. Schritt.

BEMERKUNG 3.8. Für jeden torsionslosen R-Modul M folgt aus der Bedingung (ii), daß M schon teilbar ist: Angenommen, es gibt einen Nichtnullteiler $r \in R$ mit $rM \neq M$, so folgt mit $r \in \mathfrak{p} \in \mathrm{Koass}(M)$ und $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ nach Satz 1.3 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Att}(M)$, d.h. $M/\mathfrak{m}M \neq 0$, wegen (ii) aber $M/\mathfrak{m}M = 0$.

Aus der Implikation (ii) $\Rightarrow$ (iv) des Satzes erhält man sofort:

FOLGERUNG 3.9. *Sei M ein projektiver teilbarer R-Modul. Dann gilt für jeden Monomorphismus $f : M \to M$, daß* $\mathrm{Bild}(f)$ *rein in M ist.*

Sei M wieder ein beliebiger R-Modul und $U \subset M$. Man sagt, *U ist ein Komplement* in M, wenn es einen Untermodul A von M gibt, so daß U ein Komplement von A in M ist. In diesem Fall ist U koabgeschlossen in M, aber die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht: Ist M projektiv, so stimmen die koabgeschlossenen Untermoduln in M mit den reinen überein [12, Lemma A.3], während jedes Komplement in M nach [5, p. 202] bereits direkter Summand ist. – In jedem R-Modul M gilt: Ist U ein Komplement in M und $U \subset M_1 \subset M$, so ist U auch ein Komplement in M_1.

FOLGERUNG 3.10. *Für einen torsionslosen flachen R-Modul M sind äquivalent:*

(i) $\mathrm{Koass}(M) \subset \mathrm{Ass}(R) \cap \mathrm{Max}(R)$.

(ii) *Für jedes $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ gilt: Ist $\mathfrak{m}$ regulär, so ist $M/\mathfrak{m}M = 0$; ist* $\mathrm{Höhe}(\mathfrak{m}) \geq 1$, *so ist $M/\mathfrak{m}M$ endlich erzeugt.*

(iii) *M ist in jeder Erweiterung ein Komplement.*

BEWEIS. (i) ist äquivalent mit $\mathrm{Koass}(M) \cap \mathrm{Max}(R) \subset \mathrm{Ass}(R)$ und $\mathrm{Koass}(M) \subset \mathrm{Max}(R)$, d.h. nach Satz 3.7 und Folgerung 3.5(a) äquivalent mit (ii).

(ii) ⇒ (iii) Es genügt zu zeigen, daß M in jeder injektiven Erweiterung X ein Komplement ist. Nach der zweiten Voraussetzung ist M koatomar (Folgerung 3.5(a)), hat also nach Satz 2.6 in X ein schwaches Komplement W, und weil M nach der ersten Voraussetzung erblich in X ist (Satz 3.7), ist $W \cap M$ sogar klein in M, also M ein Komplement von W in X.

(iii) ⇒ (ii) Sei X eine injektive Hülle von M und nach Voraussetzung M ein Komplement in X. Dann ist M erblich in X, also nach dem Beweis von Satz 3.7 die erste Bedingung in (ii) erfüllt. Nach Satz 2.6 ist auch $M/Z(M)$, ja sogar M koatomar (weil $Z(M) = NM$ klein in M ist), also wieder nach Folgerung 3.5(a) die zweite Bedingung in (ii) erfüllt.

4. Wann ist $\mathrm{Koass}(M) \subset \mathrm{Ass}(R)$?

Ist ein R-Modul M in jeder Erweiterung koabgeschlossen, d.h. im Sinne von [12] *schwach-injektiv*, so folgt $\mathrm{Koass}(M) \subset \mathrm{Ass}(R)$. Das Hauptergebnis dieses letzten Abschnitts lautet, daß für torsionslose flache R-Moduln die Umkehrung gilt (Satz 4.6). Dafür müssen wir zuerst den dualen Begriff des schwach-flachen Moduls einführen, für ihn einige Grundtatsachen beweisen und diese via Matlis-Dualität auf schwach-injektive Moduln übertragen.

