MATH. SCAND. 105 (2009), 5–15

LE SYSTÈME DIRIGÉ DES $\varepsilon_{\mathrm{Res}}$-PRODUITS DANS LA CATÉGORIE DES QUOTIENTS BANACHIQUES

BELMESNAOUI AQZZOUZ and M. HASSAN EL ALJ

Abstract

Nous montrons que la famille des ε-produits $(G\varepsilon_{\mathrm{Res}}(E|F))_{\mathrm{Res}}$ qui a été défini dans [1], est un système dirigé dans la catégorie des quotients banachiques de Waelbroeck.

1. Introduction et notations

Dans la construction du ε-produit d'un $\mathscr{L}_\infty$-espace G par un quotient banachique $E|F$ [1], nous avons utilisé le foncteur exact $G\varepsilon.$ sur la catégorie des espaces de Banach. Dans le cas général, nous avons utilisé des suites exactes à gauche particulières. En effet, à tout espace de Banach nous avons fait correspondre des $C(K)$-résolutions et nous avons défini des foncteurs $G\varepsilon.$: $\mathsf{qBan} \to \mathsf{qBan}$, $E|F \to G\varepsilon(E|F)$. Mais comme G admet plusieurs $C(K)$-résolutions et que chacune d'elles définit un quotient banachique $G\varepsilon(E|F)$, nous n'avons pas pu montrer que ce dernier objet est indépendant des $C(K)$-résolutions de G. Par conséquent, nous n'avons pas pu définir le ε-produit d'un espace de Banach quelconque. Plus encore, d'après un Théorème de Bourgain-Delbaen [3], nous ne pouvons même pas définir le ε-produit d'un b-espace Infra-Schwartz (un b-espace G est Infra-Schwartz s'il est une limite inductive d'espaces de Banach G_B, avec la condition que tout disque borné complétant B de G est inclus dans un disque borné complétant B' de G tel que l'application inclusion $i_{B'B} : G_B \to G_{B'}$ est faiblement compacte) [5]. C'est pour cela que nous avons défini seulement le ε_c-produit d'un b-espace de Schwartz [1].

L'objectif de ce papier est de montrer que si G est un espace de Banach, alors la famille des ε-produits $(G\varepsilon_{\mathrm{Res}}(E|F))_{\mathrm{Res}}$, défini dans [1], est un système dirigé dans la catégorie des quotients banachiques [12].

Avant d'établir nos résultats, nous rappelons ci-dessous quelques définitions dont nous aurons besoin dans la suite. Notons par Ban la catégorie des espaces de Banach et des applications linéaires continues. Si E est un espace de Banach, on note par B_E la boule unité fermée de E.

Received February 2, 2006.

1. Un quotient banachique $E|F$ est un espace vectoriel E/F tel que $(E, \|.\|_E)$ est un espace de Banach et $(F, \|.\|_F)$ un sous-espace banachique de E (i.e. F est un sous-espace vectoriel de E, muni d'une norme banachique $\|.\|_F$ telle que l'injection $(F, \|.\|_F) \to (E, \|.\|_E)$ est continue). Si $E|F$ et $E_1|F_1$ sont deux quotients banachiques, un morphisme strict $u : E|F \to E_1|F_1$ est induit par une application linéaire continue $u_1 : E \to E_1$ dont la restriction $u_{1_{|F}} : F \to F_1$ est continue. Le morphisme strict u est dit un pseudo-isomorphisme s'il est induit par une application linéaire continue et surjective $u_1 : E \to E_1$ telle que $u_1^{-1}(F_1) = F$. Si $u : E|F \to E_1|F_1$ est un morphisme strict induit par l'application linéaire continue $u_1 : E \to E_1$, alors

1- le noyau de u est le quotient banachique $u_1^{-1}(F_1)|F$.

2- l'image de u est le quotient banachique $u(E) + F_1|F_1$.

