MATH. SCAND. 116 (2015), 182–221

CONSTRUCTION DE VARIÉTÉS DE GROUPES EXCEPTIONNELS NON k-RATIONNELLES

PHILIPPE GILLE*

Abstract

Our goal is to construct non k-rational varieties of exceptional groups. The relevant invariant is the defect of weak approximation.

1. Introduction

Etant donné un groupe algébrique linéaire (connexe) G/k défini sur un corps k a priori non algébriquement clos, nous nous intéressons à la question suivante:

La variété de groupe G/k est-elle k-rationnelle, i.e. le corps de fonctions $k(G)$ est-il transcendant pur sur k?

Un objectif très ambitieux demeure la classification k-birationnelle des groupes algébriques linéaires sur un corps k : celle-ci a été faite pour les groupes semi-simples adjoints de rang ≤ 3, lire l'article de synthèse de Merkurjev [39]. Pour les tores algébriques, on dispose d'un critère simple de k-rationalité stable mais on ignore si la k-rationalité stable entraîne la k-rationalité (conjecture de Voskresenskiĭ [57, §4.7]). Par ailleurs, l'étude k-birationnelle des groupes semi-simples pour les corps globaux a été faite par Chernousov-Platonov [9], voir aussi [15] pour les corps géométriques de dimension 2.

Nous rappelons ici la définition de la k-rationalité ainsi que des variantes pour une k-variété X (i.e. k-schéma séparé de type fini, réduit et irréductible).

(a) X est k-rationnelle si X est k-birationnelle à un espace affine.

(b) X est stablement k-rationnelle s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $X \underset{k}{\times} \mathbf{A}_k^n$ est k-birationnelle à un espace affine.

(c) X est k-birationnellement facteur direct d'une variété k-rationnelle s'il existe une variété Y/k telle que $X \underset{k}{\times} Y$ est k-birationnelle à un espace affine.

* Ce travail a été soutenu par le projet Gatho de l'Agence Nationale de la Recherche, ANR-12-BL01-0005.

Received 21 January 2012, in final form 19 June 2013.

(d) X est rétracte k-rationnelle s'il existe un ouvert non vide U de X tel que l'identité de U factorise à travers un ouvert V d'un espace affine $\mathbf{A}_k^m$, i.e. il existe des morphismes $f : U \to V$ et $r : V \to U$ tels que $r \circ f = \mathrm{id}_U$.

On a les implications (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (d). La rétracte k-rationalité est donc une propriété plus faible que la k-rationalité; elle est due à Saltman [48] (voir aussi [14], [24]) et est souvent la plus maniable, voir par exemple la remarque 6.2.3. Dans cet article, nous étudions certains groupes exceptionnels.

THÉORÈME 1.1. *Pour chacune des classes suivantes de groupes semi-simples simplement connexe*

(i) *de type quasi-déployé* ${}^3D_4$*, avec algèbre d'Allen d'indice* 2*,*

(ii) *de type quasi-déployé* E_6*, forme interne avec algèbre de Tits d'indice* 9*,*

(iii) *de type quasi-déployé* E_7 *avec algèbre de Tits triviale (i.e. forme fortement interne),*

(iv) *de type quasi-déployé* E_8*,*

il existe un corps F *et un* F*-groupe* G *appartenant à cette classe tel que la variété de groupe* G/F *n'est pas rétracte* F*-rationnelle.*

Les corps F construits sont des corps transcendants purs sur $\mathbf{C}$. Les groupes construits sont anisotropes, ceci est nécessaire en type ${}^3D_4$ (resp. E_6) puisque un groupe isotrope de type ${}^3D_4$ (resp. ${}^1E_6$) est k-rationnel ([9], proposition 13, resp. 14). Nos exemples sont fondés sur une technique de spécialisation de l'approximation faible (prop. 3.1.1) appliquée à des corps transcendants purs $k(t_1, \dots, t_n)$. De façon plus précise, k est muni d'une valuation v_0 (en pratique discrète de rang 1) et le corps $k(t_1, \dots, t_n)$ est muni de l'unique valuation (discrète) v_n qui prolonge v_0 et qui soit triviale sur les t_i.

Une difficulté technique est de travailler avec l'approximation faible pour des corps valués (en pratique de valuation discrète de rang 1) non complets, cela impose quelques sorites pour montrer notamment qu'une variété de groupes rétracte k-rationnelle satisfait l'approximation faible (lemme 2.1.5).

Cela fait aussi une différence avec les exemples antérieurs, notamment la construction par Platonov d'une algèbre simple centrale D/F telle que $SK_1(D) = \mathrm{SL}_1(D)/[D^\times, D^\times]$ est non trivial [44] (voir aussi [54]) qui était sur des corps de séries formelles itérées. Un résultat de Voskresenskiĭ montre alors que la variété de groupes $\mathrm{SL}_1(D)$ n'est pas rétracte F-rationnelle [56] (voir aussi [57, §18.2] et [58, §6]).

Des exemples de groupes de spineurs ont été construits sur des corps similaires par Monastyrnyĭ-Yanchevskiĭ [40]; pour les groupes adjoints, le cas des groupes projectifs orthogonaux est discuté dans l'article [22].

Notre propos consiste donc à aborder le cas des groupes exceptionnels, et de tels groupes décrits par la théorie de Bruhat-Tits. De façon plus précise, les groupes du théorème 1.1 sont essentiellement issus de l'article de Tits [55], c'est exactement le cas en type E_7 et E_8. Le cas trialitaire est celui où l'on donne le plus de détails sur les constructions (§6).

Cette technique donne lieu par la même occasion à des groupes adjoints non rétractes k-rationnels de type E_7 (exemple 5.2.3) et il n'est pas exclu qu'elle permette de traiter le cas adjoint de type E_6. (voir remarque 5.1.3). En revanche, nous avons vérifié à la fin qu'elle est inefficace pour les groupes de type F_4 (les groupes de type G_2 sont des variétés k-rationnelles). Ceci est une évidence en faveur de la k-rationalité stable des variétés de groupes de type F_4, question toujours ouverte à notre connaissance.