Ein R-Modul M heiße *schwach-flach*, wenn für jeden Epimorphismus $f : X \twoheadrightarrow M$ gilt, daß $\mathrm{Kern}(f)$ abgeschlossen in X ist. Flache Moduln haben natürlich diese Eigenschaft (hier ist $\mathrm{Kern}(f)$ sogar rein in X), und für beliebige Moduln gibt es auf Grund des Zornschen Lemmas eine “interne” Charakterisierung:

LEMMA 4.1. *Für einen R-Modul M sind äquivalent:*

(i) *M ist schwach-flach.*

(ii) *Ist M/U ein singulärer Faktormodul von M, so ist U groß in M.*

BEWEIS. (i) ⇒ (ii) Sei $g : G \twoheadrightarrow M$ ein Epimorphismus mit einem freien R-Modul G. Nach Voraussetzung ist $K = \mathrm{Kern}(g)$ abgeschlossen in G, und dem Untermodul $U \subset M$ entspricht ein Zwischenmodul $K \subset H \subset G$, für den dann G/H singulär ist. Nach [1, Proposition 1.20] ist H groß in G, also auch (wegen der Abgeschlossenheit von K) H/K groß in G/K, d.h. U groß in M.

(ii) ⇒ (i) Sei $f : X \twoheadrightarrow M$ ein Epimorphismus. Um zu zeigen, daß $K = \mathrm{Kern}(f)$ abgeschlossen in X ist, wähle man ein Durchschnittskomplement Y von K in X, und dann ist $K \hookrightarrow X/Y$ ein wesentlicher Monomorphismus, also $X/(K \oplus Y) \cong \frac{X}{K}/\frac{K \oplus Y}{K}$ singulär. Nach Voraussetzung ist jetzt $\frac{K \oplus Y}{K}$ groß in $\frac{X}{K}$, also auch K ein Durchschnittskomplement von Y in X und deshalb abgeschlossen in X.

FOLGERUNG 4.2. *Ein injektiver R-Modul M ist genau dann schwach-flach, wenn* $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(R)$ *ist.*

BEWEIS. "$\Rightarrow$" gilt auch ohne Injektivität, denn mit einer freien Auflösung $g : G \twoheadrightarrow M$ ist nach Voraussetzung $K = \mathrm{Kern}(g)$ abgeschlossen in G, also $\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Ass}(G/K) \subset \mathrm{Ass}(G) \subset \mathrm{Ass}(R)$.

"$\Leftarrow$" Sei $U \subset M$ und M/U singulär. Wäre U nicht groß in M, hätte man $U \subset U_1 \subsetneq M$ mit U_1 abgeschlossen in M, also $M = U_1 \oplus V_1$ mit V_1 singulär $\neq 0$. V_1 enthält einen direkten Summanden der Form $E(R/\mathfrak{p})$, der ist wieder singulär, und deshalb $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ass}(R)$. Nach Voraussetzung folgt $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ass}(M)$, und das ist nicht wahr.

BEMERKUNG 4.3. Für jeden schwach-flachen R-Modul M gilt $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(R)$, und deshalb ist M torsionsfrei. Über einem Dedekindring ist also jeder schwach-flache Modul bereits flach.

LEMMA 4.4. *Ist* $(R, \mathfrak{m})$ *lokal und vollständig, so gilt:*

(a) *Ein R-Modul M ist genau dann schwach-injektiv, wenn sein Matlis-Duales* $M^\circ = \mathrm{Hom}_R(M, E(R/\mathfrak{m}))$ *schwach-flach ist.*

(b) *Ein flacher R-Modul M ist genau dann schwach-injektiv, wenn* $\mathrm{Koass}(M) \subset \mathrm{Ass}(R)$ *ist.*

BEWEIS. (a) Sei $M \subset X$ eine injektive Erweiterung. In der exakten Folge $0 \to (X/M)^\circ \to X^\circ \xrightarrow{i^\circ} M^\circ \to 0$ ist dann der Modul X° flach, also M° genau dann schwach-flach, wenn $\mathrm{Kern}(i^\circ) = \mathrm{Ann}_{X^\circ}(M)$ abgeschlossen in X° ist. Wegen der Vollständigkeit von R ist das äquivalent damit, daß M koabgeschlossen in X, d.h. M schwach-injektiv ist.