Notons par $\tilde{\mathsf{q}}\mathsf{Ban}$ la catégorie des quotients banachiques et des morphismes stricts. Dans cette catégorie, il existe des pseudo-isomorphismes qui ne sont pas inversibles. En effet, si E est un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel fermé de E, l'application quotient $\pi : E \to E/F$ induit le pseudo-isomorphisme $E|F \to (E/F)|\{0\}$ qui n'est pas nécessairement un isomorphisme dans $\tilde{\mathsf{q}}\mathsf{Ban}$. Dans [12]. L. Waelbroeck a introduit une catégorie abélienne qBan qui a les mêmes objets que $\tilde{\mathsf{q}}\mathsf{Ban}$ et dans laquelle tous les pseudo-isomorphismes sont inversibles. C'est une catégorie engendrée par $\tilde{\mathsf{q}}\mathsf{Ban}$ et les inverses des pseudo-isomorphismes. Elle a comme morphismes toutes les compositions de morphismes stricts et inverses des pseudo-isomorphismes i.e. tout morphisme u de qBan s'écrit comme $u = v \circ s^{-1}$, où s est un pseudo-isomorphisme et v un morphisme strict. Pour plus de détails sur ce sujet nous renvoyons le lecteur à [12].

2. Rappelons que le ε-produit de deux espaces de Banach E et F est l'espace vectoriel $E\varepsilon F$ des appliations linéaires $f : E' \to F$ telles que la restriction $f_{|B_{E'}}$ est $\sigma(E', E)$-continue. Muni de la norme $\|f\| = \sup_{x' \in B_{E'}} |f(x')|$, $E\varepsilon F$ est un espace de Banach.

Notons qu'il résulte du Théorème 1 de ([8], Chapitre 3), que si la restriction $f_{|B_{E'}}$ est $\sigma(E', E)$-continue, alors f est nécéssairement $\sigma(E', E)$-continue. Et donc il est clair que tout élément de $E\varepsilon F$ est compact.

Si $u_i : E_i \to F_i$, $i = 1, 2$, sont des applications linéaires continues, le ε-produit de u_1 et u_2 est l'application linéaire continue $u_1 \varepsilon u_2 : E_1 \varepsilon E_2 \to F_1 \varepsilon F_2$, $f \mapsto u_2 \circ f \circ u_1'$, où u_1' est l'application duale de u_1.

D'après la proposition 2 de [11], les deux espaces de Banach $E\varepsilon F$ et $F\varepsilon E$ sont isométriquement isomorphes. Il est aussi évident que $\varepsilon : \mathsf{Ban} \times \mathsf{Ban} \to \mathsf{Ban}$ est bien un foncteur et que si G est un espace de Banach, alors le foncteur

$G\varepsilon.$: $\mathsf{Ban} \to \mathsf{Ban}$, $E \to G\varepsilon E$ est exact à gauche mais il n'est pas toujours exact à droite.

Par exemple, si X est un compact et E un espace de Banach, comme l'espace de Banach des fonctions continues $C(X)$ admet la propriété d'approximation, alors les espaces de Banach $C(X)\varepsilon E$ et $C(X, E)$ sont isométriquement isomorphes.

Notons que si G est un espace de Banach et F un sous-espace banachique de E, alors $G\varepsilon F$ est aussi un sous-espace banachique de $G\varepsilon E$. Pour plus de détails sur le ε-produit on renvoie le lecteur à [6] et [11].

3. Un espace de Banach E est dit un $\mathscr{L}_{\infty,\lambda}$-espace, $\lambda \geq 1$, si pour tout sous-espace vectoriel de dimension finie A de E, il existe un sous-espace vectoriel de dimension finie B de E tel que $A \subset B$ et $d(B, \mathbb{K}_\infty^{\dim B}) \leq \lambda$, où

$$d(X, Y) = \inf\{\, \|T\| \|T^{-1}\| : T : X \to Y \text{ un isomorphisme} \,\}$$

est la distance de Banach-Mazur des deux espaces de Banach X et Y. Si E est un $\mathscr{L}_{\infty,\lambda}$-espace pour un certain $\lambda < \infty$, alors E est un $\mathscr{L}_\infty$-espace. Pour plus d'informations sur les $\mathscr{L}_\infty$-espaces, on peut consulter par exemple [9].