Par ailleurs, pour certains groupes trialitaires, une méthode «générique» permet de construire à peu de frais (à partir des groupes classiques) des groupes simplement connexes/adjoints qui ne sont pas des variétés rétractes k-rationnelles (cf. proposition 9.0.2).

A la fin de l'article, nous discutons cependant de façon conjecturale comment la R-équivalence, que nous voyons pour les groupes algébriques comme un avatar de l'approximation faible (§8.1), pourrait donner une meilleure compréhension des contre-exemples du théorème principal.

Remerciements. Je remercie Alexander Merkurjev pour m'avoir signalé une erreur dans une version préliminaire. Je remercie Jean-Louis Colliot-Thélène et Boris Kunyavskiĭ pour les discussions bienvenues autour de cet article. Enfin, je remercie les deux rapporteurs pour leurs commentaires et suggestions.

Notations

Si Γ est un groupe et $d \geq 1$ un entier, on note Γ^d le sous-groupe (distingué) de Γ engendré par les σ^d pour $\sigma \in \Gamma$.

On note k_s une clôture séparable de k. Soit S un k-groupe de type multiplicatif (cf. [52], exp. X). On note $\mathsf{G}_m = \mathrm{Spec}\big(k\big[t, \frac{1}{t}\big]\big)$ le tore standard déployé. On dit que S est un k-tore (resp. est fini) si $\widehat{S}$ est un $\mathbf{Z}$-module libre (resp. fini). On note $\widehat{S} = \mathrm{Hom}_{k_s-gr}(S_{k_s}, \mathsf{G}_{m,k_s})$ (resp. $\widehat{S}^0 = \mathrm{Hom}_{k_s-gr}(\mathsf{G}_{m,k_s}, S_{k_s})$) le module galoisien des caractères (resp. cocaratères) de S. Si $\chi \in \widehat{S}(k_s)$, on note k_χ/k l'extension galoisienne finie minimale telle que $\chi \in \widehat{S}(k_\chi)$. On définit ensuite l'extension galoisienne finie k_S/k comme le composé des extensions k_χ pour χ parcourant $\widehat{S}(k_s)$ et on note $\Gamma(S) = \mathscr{G}\mathrm{al}(k_M/k)$. Si $\Gamma(S) = 1$ (i.e. $\widehat{S}$ est un module galoisien avec action triviale), on dit que S est déployé. Ainsi k_S/k est l'extension minimale déployant S. Pour toute extension séparable finie L/k, le k-groupe $R_{L/k}(S)$ est de type multiplicatif et on note $R^1_{L/k}(S)$ le noyau de la norme $N_{L/k} : R_{L/k}(S) \to S$. On dit qu'un tore T est *quasi-trivial* si T est un produit direct de facteurs $R_{L/k}(\mathsf{G}_m)$. On dit qu'un tore T est *inversible* s'il est facteur direct d'un tore quasi-trivial.

On dit qu'un k-tore S est flasque si son module des cocaractères $\widehat{S}^0$ est coflasque, c'est-à-dire $\mathrm{H}^1\big(\Gamma', (\widehat{S})^0\big) = 0$ pour tout sous-groupe Γ' de $\Gamma(S)$.

On entend par k-groupe algébrique linéaire un k-groupe algébrique affine et lisse [1, §1.1]. Si G est un k-groupe algébrique, on note G^0/k sa composante neutre [17, II.5.1]. On dit qu'un k-groupe algébrique linéaire est réductif (resp. semi-simple) s'il est lisse et connexe et si le radical unipotent (resp. le radical) de $H \times_k \overline{k}$ est trivial (*loc. cit.*, §11.21). Le rang relatif d'un k-groupe réductif G est la dimension maximale de ses sous k-tores déployés; le rang absolu est le rang relatif de $G \times_k \overline{k}$. On dit que G est anisotrope si son rang relatif est nul.

De plus, si Γ est un groupe fini et A un Γ-module, on rappelle la notation

$$Ш^i_\omega(\Gamma, A) = \ker\Big(\mathrm{H}^i(\Gamma, A) \to \prod_{\sigma\in\Gamma} \mathrm{H}^i(\langle\sigma\rangle, A)\Big).$$

On note $\mathscr{O}$ l'anneau local en 0 de la droite affine A^1_k. On note $F_n = k(t_1, \ldots, t_n)$ pour tout $n \geq 1$. Pour chaque $n \geq 1$, on note $\mathscr{O}_n$ l'anneau local de $\mathsf{A}^1_{k(t_1,\ldots,t_{n-1})}$ en $t_n = 0$. Avec cette convention, on a $\mathscr{O} = \mathscr{O}_1$.

2. Préliminaires

2.1. Sorites sur l'approximation faible

Pour l'approximation faible, on travaille avec une tour[1] $k \subset K \subset K'$ où $K' = K_1 \times \cdots \times K_l$ est un produit fini de corps topologiques séparés et non discrets (mais non nécessairement complets) et K un sous-corps dense de K'. On note que K est alors nécessairement un corps infini.

REMARQUE 2.1.1. Examinons le cas particulier qui est utilisé dans les applications aux groupes algébriques. On suppose que K est muni de valeurs absolues non triviales $|\ |_i : K \to \mathsf{R}$ ($i = 1, \ldots, n$) et qui sont deux à deux indépendantes, i.e. $|\ |_i$ et $|\ |_j$ définissent des topologies distinctes pour $i \neq j$. Pour chaque i, soit K_i un K-sous-corps du corps complété $\widehat{K}_i$ relativement à la valeur absolue $|\ |_i$. Alors le théorème d'Artin-Whaples [34, XII.1.2] entraîne que K est dense dans le produit $\widehat{K}_1 \times \cdots \times \widehat{K}_n$ et donc a fortiori dans le produit $K_1 \times \cdots \times K_n$ muni de la topologie induite.

Chaque $X(K_i)$ est muni de la topologie «forte» induite par K_i [42, §2.1]. Si X est affine, c'est la topologie la moins fine telle que les applications $f_{K_i} : X(K_i) \to K_i$ soient continues pour tout $f \in \mathrm{H}^0(X_{K_i}, O_X)$.

[1] En pratique, on a souvent $k = K$ mais cette généralité est commode.