(b) Sei jetzt M ein flacher R-Modul. Dann ist M° injektiv, also M nach Teil (a) und Folgerung 4.2 genau dann schwach-injektiv, wenn $\mathrm{Ass}(M^\circ) \subset \mathrm{Ass}(R)$ ist. Wegen $\mathrm{Koass}(M) = \mathrm{Ass}(M^\circ)$ folgt die Behauptung.

FOLGERUNG 4.5. *Für den Ring R sind äquivalent:*

(i) $R^{(\mathsf{N})}$ *ist schwach-injektiv.*

(ii) *Jeder flache R-Modul ist schwach-injektiv.*

(iii) *Jeder injektive R-Modul ist schwach-flach.*

(iv) *Für jedes* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ *ist* $\mathrm{Ann}_R(\mathfrak{m}) \neq 0$ *und* $\mathrm{Höhe}(\mathfrak{m}) \leq 1$.

BEWEIS. (i)$\Rightarrow$(iv) Für jeden schwach-injektiven R-Modul M gilt nach [12, Lemma 1.7] $\mathrm{Koass}(M) \subset \mathrm{Ass}(R)$. Bei $M = R^{(\mathsf{N})}$ ist nun $\mathrm{Koass}(R^{(\mathsf{N})}) = \mathrm{Spec}(R)$, so daß aus der Voraussetzung folgt $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Ass}(R)$. Für alle

$\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ ist also $\operatorname{Ann}_R(\mathfrak{m}) \neq 0$ und $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}\}$ endlich, $h(\mathfrak{m}) \leq 1$.

(iv) $\Rightarrow$ (ii) Sei M ein flacher R-Modul. Nach [12, Lemma A.6] ist zu zeigen, daß alle $M_\mathfrak{m}$ als $R_\mathfrak{m}$-Moduln schwach-injektiv sind. Sei also gleich R lokal, $\operatorname{So}(R) \neq 0$ und $\dim(R) \leq 1$. Dann gilt auch für die Vervollständigung $\hat{R}$, daß $\operatorname{So}(\hat{R}) \neq 0$ und $\dim(\hat{R}) \leq 1$ ist, also $\operatorname{Spec}(\hat{R}) = \operatorname{Ass}(\hat{R})$. Der flache $\hat{R}$-Modul $\hat{R} \bigotimes\limits_R M$ ist deshalb nach Lemma 4.4(b) schwach-injektiv, also auch M als R-Modul [12, Lemma A.7].

(ii) $\Rightarrow$ (i) klar.

Bei (iv) $\Rightarrow$ (iii) ist nach Voraussetzung $\operatorname{Spec}(R) = \operatorname{Ass}(R)$, für jeden R-Modul M also $\operatorname{Ass}(M) \subset \operatorname{Ass}(R)$. War also M injektiv, ist es nach Folgerung 4.2 schwach-flach.

Bei (iii) $\Rightarrow$ (iv) wähle man einen injektiven R-Modul Q mit $\operatorname{Ass}(Q) = \operatorname{Spec}(R)$ (z.B. $Q = \coprod E(R/\mathfrak{p})$, wobei $\mathfrak{p}$ alle Primideale von R durchläuft). Nach Voraussetzung ist Q schwach-flach, also wieder nach Folgerung 4.2 $\operatorname{Spec}(R) = \operatorname{Ass}(R)$, und das ist (iv).

Satz 4.6. *Für einen torsionslosen flachen R-Modul M sind äquivalent:*

(i) $\operatorname{Koass}(M) \subset \operatorname{Ass}(R)$.