2. Le système dirigé des $\varepsilon_{\mathrm{Res}}$-produits

En général, si G est un espace de Banach alors il existe au moins un quotient banachique $E|F$ tel que $G\varepsilon E|F \neq (G\varepsilon E)|(G\varepsilon F)$. Dans [7], W. Kaballo a établi qu'un espace de Banach G est un $\mathscr{L}_\infty$-espace si, et seulement si, pour toute application linéaire bornée et surjective $u : E \to F$ entre des espaces de Banach, l'application $\mathrm{Id}_G\, \varepsilon u : G\varepsilon E \to G\varepsilon F$, $f \mapsto u \circ f$ est surjective. Ensuite dans [1], nous avons utilisé cette caractérisation pour établir que si G est un espace de Banach, le foncteur $G\widetilde{\varepsilon}.$: $\tilde{\mathsf{q}}\mathsf{Ban} \to \mathsf{qBan}$ admet une extension unique $G\varepsilon.$: $\mathsf{qBan} \to \mathsf{qBan}$ si, et seulement si, G est un L_∞-espace (Théorème 1.2 de [1]). Comme conséquence, nous avons défini le ε-produit d'un $\mathscr{L}_\infty$-espace G par un quotient banachique $E|F$, comme le quotient banachique $G\varepsilon(E|F) = (G\varepsilon E)|(G\varepsilon F)$ (définition 1.3). Ce qui a permet de définir un foncteur $G.\varepsilon.$: $\mathsf{Ban} \to \mathsf{qBan}$. Notons aussi que si $E|F$ est un quotient banachique, alors $.\varepsilon(E|F)$: $\mathsf{Ban} \to \mathsf{qBan}$ est un foncteur.

Afin de définir le ε-produit de la classe d'espaces de Banach qui ne sont pas des $\mathscr{L}_\infty$-espaces, nous avons introduit dans [1] une classe particulière de suites exactes à gauches. Une suite $(0, u, v) : 0 \to G \to G_1 \to G_2$ est dite fortement exacte à gauche dans la catégorie Ban si $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u)$ et l'image de v est fermée dans G_2.

D'après le Théorème de Banach ([4], Théorème 1.29), à tout espace de Banach G nous avons fait associer une et même plusieurs suites fortement exactes à gauche $(0, \Phi, \Psi) : 0 \to G \to C(X) \to C(Y)$, où X et Y sont des espaces compacts, que nous avons appelé les $C(K)$-résolutions de G.

Si $E|F$ est un quotient banachique, comme $C(Z)$ est un $\mathscr{L}_\infty$-espace, nous avons

$$C(Z)\varepsilon(E|F) = (C(Z)\varepsilon E)|(C(Z)\varepsilon F), \qquad \text{pour} \quad Z = X, Y.$$

et nous avons obtenu un morphisme strict

$$\Psi\varepsilon\,\mathrm{Id}_{E|F} : (C(X)\varepsilon E)|(C(X)\varepsilon F) \to (C(Y)\varepsilon E)|(C(Y)\varepsilon F)$$

induit par l'application linéaire bornée $\Psi\varepsilon\,\mathrm{Id}_E : C(X, E) \to C(Y, E)$. Comme $\Psi\varepsilon\,\mathrm{Id}_{E|F}$ admet un noyau dans la catégorie abélienne qBan, nous avons obtenu la suite exacte à gauche suivante:

$$\begin{aligned}(0, \Phi\varepsilon\,\mathrm{Id}_{E|F}, \Psi\varepsilon\,\mathrm{Id}_{E|F}) : 0 \to \mathrm{Ker}(\Psi\varepsilon\,\mathrm{Id}_{E|F})&\\ \to C(X)\varepsilon(E|F) \to C(Y)\varepsilon(E|F)&\end{aligned}$$

où

$$\mathrm{Ker}(\Psi\varepsilon\,\mathrm{Id}_{E|F}) = (\Psi\varepsilon\,\mathrm{Id}_E)^{-1}(C(Y)\varepsilon F)|(C(X)\varepsilon F).$$

et $(\Psi\varepsilon\,\mathrm{Id}_E)^{-1}(C(Y)\varepsilon F)$ est un sous-espace banachique de $C(X)\varepsilon E$.

En posant

$$G\varepsilon_{\mathrm{Res}}(E|F) = (\Psi\varepsilon\,\mathrm{Id}_E)^{-1}(C(Y)\varepsilon F)|(C(X)\varepsilon F)$$

nous avons défini un foncteur $G\varepsilon_{\mathrm{Res}}. : \mathsf{qBan} \to \mathsf{qBan}$. Mais comme G admet plusieurs $C(K)$-résolutions et que chacune d'elle définit un quotient banachique $G\varepsilon_{\mathrm{Res}}(E|F)$, et qu'en général nous ne pouvons pas montrer que $G\varepsilon_{\mathrm{Res}}(E|F)$ est indépendant de toutes les $C(K)$-résolutions de G, nous n'avons pu définir que le ε-produit d'un b-espace de Schwartz [1].