On dit que l'approximation faible vaut pour (X, K, K') si $X(K)$ est dense dans $X(K')_{\mathrm{top}}$ où $X(K')_{\mathrm{top}} = X(K_1)_{\mathrm{top}} \times \cdots \times X(K_l)_{\mathrm{top}}$ est muni de la topologie produit.

Si H/k est un groupe algébrique, l'adhérence $\overline{H(K)}$ de $H(K)$ dans le groupe topologique $H(K')_{\mathrm{top}}$ est un sous-groupe. On note alors

$$A(H, K, K') = \overline{H(K)}\backslash H(K')_{\mathrm{top}}$$

le quotient (à gauche) du groupe topologique $H(K')_{\mathrm{top}}$ par $\overline{H(K)}$. C'est le défaut d'approximation faible de H pour le couple (K, K').

Remarque 2.1.2. Dans le cas d'un corps de nombres K et lorsque K' est un produit de corps locaux complétés de K, Sansuc a démontré pour H connexe que le groupe $\overline{H(K)}$ est distingué dans $H(K')_{\mathrm{top}}$ et que le quotient est abélien fini [48, corollaire 3.5]. Ceci est le cas aussi pour les corps géométriques de dimension 2 [15, Th. 4.13], l'argument reposant sur le fait que l'approximation faible vaut dans le cas semi-simple simplement connexe. Il nous semble que ce sont essentiellement les seuls cas où l'on puisse dire quelque chose de pertinent. Ceci étant, dans tous les exemples connus identifiés, le sous-groupe $\overline{H(K)}$ est alors un sous-groupe distingué de $H(K')_{\mathrm{top}}$ et le quotient $A(H, K, K')$ est abélien d'exposant fini.

Lemme 2.1.3. *Soit X/k une variété lisse connexe et U un ouvert non vide de X.*

(1) *Si $X(K)$ est dense dans $X(K')_{\mathrm{top}}$, alors $U(K)$ est dense dans $U(K')_{\mathrm{top}}$.*

(2) *Si $U(K')$ est dense dans $X(K')_{\mathrm{top}}$ alors la réciproque de* (1) *est vraie.*

(3) *Si $X = \mathbf{A}_k^n$ avec $n \geq 1$, alors $U(K)$ est dense dans $X(K')_{\mathrm{top}}$.*

Remarque 2.1.4. Si K' est un produit de corps valués (arbitraires) henséliens, le théorème des fonctions implicites [28, th. 9.4] indique que $U(K')$ est dense dans $X(K')_{\mathrm{top}}$, donc (1) est une équivalence dans ce cas.

Démonstration. (1) Soit $x \in U(K')$ et Ω un voisinage ouvert de x dans $U(K')_{\mathrm{top}}$. Alors Ω est un voisinage ouvert de x dans $X(K')_{\mathrm{top}}$ et par hypothèse $\Omega \cap X(K') \neq \emptyset$. Il suit que $\Omega \cap U(K')_{\mathrm{top}} \neq \emptyset$.

(2) Évident.

(3) On écrit $K' = K_1 \times \cdots \times K_l$ où les K_j sont des corps topologiques séparés. Suivant le (2), il suffit de montrer que $U(K_j)$ est dense dans $X(K_j)_{\mathrm{top}}$ pour $j = 1, \ldots, l$, ce que l'on va montrer en fait pour tout K_j-ouvert U_j de $X \times_k K_j$.

On a $X = \mathbf{A}_k^n$, $n \geq 1$ et $U_j = \{f \neq 0\}$ pour $f \in K_j[x_1, \ldots x_n]$. Si $n = 1$, alors $X \backslash U$ est fini et $U_j(K_j)$ est dense dans le corps topologique K_j puisque K_j

est non discret. Pour $n \geq 2$, soit $x \in (K_j)^n$ et Ω un voisinage ouvert de x dans $(K_j)^n_{\text{top}}$. On veut montrer que $\Omega \cap U_j(K_j)$ est non vide. On choisit un hyperplan affine H_j de $\mathbf{A}^n \times_k K_j$ contenant x tel que $H_j \cap U_j$ est schématiquement dense dans H_j. Par récurrence sur la dimension, $(H_j \cap U_j)(K_j)$ est dense dans $H(K_j)_{\text{top}}$, donc l'ouvert $\Omega \cap H(K_j)$ de $H(K_j)_{\text{top}}$ intersecte non trivialement $U(K_j)$. On conclut que $\Omega \cap U_j(K_j)$ est non vide.

LEMME 2.1.5. *Soient H/k un groupe réductif, M/k un sous-groupe fermé de H et V un ouvert non vide de l'espace homogène $X = H/M$. Si X est une variété rétracte k-rationnelle, alors $V(K)$ est dense dans $X(K')_{\text{top}}$.*

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, il existe un ouvert dense $V^\dagger$ de X tel qu'il existe un morphisme $p : \widetilde{V} \to V^\dagger$ admettant une section s où $\widetilde{V}$ est un ouvert d'un espace affine. Quitte à remplacer V par $V \cap V^\dagger$, on peut supposer que $V = V^\dagger$. Vu qu'un espace affine satisfait à l'approximation faible et grâce à l'existence de la section s, le lemme 2.1.3.(3) montre que $\widetilde{V}$ satisfait l'approximation faible et il en de même de V par projection. Ainsi le lemme 2.1.3.(2) indique qu'il suffit de montrer la densité de $V(K')$ dans $X(K')_{\text{top}}$. On écrit $K' = K_1 \times \cdots \times K_l$ où les K_j sont des corps topologiques séparés non discrets. Il suffit de montrer que $V(K_j)_{\text{top}}$ est dense dans $X(K_j)_{\text{top}}$ pour $j = 1, \ldots, l$. Soit U un ouvert non vide de H. Puisque $U(K)$ est Zariski dense dans H [1, 18.3], il vient $V(K)\,.\,U = X$. Etant donné $x_j \in X(K_j)_{\text{top}}$, il existe donc $g \in V(K)$ tel que $g\,.\,x_j \in U(K_j)_{\text{top}}$. On note que $V^\flat = V \cap g(V)$ est un ouvert non vide de V, ainsi $V^\flat(K_j)$ est dense dans $V(K_j)_{\text{top}}$. Il suit que $g^{-1}V^\flat(K_j)_{\text{top}} = g^{-1}V(K_j)_{\text{top}} \cap V(K_j)_{\text{top}}$ est dense dans $g^{-1}V(K_j)_{\text{top}}$, d'où on conclut que x_j appartient à l'adhérence de $V(K_j)$ dans $X(K_j)_{\text{top}}$.