(ii) *Für jedes* $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ *gilt: Ist* $\mathfrak{m}$ *regulär, so ist* $M/\mathfrak{m}M = 0$*; ist* $\text{Höhe}(\mathfrak{m}) \geq 2$*, so ist* $M/\mathfrak{m}M$ *endlich erzeugt.*

(iii) *M ist in jeder Erweiterung koabgeschlossen.*

Beweis. (iii) $\Rightarrow$ (i) gilt für jeden R-Modul M und (i) $\Rightarrow$ (ii) für jeden flachen R-Modul M: Die erste Bedingung ist klar. Ist bei der zweiten $M/\mathfrak{m}M$ für ein $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)$ nicht endlich erzeugt, sind nach Lemma 3.1 alle Primideale $\mathfrak{p}$, mit $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$, koassoziiert zu M, und weil nach Voraussetzung $\operatorname{Koass}(M)$ endlich ist, muß $h(\mathfrak{m}) \leq 1$ sein.

Bleibt (ii) $\Rightarrow$ (iii) für jeden torsionslosen flachen R-Modul M zu zeigen, d.h. nach [12, Lemma A.6], daß alle $M_\mathfrak{m}$ als $R_\mathfrak{m}$-Moduln schwach-injektiv sind.

1. Fall. $\mathfrak{m}$ ist regulär. Dann ist nach Voraussetzung $\mathfrak{m}M = M$, also $M_\mathfrak{m} = 0$.

2. Fall. $\mathfrak{m}$ ist nicht regulär, d.h. $\operatorname{So}(R_\mathfrak{m}) \neq 0$. Ist $h(\mathfrak{m}) \leq 1$, sind nach Folgerung 4.5 sogar alle flachen $R_\mathfrak{m}$-Moduln schwach-injektiv. Ist aber $h(m) \geq 2$, so ist nach Voraussetzung und Folgerung 1.2 $M_\mathfrak{m}$ als $R_\mathfrak{m}$-Modul endlich erzeugt, $M_\mathfrak{m} \cong (R_\mathfrak{m})^n$ für ein $n \geq 0$. Wegen $\operatorname{So}(R_\mathfrak{m}) \neq 0$ ist nun $R_\mathfrak{m}$ schwach-injektiv [12, Beispiel 1.1], also auch $M_\mathfrak{m}$.

REFERENCES

1. Goodearl, K. R., *Ring Theory*, Dekker (1976).
2. Kaplansky, I., *Commutative Rings*, Chicago Univ. Press (1974).
3. Rotthaus, C., *On rings with low dimensional formal fibres*, J. Pure Appl. Algebra 71 (1991), 287–296.
4. Sharp, R. Y., *Secondary representations for injective modules over commutative noetherian rings*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 20 (1976), 143–151.
5. Zöschinger, H., *Projektive Moduln mit endlich erzeugtem Radikalfaktormodul*, Math. Ann. 255 (1981), 199–206.
6. Zöschinger, H., *Über koassoziierte Primideale*, Math. Scand. 63 (1988), 196–211.
7. Zöschinger, H., *Die Lasker-Bedingung für nicht endlich erzeugte Moduln*, Period. Math. Hungar. 25 (1992), 1–11.
8. Zöschinger, H., *Der Krull'sche Durchschnittssatz für kleine Untermoduln*, Arch. Math. 62 (1994), 292–299.
9. Zöschinger, H., *Über koassoziierte Primideale II*, Math. Scand. 81 (1997), 247–259.
10. Zöschinger, H., *Kriterien für Ganzheit*, Comm. Algebra 28 (2000), 5021–5037.
11. Zöschinger, H., *Kosinguläre und kleine Moduln*, Comm. Algebra 33 (2005), 3389–3404.
12. Zöschinger, H., *Schwach-injektive Moduln*, Period. Math. Hungar. 52 (2006), 105–128.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
THERESIENSTR. 39
D-80333 MÜNCHEN
GERMANY
E-mail: zoeschinger@mathematik.uni-muenchen.de