Notons que dans ([2], Théorème 2), nous avons établi qu'un espace de Banach G est un L_∞-espace si, et seulement si, pour toute $C(K)$-résolution de G et pour tout quotient banachique $E|F$, on a $G\varepsilon(E|F) = G\varepsilon_{\mathrm{Res}}(E|F)$.

Avant de montrer que ces $\varepsilon_{\mathrm{Res}}$-produits $(G\varepsilon_{\mathrm{Res}}(E|F))$ forment un système dirigé pour "l'inclusion" dans la catégorie qBan, montrons d'abord une condition suffisante pour que des morphismes stricts injectifs existent entre les objets de cette famille.

Théorème 2.1. *Soient G un espace de Banach et $(0, \Phi_i, \Psi_i) : 0 \to G \to C(X_i) \to C(Y_i)$, $i = 1, 2$, des $C(K_i)$-résolutions de G. S'il existe des applications linéaires bornées $v : C(X_1) \to C(X_2)$ et $w : C(Y_1) \to C(Y_2)$*

telles que le diagramme suivant:

$$
\begin{array}{ccccccc}
(0,\Phi_1,\Psi_1):0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & C(X_1) & \longrightarrow & C(Y_1)\\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_G} & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle w}\\
(0,\Phi_2,\Psi_2):0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & C(X_2) & \longrightarrow & C(Y_2)
\end{array}
\tag{1}
$$

est commutatif, alors, il existe un morphisme strict injectif $G\varepsilon_{\mathrm{Res}_1}(E|F) \to G\varepsilon_{\mathrm{Res}_2}(E|F)$.

DÉMONSTRATION. Si nous appliquons le foncteur $.\varepsilon(E|F) : \mathsf{Ban} \to \mathsf{qBan}$ au carré commutatif de droite du diagramme (1), nous obtenons le carré commutatif suivant:

$$
\begin{array}{ccc}
C(X_1, E|F) & \xrightarrow{\Psi_1\varepsilon\,\mathrm{Id}_{E|F}} & C(Y_1, E|F)\\
\downarrow{\scriptstyle v\varepsilon\,\mathrm{Id}_{E|F}} & & \downarrow{\scriptstyle w\varepsilon\,\mathrm{Id}_{E|F}}\\
C(X_2, E|F) & \xrightarrow{\Psi_2\varepsilon\,\mathrm{Id}_{E|F}} & C(Y_2, E|F)
\end{array}
$$

En prenant les noyaux des morphismes stricts $\Psi_i\varepsilon\,\mathrm{Id}_{E|F}$, $i = 1, 2$, on obtient le diagramme commutatif suivant:

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\Psi_1\varepsilon\,\mathrm{Id}_{E|F}) & \longrightarrow & C(X_1)\varepsilon(E|F) & \longrightarrow & C(Y_1)\varepsilon(E|F)\\
 & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle v\varepsilon\,\mathrm{Id}_{E|F}} & & \downarrow{\scriptstyle w\varepsilon\,\mathrm{Id}_{E|F}}\\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\Psi_2\varepsilon\,\mathrm{Id}_{E|F}) & \longrightarrow & C(X_2)\varepsilon(E|F) & \longrightarrow & C(Y_2)\varepsilon(E|F)
\end{array}
\tag{2}
$$

où le morphisme strict u est induit par la restriction de l'application linéaire bornée $v\varepsilon\,\mathrm{Id}_E$ au sous-espace banachique $(\Psi_1\varepsilon\,\mathrm{Id}_E)^{-1}(C(Y_1, F))$. Montrons que ce morphisme strict est injectif. Considérons le diagramme dual du diagramme (1)

$$
\begin{array}{ccccccc}
(\Psi'_2,\Phi'_2,0): & C(Y_2)' & \longrightarrow & C(X_2)' & \longrightarrow & G' & \longrightarrow 0\\
 & \downarrow{\scriptstyle w'} & & \downarrow{\scriptstyle v'} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_{G'}} & \\
(\Psi'_1,\Phi'_1,0): & C(Y_1)' & \longrightarrow & C(X_1)' & \longrightarrow & G' & \longrightarrow 0
\end{array}
\tag{3}
$$

Montrons que

$$C(X_1)' = v'(C(X_2)') + \Psi'_1(C(Y_1)').$$

En effet, si $f \in C(X_1)'$, alors $\Phi'_1(f) \in G'$. Comme Φ_2 est injective et à image fermée, alors Φ'_2 est surjective. Il s'ensuit l'existence de $g \in C(X_2)'$ telle que $\Phi'_2(g) = \Phi'_1(f)$.