LEMME 2.1.6. *Soit H/k un groupe algébrique linéaire. Soit M un k-sous groupe k-résoluble (i.e. admettant une suite de composition centrale à quotients G_m ou G_a) et distingué dans G. L'application $A(H, K, K') \to A(H/M, K, K')$ est bijective.*

DÉMONSTRATION. Par dévissage de M, on est ramené au cas où $M = \mathsf{G}_a$ ou $M = \mathsf{G}_m$. On sait alors que la fibration $H \to H/M$ est localement triviale pour la topologie de Zariski; en particulier il existe un ouvert affine U de $Q := H/M$ trivialisant la fibration p.

La surjectivité de $A(H, K, K') \to A(Q, K, K')$ résulte de celle de $H(K') \to Q(K')$. Ayant en vue l'injectivité, montrons d'abord que la fibre en $[1_Q]$ de cette application est réduite à $[1_H]$. Comme $H(K)$ est Zariski dense dans H [1, 18.3], il existe $h_1, \ldots, h_r \in H(K)$ tels que $Q = h_1\,.\,U \cup \cdots \cup h_r\,.\,U$. Soit $h \in H(K')$ tel que $p(h) \in \overline{Q(K)}$. Quitte à translater h à gauche par un élément de $H(K)$, il est loisible de supposer que $p(h) \in \bigcap_i h_i\,.\,U$. Il existe un indice i tel que $p(h) \in h_i\,.\,\overline{U(K)}$. Or $p^{-1}(h_i\,.\,U) \cong h_i\,.\,U \times M$. Dans cette carte, $h \in \overline{h_i \,.\, U(K) \times M(K')}$. Comme $M(K)$ est dense dans $M(K')$ d'après le lemme 2.1.5, il résulte que $h \in \overline{H(K)}$.

Passons maintenant au cas général de l'injectivité. Soient donc $h'_a, h'_b \in H(K')$ tels que $p(h'_a) = q_\infty\, p(h'_b)$ avec $q_\infty \in \overline{Q(K)}$. Alors $h'_a\,(h'_b)^{-1}$ définit un élément de la fibre en $[1_Q]$ de l'application $A(H, K, K') \to A(Q, K, K')$. Comme cette fibre est réduite à un élément, il suit qu'il existe $h_\infty \in \overline{Q(K)}$ satisfaisant $h'_a\,(h'_b)^{-1} = h_\infty$ d'où aussitôt $h'_a = h_\infty h'_b$. Ceci établit l'injectivité de l'application $A(H, K, K') \to A(Q, K, K')$.

2.2. *Le cas des tores algébriques*

2.2.1. Le critère de rétracte k-rationalité. Dans le cas d'un k-tore algébrique, Colliot-Thélène et Sansuc ont établi un critère de rétracte k-rationalité en termes de R-équivalence pour T et aussi de résolution flasque [13, §7]. Rappelons qu'un résolution flasque est une suite exacte de k-tores algébriques $1 \to S \to E \to T \to 1$ où E est un k-tore quasi-trivial et S est un k-tore flasque (voir Notations).

La R-équivalence est une notion due à Manin [36]. On note A l'anneau semi-local en 0 et 1 de la droite affine $\mathbf{A}^1_k$ (on peut aussi remplacer 1 par l'infini). Soit X/k une variété algébrique définie sur un corps k, c'est-à-dire ici un schéma séparé de type fini sur k. La R-équivalence est la relation d'équivalence sur l'ensemble des points rationnels $X(k)$ de X engendrée par la relation élémentaire suivante: deux points x_0 et x_1 de $X(k)$ sont dits directement R-équivalents s'il existe $x \in X(A)$ tel que $x(0) = x_0$ et $x(1) = x_1$. Sur un groupe algébrique, on sait que deux points R-équivalents le sont directement [21, II.1.1]. Le théorème suivant figure essentiellement dans [13, §7].

THÉORÈME 2.2.2. *Soit T/k un tore algébrique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) *T est rétracte k-rationnel,*

(2) *Si $1 \to S \to E \to T \to 1$ désigne une résolution flasque de T, le tore flasque S est facteur direct d'un tore quasi-trivial. En outre, $T \times_k S$ est k-birationnel à E.*

(3) *T est R-trivial, i.e. $T(F)/R = 1$ pour tout k-corps F;*

(4) *Pour tout anneau de valuation discrète* (*de rang* 1) *R/k de corps résiduel κ, l'application $T(R) \to T(\kappa)$ est surjective.*

(4') *Pour tout anneau de valuation discrète* (*de rang* 1) *R/k de corps résiduel $k(T)$, l'application $T(R) \to T(\kappa)$ est surjective.*

(5) *Pour tout anneau de valuation discrète R/k* (*de rang* 1) *de corps de fractions K et de complété $\widehat{K}$, $T(K)$ est dense dans $T(\widehat{K})$.*

(5') *Pour tout anneau de valuation discrète R/k (de rang* 1) *de corps de fractions K, de corps résiduel $k(T)$ et de complété $\widehat{K}$, $T(K)$ est dense dans $T(\widehat{K})$.*

DÉMONSTRATION. Pour les équivalences (1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4), voir [13, 7.4]. Par ailleurs, on a (1) $\Longrightarrow$ (4) suivant le lemme 2.1.3.(1) et on a (5) $\Longrightarrow$ (4), puisque (5) entraîne que $T(A)$ est dense dans $T(\widehat{A})$.

On a (4) $\Longrightarrow$ (4') et (4') $\Longrightarrow$ (1) est un fait général (prop. 8.2.1, (ii') $\Longrightarrow$ (i)). De même, on a (5) $\Longrightarrow$ (5') et (5') $\Longrightarrow$ (1) résulte de l'implication (iv') $\Longrightarrow$ (i) du même énoncé.