D'autre part, le carré de droite du diagramme (3) est commutatif, et donc $\Phi'_1 \circ v' = \Phi'_2$ et par suite $\Phi'_1 \circ v'(g) = \Phi'_2(g) = \Phi'_1(f)$, c'est-à-dire que

$\Phi_1'(f - v'(g)) = 0$. Or $\Phi_1' \circ \Psi_1' = 0$ et $\mathrm{Im}(\Psi_1') = \mathrm{Ker}(\Phi_1')$, il s'ensuit que $f - v'(g) \in \Psi_1'(C(Y_1)')$. Ce qui prouve que $C(X_1)' = \Psi_1'(C(Y_1)') + v'(C(X_2)')$.

D'où l'existence de $\varepsilon > 0$ telle que

$$\varepsilon B_{C(X_1)'} \subseteq \Psi_1'(B_{C(Y_1)'}) + v'(B_{C(X_2)'})$$

En effet, il suffit de montrer que $B_{C(X_1)'} \subseteq \Psi_1'(B_{C(Y_1)'}) + v'(B_{C(X_2)'})$. Posons $G\varepsilon_{\mathrm{Res}_1}(E|F) = A|C(X_1, F)$ et $G\varepsilon_{\mathrm{Res}_2}(E|F) = B|C(X_2, F)$, où $A = \{f \in C(X_1, E) : \Psi_1\varepsilon\,\mathrm{Id}_E(f) \in C(Y_1, F)\}$ et $B = \{g \in C(X_2, E) : \Psi_2\varepsilon\,\mathrm{Id}_E(g) \in C(Y_2, F)\}$. Montrons que le morphisme u est injectif, i.e. si $f \in A$ tel que $u_1(f) \in C(X_2, F)$ alors, $f \in C(X_1, F)$, où $u_1 = (v\varepsilon\,\mathrm{Id}_E)_{/A} : A \to B$ est l'application linéaire bornée qui induit le morphisme strict u.

En effet, soit $f \in A$, alors $f \in C(X_1, E)$ et $\Psi_1\varepsilon\,\mathrm{Id}_E(f) \in C(Y_1, F)$. Or $C(X_1, E) = \{g : C(X_1)' \to E$ linéaire telle que $g_{|B_{C(X_1)'}} \in C(B_{C(Y_1)'}, E)\}$, par suite, $f_{|B_{C(X_1)'}} \in C(B_{C(Y_1)'}, E)$ et $\Psi_1\varepsilon\,\mathrm{Id}_E(f)_{|B_{C(Y_1)'}} \in C(B_{C(Y_1)'}, F)$. On obtient donc le carré commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} C(Y_1)' & \xrightarrow{\Psi_1\varepsilon\,\mathrm{Id}_F} & F \\ \downarrow{\scriptstyle \Psi_1'} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ C(X_1)' & \xrightarrow{\quad f \quad} & E \end{array}$$

où i est l'inclusion de F dans E. Donc l'application $f \circ \Psi_1' : C(Y_1)' \to F$ est définie, linéaire et $(f \circ \Psi_1')_{|B_{C(Y_1)'}} \in C(B_{C(Y_1)'}, F)$. Par conséquent, $f_{|\Psi_1'(B_{C(Y_1)'})} \in C(\Psi_1'(B_{C(Y_1)'}), F)$. D'autre part, $f \in C(X_1, E)$ et $v\varepsilon\,\mathrm{Id}_E(f) \in C(X_2, F)$, d'où le carré commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} C(X_2)' & \xrightarrow{v\varepsilon\,\mathrm{Id}_E(f)} & F \\ \downarrow{\scriptstyle \Psi_1'} & & \downarrow{\scriptstyle v'} \\ C(X_1)' & \xrightarrow{\quad f \quad} & E \end{array}$$

Ceci montre que l'application $f \circ v' : C(X_2)' \to F$ est définie, linéaire et $f \circ v'_{|B_{C(X_2)'}} \in C(B_{C(X_2)'}, F)$, et par suite $f_{|v'(B_{C(X_2)'})} \in C(v'(B_{C(X_2)'}), F)$. Comme les applications $f : \Psi_1'(C(Y_1)') \to F$ et $f : v'(C(Y_2)') \to F$ sont définies linéaires, et comme $B_{C(X_1)'} \subset v'(B_{C(X_2)'}) + \Psi_1'(B_{C(Y_1)'})$, on déduit que $f_{|B_{C(X_1)'}} \in C(B_{C(X_1)'}, F)$. Par conséquent, $f \in C(X_1, F)$ et donc u est injectif.

La preuve de notre résultat repose sur le Théorème suivant:

THÉORÈME 2.2. *Soient* G *un espace de Banach et* $0 \to G \xrightarrow{\Phi_i} C(X_i) \xrightarrow{\Psi_i} C(Y_i)$, $i = 1, 2$, *deux* $C(K_i)$*-résolutions de* G. *Alors, il existe une* $C(K_3)$*-résolution* $0 \to G \xrightarrow{\Phi_3} C(X_3) \xrightarrow{\Psi_3} C(Y_3)$ *de* G *telle que le diagramme suivant:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\Phi_1"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_G"] & C(X_1) \arrow[r, "\Psi_1"] \arrow[d, "v_1"] & C(Y_1) \arrow[d, "w_1"] \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\Phi_3"] & C(X_3) \arrow[r, "\Psi_3"] & C(Y_3) \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\Phi_2"] \arrow[u, "\mathrm{Id}_G"] & C(X_2) \arrow[r, "\Psi_2"] \arrow[u, "v_2"] & C(Y_2) \arrow[u, "w_2"]
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

DÉMONSTRATION. Première construction: Considérons les suites exactes à droite suivantes:

$$C(X_1)' \xrightarrow{\Phi_1'} G' \longrightarrow 0 \qquad \text{et} \qquad C(X_2)' \xrightarrow{\Phi_2'} G' \longrightarrow 0.$$

Posons

$$U' = \left\{(m_1, m_2) \in C(X_1)' \times C(X_2)' : \Phi_1'(m_1) = \Phi_2'(m_2)\right\}$$

c'est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Banach $C(X_1)' \times C(X_2)'$. Nous avons donc deux applications linéaires bornées

$$r_1 : U' \longrightarrow C(X_1)' \qquad \text{et} \qquad r_2 : U' \longrightarrow C(X_2)'$$

telles que le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
U' \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "r_2"] & C(X_1)' \arrow[d, "\Phi_1'"] \\
C(X_2)' \arrow[r, "\Phi_2'"] & G'
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Soit $\Phi' : U' \to G'$ l'application linéaire bornée et surjective telle que $\Phi = \Phi_1' \circ p_1 = \Phi_2' \circ p_2$, où p_i est la restriction de l'application projection $i = 1, 2$. Nous obtenons alors le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc} C(X_1)' & \xrightarrow{\Phi_1'} & G' & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow{\scriptstyle p_1} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_{G'}} & & \\ U' & \xrightarrow{\Phi} & G' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle p_2} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_{G'}} & & \\ C(X_2)' & \xrightarrow{\Phi_2'} & G' & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{4}$$

Vu que U' est un sous-espace vectoriel fermé de $C(X_1)' \times C(X_2)'$, nous avons $B_{U'} \subset B_{C(X_1)'} \times B_{C(X_2)'}$. Or $B_{C(X_1)'} \times B_{C(X_2)'}$ est faiblement compacte et $B_{U'}$ est faiblement fermée, donc faiblement compacte, et il en résulte du Théorème 1 de [10], appliqué à $(U', B_{U'}, \sigma(C(X_1))' \times C(X_2)', C(X_1) \times C(X_2))$ que l'espace de Banach U' est isomorphe au dual d'un espace de Banach.

D'autre part, l'espace de Banach U s'écrit sous la forme $U = \{(f_1, f_2) \in C(X_1) \times C(X_2) : f_1 = \Phi_1(g)$ et $f_2 = \Phi_2(g)$ pour certain $g \in G\}$; et soit Ψ l'application linéaire bornée est définie par .$\Psi : G \to U$, $x \mapsto (\Phi_1(x), \Phi_2(x))$. Par conséquent, le diagramme (4) est le dual du diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\Phi_1} & C(X_1) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_G} & & \downarrow{\scriptstyle s_1} \\ 0 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\Psi} & U \\ & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_G} & & \uparrow{\scriptstyle s_2} \\ 0 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\Phi_2} & C(X_2) \end{array} \tag{5}$$