REMARQUES 2.2.3. (a) L'assertion (ii) ne dépend que du $\Gamma(T)$-module des caractères $\widehat{T}$. Etant donné une résolution flasque $0 \to \widehat{T} \to \widehat{E} \to \widehat{S} \to 0$ de $\Gamma(T)$-réseaux, elle se traduit par le fait que $\widehat{S}$ est inversible, c'est-à-dire facteur direct d'un $\Gamma(T)$-module de permutation, voir [39, prop. 3.3].

(b) L'assertion (4) ressemble au critère de relèvement de Saltman de rétracte k-rationalité, à ceci près que l'on ne le demande que pour des anneaux de valuation discrète.

(c) On ignore si les équivalences (1) $\Longleftrightarrow$ (4) et (1) $\Longleftrightarrow$ (5) sont valables dans le cas d'un k-groupe réductif. On montre plus loin (§8.2) l'implication (5) $\Longrightarrow$ (1) pour un k-groupe réductif.

2.2.4. Tores déployés par une extension métacyclique. On va examiner maintenant une classe de tores pour lesquels le critère est vérifié. On rappelle qu'un groupe fini Γ est métacyclique si tous ses sous-groupes de Sylow sont cycliques. Endo et Miyata ont caractérisé cette propriété.

THÉORÈME 2.2.5 ([18, Theorem 1.5], voir aussi [12, proposition 2]). *Soit Γ un groupe fini. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) *Le groupe Γ est métacyclique;*

(b) *Pour tout Γ-réseau flasque M, M est inversible, c'est-à-dire facteur direct d'un Γ-réseau de permutation.*

Ceci a la conséquence remarquable suivante [12, corollaire 3].

COROLLAIRE 2.2.6. *Soit T un k-tore algébrique déployé par une extension galoisienne métacyclique* (*i.e. de groupe de Galois métacyclique*)*. Alors T est k-birationnellement facteur direct d'une variété k-rationnelle.*

DÉMONSTRATION. Soit $1 \to S \to E \to T \to 1$ une résolution flasque de T de sorte que l'extension galoisienne k_T déploie E. Le théorème 2.2.5 montre que le $\Gamma(T)$-module $\widehat{S}$ est inversible. Alors S est facteur direct d'un k-tore quasi-trivial E' et le théorème 2.2.2.(2) montre que T est k-birationnellement un facteur direct de E.

2.2.7. Quelques exemples de tores. La façon la plus simple d'exhiber des tores non rétractes k-rationnels est l'utilisation de l'invariant $Ш^2_\omega(\Gamma, \widehat{T})$ qui, en caractéristique nulle, s'identifie au groupe de Brauer non ramifié du k-tore T modulo $\mathrm{Br}(k)$ ([13], proposition 9.5). On se propose de calculer cet invariant pour des tores remarquables.

LEMME 2.2.8. *Soit l un nombre premier inversible dans k. et r un entier satisfaisant $0 \leq r \leq n$. Soient $a_1, \dots, a_n \in k^\times$. On pose $k_i = k[u]/(u^l - a_i)$ et $M = k_1 \otimes_k \cdots \otimes_k k_n$ et $T_{r,M} \subset \mathsf{G}_m \times R_{M/k}(\mathsf{G}_m)$ le tore d'équation $x^{l^r} = N_{M/k}(y)$. On suppose que M est un corps et on pose $\Gamma = \Gamma(T_{r,M}) = \mathcal{G}\mathrm{al}(M/k)$.*

(1) $Ш^2_\omega(\Gamma, \widehat{T}_{r,M}) \xrightarrow{\sim} Ш^2_\omega(\Gamma, \mathsf{Z}/l^r\mathsf{Z})$.

(2) *On a $Ш^2_\omega(\Gamma, \mathsf{Z}/l^r\mathsf{Z}) = 0$ si et seulement si $r = 0$ ou $n = 1$. Dans le cas $r = 0$ (resp. $n = 1$), $T_{r,M}$ est une variété k-rationnelle (resp. birationnellement facteur direct d'une variété k-rationnelle).*

DÉMONSTRATION. (1) Le module des caractères $\widehat{T}_{r,M}$ s'inscrit dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \mathsf{Z}[\Gamma] \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathsf{Z}[\Gamma] \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathsf{Z} \arrow[r, "l^r \oplus -N"] \arrow[d, "\wr"] & \mathsf{Z} \oplus \mathsf{Z}[\Gamma] \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{T}_{r,M} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathsf{Z} \arrow[r, "l^r"] & \mathsf{Z} \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Z}/l^r\mathsf{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0. \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Vu que $\mathsf{Z}[\Gamma]$ est un module acyclique, il vient $\mathrm{H}^2(\Gamma, \widehat{T}_{r,M}) \cong \mathrm{H}^2(\Gamma, \mathsf{Z}/l^r\mathsf{Z})$ et $Ш^2_\omega(\Gamma, \widehat{T}_{r,M}) \cong Ш^2_\omega(\Gamma, \mathsf{Z}/l^r\mathsf{Z})$.

(2) Si $r = 0$, ou $n = 1$, il est clair que $Ш^2_\omega(\Gamma, \mathsf{Z}/l^r\mathsf{Z}) = 0$. De plus, si $n = 0$, $T_{0,M}$ est isomorphe à $R_{M/k}(\mathsf{G}_m)$ donc est une variété k-rationnelle. Si $n = 1$, le corollaire 2.2.6 indique que $T_{r,M}$ est birationnellement facteur direct d'une variété k-rationnelle.

On suppose donc $n \geq 2$ et $r \geq 1$ et on veut montrer que le groupe $Ш^2_\omega(\Gamma, \mathsf{Z}/l^r\mathsf{Z})$ est non trivial. Sans perte de généralité, on peut supposer que

$n = 2$. On voit $H^2(\Gamma, \mathsf{Z}/l^r\mathsf{Z})$ comme le groupe des extensions centrales de $\Gamma = (\mathsf{Z}/l\mathsf{Z})^2$ par $\mathsf{Z}/l^r\mathsf{Z}$. Dans le cas $r = 1$, le groupe de Heisenberg $H(\mathsf{Z}/l\mathsf{Z})$ est une extension centrale non triviale (ce groupe n'est en effet pas commutatif) de Γ par $\mathsf{Z}/l\mathsf{Z}$ de sorte que tout sous-groupe $\mathsf{Z}/l\mathsf{Z}$ de Γ se relève en un sous-groupe de $\mathsf{Z}/l\mathsf{Z}$ de $H(\mathsf{Z}/l\mathsf{Z})$. En d'autres mots, l'extension $H(\mathsf{Z}/l\mathsf{Z})$ définit un élément non trivial de $Ш^2_\omega(\Gamma, \mathsf{Z}/l\mathsf{Z})$. Son image dans $Ш^2_\omega(\Gamma, \mathsf{Z}/l^r\mathsf{Z})$ est encore non triviale car le groupe associé H_r contient $H(\mathsf{Z}/l\mathsf{Z})$ et n'est donc pas commutatif.