Puisque U est un espace de Banach, il existe une partie compacte X_3 de $(U', \sigma(U', U))$ et une application linéaire bornée $\alpha : U \to C(X_3)$ qui est injective et à image fermée. Vu que l'application Φ est surjective, alors $\Psi : G \to U$ est injective et à image fermée. Par conséquent, l'application composée $\Psi \circ \alpha = \Phi_3 : G \to C(X_3)$ est bornée, injective et à image fermée. Cela donne le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\Phi_1} & C(X_1) \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v_1} \\ 0 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\Phi_3} & C(X_3) \\ & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle v_2} \\ 0 & \longrightarrow & G & \xrightarrow{\Phi_2} & C(X_2) \end{array} \tag{6}$$

où les applications linéaires bornées v_1 et v_2 sont données par $v_1 = \alpha \circ s_1$ et $v_2 = \alpha \circ s_2$.

Deuxième construction: D'après la construction des deux $C(K_i)$-résolutions exactes à gauche de G; $i = 1, 2$, il existe une partie Y_1 (resp. Y_2) faiblement compacte dans $(C(X_1)/G)'$ (resp. $(C(X_2)/G)'$) telle que l'application linéaire bornée $u_1 : C(X_1)/G \longrightarrow C(Y_1)$ (resp. $u_2 : C(X_2)/G \longrightarrow C(Y_2)$) est injective et à image fermée. D'après la première construction, il existe alors une partie compacte Y_3 telle que le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (C(X_1)/G) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{v}_1"] & C(Y_1) \arrow[d, "w_1"] \\
0 \arrow[r] & (C(X_3)/G) \arrow[r] & C(Y_3) \\
0 \arrow[r] & (C(X_2)/G) \arrow[r] \arrow[u, "\overline{v}_2"'] & C(Y_2) \arrow[u, "w_2"']
\end{tikzcd} \tag{7}$$

est commutatif. En combinant les diagrammes (3) et (4), nous obtenons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\Phi_1"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_G"] & C(X_1) \arrow[r, "\Psi_1"] \arrow[d, "v_1"] & C(Y_1) \arrow[d, "w_1"] \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\Phi_3"] & C(X_3) \arrow[r, "\Psi_3"] & C(Y_3). \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\Phi_2"] \arrow[u, "\mathrm{Id}_G"'] & C(X_2) \arrow[r, "\Psi_2"] \arrow[u, "v_2"'] & C(Y_2) \arrow[u, "w_2"']
\end{tikzcd}$$

Dans la catégorie des quotients banachiques qBan, nous disons que $E|F'' \subset'' E_1|F_1$ s'il existe un morphisme strict injectif $E|F \to E_1|F_1$.

Comme conséquence des Théorèmes 2.1 et 2.2, nous obtenons le résultat suivant:

THÉORÈME 2.3. *Soient G un espace de Banach et $E|F$ un quotient banachique. Alors, pour tout $\varepsilon_{\mathrm{Res}_i}$-produit $G\varepsilon_{\mathrm{Res}_i}(E|F)$, $i = 1, 2$, il existe un $\varepsilon_{\mathrm{Res}_3}$-produit $G\varepsilon_{res_3}(E|F)$ tel que $G\varepsilon_{\mathrm{Res}_1}(E|F)'' \subset'' G\varepsilon_{\mathrm{Res}_3}(E|F)$ et $G\varepsilon_{\mathrm{Res}_2}(E|F)'' \subset'' G\varepsilon_{\mathrm{Res}_3}(E|F)$.*

DÉMONSTRATION. Soient

$$(0, \Phi_i, \Psi_i) : 0 \longrightarrow G \longrightarrow C(X_i) \longrightarrow C(Y_i), \qquad i = 1, 2,$$

les $C(K_i)$-résolutions de G qui définissent les quotients bornologiques $G\varepsilon_{\mathrm{Res}_i}(E|F)$, $i = 1, 2$. D'après le Théorème 2.2, il existe une $C(K_3)$-résolution

$$(0, \Phi_3, \Psi_3) : 0 \longrightarrow G \longrightarrow C(X_3) \longrightarrow C(Y_3)$$

de G telle que le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_G"] & C(X_1) \arrow[r] \arrow[d, "v_1"] & C(Y_1) \arrow[d, "w_1"] \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r] & C(X_3) \arrow[r] & C(Y_3) \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{Id}_G"] & C(X_2) \arrow[r] \arrow[u, "v_2"] & C(Y_2) \arrow[u, "w_2"]
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