2.2.9. Tores des normes communes. On garde les notations précédentes en considérant un nombre premier l inversible dans k et des scalaires $a_1, \dots, a_n \in k^\times$. On pose $k_i = k[u]/(u^l - a_i)$ et $M = k_1 \otimes_k \cdots \otimes_k k_n$. Le tore $T = T_{l,a_1,\dots,a_n}$ des normes communes associé aux extensions $k_1, \dots, k_n$ est le sous-tore de $\prod_{i=1,\dots,n} R_{k_i/k}(\mathsf{G}_m)$ défini par l'équation

$$N_{k_1/k}(y_1) = \cdots = N_{k_n/k}(y_n).$$

Le morphisme

$$R_{M/k}(\mathsf{G}_m) \times \mathsf{G}_m \to \prod_{i=1,\dots,n} R_{k_i/k}(\mathsf{G}_m),\ (y,t) \mapsto \big(N_{M/k_i}(y)t\big)_{i=1,\dots,n}$$

factorise par T et définit un morphisme $p : R_{M/k}(\mathsf{G}_m) \to T$.

Lemme 2.2.10. *$p(M^\times \times k^\times) = RT(k)$ et*

$$\Big(\bigcap_{i=1,\dots,n} N_{k_i/k}(k_i^\times)\Big)/N_{M/k}(M^\times)\,.\,(k^\times)^l \xrightarrow{\sim} T'(k)/R.$$

Démonstration. Pour le cas $l = 2$, voir [22, prop. 2], le cas l impair est analogue.

Théorème 2.2.11 (Merkurjev). *On suppose que l est impair et que $a_1, \dots, a_n$ engendrent une famille de rang ≥ 2 dans le F_l-espace vectoriel $k^\times/(k^\times)^l$. Alors le tore des normes communes $T_{l,a_1,\dots,a_n}$ n'est pas R-trivial.*

Démonstration. Il est évidemment loisible de supposer que k contient une racine primitive l-ième de l'unité ζ. Si $n = 2$, c'est [37, cor. 2.9]. On se ramène à ce cas de la façon suivante. On observe que le groupe $T(k)/R$ ne dépend que du sous-espace vectoriel de $k^\times/(k^\times)^l$ engendré par les a_i. En effet on a

$$\bigcap_{i=1,\dots,n} N_{k_i/k}(k_i^\times) = \big\{t \in k^\times \mid (t) \cup (a_i) = 0 \in H^2(k, \mu_l^{\otimes 2})\big\}$$

et $N_{M/k}(M^\times) = N_{k(\sqrt[l]{a_1},\dots,\sqrt[l]{a_n})/k}\bigl(k(\sqrt[l]{a_1},\dots,\sqrt[l]{a_n})^\times\bigr)$. Ensuite, il existe une extension finie L/k telle que $a_1,\dots,a_n$ forment une famille de rang 2 dans le F_l-espace vectoriel $L^\times/(L^\times)^l$. Ainsi le tore T_L n'est pas R-trivial et donc T n'est pas T-trivial.

THÉORÈME 2.2.12. *On suppose que $l = 2$ est impair et que $a_1,\dots,a_n$ engendrent une famille de rang ≥ 3 dans le F_2-espace vectoriel $k^\times/(k^\times)^2$. Alors le tore des normes communes $T_{2,a_1,\dots,a_n}$ n'est pas R-trivial.*

DÉMONSTRATION. De même que dans le théorème précédent, on se ramène au cas $n = 3$. Alors $\widehat{T}$ est un $(\mathsf{Z}/2\mathsf{Z})^3$-réseau et le théorème 2.2.2.(2) (cf. remarque 2.2.3.(a)) indique que la propriété de R-trivialité ne dépend que ce $(\mathsf{Z}/2\mathsf{Z})^3$-réseau. Ainsi il suffit d'exhiber un exemple d'un tel tore non R-trivial, ce qui a a été fait par Shapiro-Wadworth-Tignol [53, th. 5.1] (voir aussi [22, remark 4] et [30, p. 209–210]).

REMARQUE 2.2.13. Pour $l = 2$ et $n = 2$, le tore des normes communes T_{2,a_1,a_2} est une quadrique avec un k-point, il s'agit donc une variété k-rationnelle.

2.3. *D'autres dévissages*

On reprend la situation générale du §2.1 avec une donnée $k \subset K \subset K'$. Il est commode d'exclure le cas d'un corps de base fini.

PROPOSITION 2.3.1. *Soit H/k un groupe algébrique linéaire connexe défini sur un corps fini k. Alors H k-birationnellement facteur direct d'une variété k-rationnelle. En outre $A(H, K, K') = 1$.*

DÉMONSTRATION. On suppose tout d'abord H réductif.

Premier cas: H est rétracte k-rationnel. On sait que H est quasi-déployé (Lang, [1, prop. 16.6]). Si $B = U \rtimes T$ et $B^- = U^- \rtimes T$ sont deux sous-groupes de Borel opposés, H contient la grosse cellule $U^+ \times T \times U^-$. Comme les groupes unipotents U et U^- sont des espaces affines en tant que k-variétés, H est stablement rationnellement équivalent à T. Le tore T est déployé par une extension cyclique, donc est k-birationnellement facteur direct d'une variété k-rationnelle, voir le corollaire 2.2.6. Par suite H est k-birationnellement facteur direct d'une variété k-rationnelle. Il résulte du lemme 2.1.5 que $A(H, K, K') = 1$.

Cas général: on note U le radical unipotent de H, il est défini sur k puisque k est parfait. C'est un k-groupe résoluble déployé [52, XVII.4.1.3]. Alors le quotient $H^{\text{réd}} = H/U$ est réductif et H est birationnellement isomorphe à $U \times H^{\text{réd}}$. Le groupe H est donc une variété rétracte k-rationnelle et $A(H, K, K') = 1$ suivant le lemme 2.1.3.

La proposition suivante généralise un fait remarqué par Sansuc [49, prop. 3.2].

PROPOSITION 2.3.2. *Soit H/k un groupe réductif. Soit P un sous-groupe parabolique de H, L un sous-groupe de Levi de P et S/k le tore maximal déployé du centre $Z(L)$ de L. On a des isomorphismes*

$$A(L/S, K, K') \overset{\sim}{\longleftarrow} A(L, K, K') \overset{\sim}{\longrightarrow} A(P, K, K') \overset{\sim}{\longrightarrow} A(H, K, K').$$

DÉMONSTRATION. On note $p : H \to H/P$ et $W_S = N_H(S)/Z_H(S)$ le groupe de Weyl relatif. On note $R_u(P)$ le radical unipotent de P, il est défini sur k [1, prop. 20.5].

Les deux premiers isomorphismes résultent du lemme 2.1.6 appliqué respectivement aux fibrations $L \to L/S$ et $P \to P/R_u(P) \cong L$.

Montrons la surjectivité de $A(P, K, K') \to A(H, K, K')$. Soit $h \in H(K')$. Suivant la décomposition de Bruhat [1, §21], il existe un K-ouvert U de H/P qui est un espace affine contenant $p(h)$ et trivialisant p. Alors $p^{-1}(U) \cong U \times_K P$. Comme $U(K)$ est dense dans $U(K')$, il suit que $p^{-1}(U)(K') \cong U(K') \times P(K')$ est inclus dans l'adhérence de $H(K) \,.\, P(K')$ dans $H(K')$. En particulier $[h] \in A(H, K, K')$ appartient à l'image de $A(P, K, K')$.

Pour établir l'injectivité de $A(P, K, K') \to A(H, K, K')$, il suffit de regarder le noyau. Soit $h \in P(K') \cap \overline{H(K)}$. On note $U \subset H/P$ un ouvert trivialisant la fibration p et contenant $p(1)$. Alors h appartient à l'ouvert topologique $p^{-1}(U)(K') \cong U(K') \times P(K')$ de $H(K')_{\mathrm{top}}$. Comme $p^{-1}(U)(K') \cap H(K) = p^{-1}(U)(K)$, h appartient à l'adhérence de $p^{-1}(U)(K)$. Par projection sur P, on conclut que $h \in \overline{P(K)}$.

2.4. *Retour sur un résultat de Harder*

On suppose donné un corps F muni de valeurs absolues non triviales $|\ |_1, \dots, |\ |_n : F \to \mathsf{R}$. Comme dans la remarque 2.1.1, on note $\widehat{F_i}$ les corps complétés respectifs ($i = 1, \dots, n$).

Soit G/F un groupe réductif. Notre but est de reprendre et de raffiner une construction de Harder [29, Satz 2.1] afin de construire un «gros» sous-groupe distingué ouvert U_i de $G(\widehat{F_i})$. Pour chaque $\widehat{F_i}$-tore T_i maximal de G_i, on note $RT_i(\widehat{F_i})$ le sous-groupe des éléments R-équivalents à l'origine dans $T(\widehat{F_i})$. On note U_i le sous-groupe de $G(\widehat{F_i})$ engendré par les $RT_i(\widehat{F_i})$ pour T_i parcourant l'ensemble des $\widehat{F_i}$-tores maximaux de $G \times_F \widehat{F_i}$. Par construction, U_i est un sous-groupe distingué de $G(\widehat{F_i})$. On désigne par $U = U_1 \times \cdots \times U_n$ le sous-groupe produit de $G(\widehat{F_1}) \times \cdots \times G(\widehat{F_d})$.

THÉORÈME 2.4.1. *On note d le degré de l'extension galoisienne déployant le tore générique de G/K.*

(1) *Pour* $i = 1, \dots, n$, U_i *est un sous-groupe ouvert distingué de* $G(\widehat{F_i})_{\rm top}$ *et contient* $G(\widehat{F_i})^d$.

(2) *On a* $U \subset \overline{G(F)} \subset G(\widehat{F_1}) \times \cdots \times G(\widehat{F_n})$.

Ceci est un peu plus général que le théorème original [29, Satz 2.1] qui traite le cas G semi-simple et où les valeurs absolues sont associées à des valuations discrètes de rang 1 sur F. Harder montre alors qu'il existe un ouvert Ω de $G(\widehat{F_1}) \times \cdots \times G(\widehat{F_n})$ contenant $\overline{G(F)}$; ce groupe Ω n'est pas le même que le nôtre, voir la remarque 2.4.2.(a). La démonstration utilise la variété des tores de G et sa rationalité sur le corps de base. Reprenant la même trame, notre énoncé est inspiré aussi de l'article de Kunyavskiĭ-Skorobogatov [33].

Démonstration. (1) On fixe un complété $\widehat{F_i}$. Soit T_i un $\widehat{F_i}$-tore maximal de $G \times_F \widehat{F_i}$ et soit $1 \to S_i \to E_i \xrightarrow{f_i} T_i \to 1$ une résolution flasque du $\widehat{F_i}$-tore T_i. On a $RT_i(\widehat{F_i}) = f_i(E_i(\widehat{F_i}))$. Comme f_i est lisse, $f_{i,\rm top} : E_i(\widehat{F_i})_{\rm top} \to T_i(\widehat{F_i})_{\rm top}$ est une application ouverte suivant le théorème des fonctions implicites [51, §II.3.9]. Par suite $RT_i(\widehat{F_i})$ est un sous-groupe ouvert de $T_i(\widehat{F_i})$. Par ailleurs le groupe $T_i(\widehat{F_i})/R$ est tué par l'ordre de $\Gamma(T_i/\widehat{F_i})$ [12, cor. 4, p. 200], donc par d. Il suit que $T_i(\widehat{F_i})^d \subset RT_i(\widehat{F_i})$. Ceci règle le cas où G est un tore. On passe au cas général en considérant comme Harder le $\widehat{F_i}$-morphisme