En appliquant le foncteur $.\varepsilon(E|F)$: $\mathsf{Ban} \longrightarrow \mathsf{qBan}$ aux carrés de droite du diagramme ci-dessus, et en prenant les noyaux des morphismes horizentales, on obtient le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G\varepsilon_{\mathrm{Res}_1}(E|F) \arrow[r] \arrow[d] & C(X_1, E|F) \arrow[r] \arrow[d, "v_1\varepsilon\,\mathrm{Id}_{E|F}"] & C(Y_1, E|F) \arrow[d, "w_1\varepsilon\,\mathrm{Id}_{E|F}"] \\
0 \arrow[r] & G\varepsilon_{\mathrm{Res}_3}(E|F) \arrow[r] & C(X_3, E|F) \arrow[r] & C(Y_3, E|F) \\
0 \arrow[r] & G\varepsilon_{\mathrm{Res}_2}(E|F) \arrow[r] \arrow[u] & C(X_2, E|F) \arrow[r] \arrow[u, "v_2\varepsilon\,\mathrm{Id}_{E|F}"] & C(Y_2, E|F) \arrow[u, "w_2\varepsilon\,\mathrm{Id}_{E|F}"]
\end{tikzcd}$$

D'après le Théorème 2.1, les morphismes stricts $G\varepsilon_{\mathrm{Res}_1}(E|F) \to G\varepsilon_{\mathrm{Res}_3}(E|F)$ et $G\varepsilon_{\mathrm{Res}_2}(E|F) \to G\varepsilon_{\mathrm{Res}_3}(E|F)$ sont injectifs. Par identification, on déduit alors que $G\varepsilon_{\mathrm{Res}_1}(E|F)'' \subset'' G\varepsilon_{\mathrm{Res}_3}(E|F)$ et $G\varepsilon_{\mathrm{Res}_2}(E|F)'' \subset'' G\varepsilon_{\mathrm{Res}_3}(E|F)$.

REFERENCES

1. Aqzzouz, B., *The ε_c-product of a Schwartz b-space by a quotient Banach space and applications*, Appl. Categ. Structures 10 (2002), 603–616.
2. Aqzzouz, B., El Alj, M. H., and Nouira, R., *Some properties of the tensor product of Schwartz εb-space*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. 101 (2007), 33–42.
3. Bourgain, J., and Delbaen, F., *A class of special $\mathscr{L}_\infty$-spaces*, Acta Math. 145 (1980), 155–176.
4. Douglas, R. G., *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Pure and Appl. Math. 49, Academic Press, New York 1972.
5. Hogbe-Nlend, H., *Théorie des Bornologies et Applications*, Lecture Notes in Math. 213, Springer, Berlin 1971.
6. Jarchow, H., *Locally Convex Spaces*, Teubner, Stuttgart 1981.
7. Kaballo, W., *Lifting theorems for vector valued functions and the ε-product*, pp. 149–166 in: Functional Analysis, Surveys and Results, Proc. Paderborn 1976, North-Holland Math. Studies 27, North-Holland, Amsterdam 1977.

8. Kelley, J. L., *General Topology*, Graduate Texts in Math. 27, Springer, New York 1975.
9. Lindenstrauss, J., and Tzafriri, L., *Classical Banach Spaces*, Lecture Notes in Math. 338, Springer, Berlin 1973.
10. Waelbroeck, L., *Le complété et le dual d'un espace localement convexe*, Bull. Soc. Math. Belg. 16 (1964), 393–406.
11. Waelbroeck, L., *Duality and the injective tensor product*, Math. Ann. 163 (1966), 122–126.
12. Waelbroeck, L., *Quotient Banach spaces*, pp. 553–562 in: Spectral Theory, Proc. Warsaw 1977, Banach Center Publ. 8, PWN, Warsaw 1982.

UNIVERSITÉ MOHAMMED V-SOUISSI
FACULTÉ DES SCIENCES ECONOMIQUES, JURIDIQUES ET SOCIALES
DÉPARTEMENT D'ECONOMIE
B.P. 5295
SALAELJADIDA
MOROCCO
E-mail: baqzzouz@hotmail.com

UNIVERSITÉ IBN TOFAIL
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
B.P. 133
KÉNITRA
MOROCCO