$$\begin{aligned} u_i\colon \qquad (G \times_F \widehat{F_i}) \times_{\widehat{F_i}} T_i &\longrightarrow G \times_F \widehat{F_i} \\ (h, t) &\longmapsto u_i(h, t) = t_i h t_i^{-1} t h^{-1} \end{aligned}$$

où $t_i \in T(\widehat{F_i})$ est un élément régulier. La différentielle en $(1, 1)$ est

$$\begin{aligned} du_i\colon \qquad \mathrm{Lie}(G)(\widehat{F_i}) \oplus \mathrm{Lie}(T_i)(\widehat{F_i}) &\longrightarrow \mathrm{Lie}(G)(\widehat{F_i}) \\ (X, Y) &\longmapsto (\mathrm{ad}(t_i) - 1) \,.\, X + Y; \end{aligned}$$

elle est surjective. Par le théorème des fonctions implicites, l'application $u_{i,\rm top} : G(\widehat{F_i})_{\rm top} \times T(\widehat{F_i})_{\rm top} \to G(\widehat{F_i})_{\rm top}$ est ouverte au voisinage de $(1, 1)$. En particulier, $u_i\big(G(\widehat{F_i}) \times RT(\widehat{F_i})\big)$ contient un voisinage de l'origine de $G(\widehat{F_i})_{\rm top}$. Par construction, on a $u_i\big(G(\widehat{F_i}) \times RT(\widehat{F_i})\big) \subset U_i$, donc U_i est un sous-groupe ouvert de $G(\widehat{F_i})_{\rm top}$.

Montrons maintenant que $G(\widehat{F_i})^d \subset U_i$. Il suffit de montrer que $g_i^d \in U_i$ pour tout $g_i \in G(\widehat{F_i})$. Vu que U_i est ouvert et que les éléments semi-simples réguliers de $G(\widehat{F_i})$ forment un ouvert dense de $G(\widehat{F_i})$, on peut supposer g_i semi-simple régulier. Dans ce cas, $Z_{G \times_F \widehat{F_i})}(g_i) = T_i'$ est un $\widehat{F_i}$-tore maximal de $G_{\widehat{F_i}}$ et a vu que $g_i^d \in RT_i'(\widehat{F_i}) \subset U_i$.

(2) Pour montrer que $U = U_1 \times \cdots \times U_n \subset \overline{G(K)} \subset \prod_{i=1,\dots,n} G(\widehat{F_i})_{\rm top}$, il suffit de savoir approcher les générateurs de U. On se donne donc des

tores maximaux $T_1/\widehat{F}_1, \ldots, T_n/\widehat{F}_n$ et on souhaite approcher un élément $g = (g_1, \ldots, g_n)$ avec $g_i \in RT_i(\widehat{F}_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$. On note X/F la variété des tores de G [52, XIV.2]. Le $\widehat{F}_i$-tore T_i définit un point $x_i \in X(\widehat{F}_i)$ et produit un $\widehat{F}_i$-isomorphisme $G_{\widehat{F}_i}/N_{G_{\widehat{F}_i}}(T_i) \xrightarrow{\sim} X \times_F \widehat{F}_i$.

Or X est une variété rationnelle d'après un théorème de Chevalley (voir [52, XIV.2.16]). Ainsi $X(F)$ est dense dans $\prod_i X(\widehat{F}_i)$ et il existe $x \in X(F)$ tel que $x = h_i \,.\, x_i$ et $h_i \in G(\widehat{F}_i)$ très proche de l'unité de $G(\widehat{F}_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$. On note T/F le tore sous-jacent à x. On a $T = h_i\, T_i\, h_i^{-1}$. Il est loisible de remplacer g_i par $h_i g_i h_i^{-1}$ pour $i = 1, \ldots, n$. En d'autres mots, on s'est ramené au cas $g \in \prod_i T(\widehat{F}_i)$. Ensuite on choisit une résolution flasque de $1 \to S \to E \xrightarrow{p} T \to 1$ et on rappelle que $T(F)/R \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(F, S)$ [12, cor. 1] ou de façon équivalente que $p(E(F)) = RT(F)$ est le sous-groupe des éléments de $T(F)$ R-équivalents à 1. Il en est de même sur les F_i, d'où le diagramme commutatif

$$(*)\qquad \begin{array}{ccccccc} E(F) & \xrightarrow{p_F} & T(F) & \longrightarrow & T(F)/R & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \prod_i E(\widehat{F}_i) & \xrightarrow{\prod p_{\widehat{F}_i}} & \prod_i T(\widehat{F}_i) & \longrightarrow & \prod_i T(\widehat{F}_i)/R & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

Les g_i se relèvent en des $y_i \in E(\widehat{F}_i)$, et donc g en $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \prod_i E(\widehat{F}_i)$. Or le tore quasi-trivial E/F est une variété F-rationnelle et satisfait la propriété d'approximation faible. Ainsi $E(F)$ est dense dans $\prod_i E(\widehat{F}_i)_{\mathrm{top}}$ et g est donc approchable à tout ordre par un élément de $T(F)$ et donc a fortiori de $G(F)$.

REMARQUES 2.4.2. (a) Dans la construction de Harder, la résolution flasque de $T_i/\widehat{F}_i$ est remplacée par la norme $N_{\widehat{F}_{i,T_i}/\widehat{F}_i} : R_{\widehat{F}_{i,T_i}/\widehat{F}_i}(T_i) \to T_i$. Le groupe U du théorème 2.4.1 contient donc celui construit par Harder.

(b) La borne d donnée dans la démonstration est quelque peu grossière. Un raffinement consiste à prendre pour d le *ppcm* des exposants des groupes de défauts d'approximation faible des F-tores maximaux de G.

(c) Si d est premier à la caractéristique, l'application $G \to G$, $g \to g^d$, est étale à l'origine [52, XV.1.3] de sorte que le sous-groupe $\prod_{i=1,\ldots,n} G(\widehat{F}_i)^d$ est un sous-groupe (distingué) ouvert de $\prod_{i=1,\ldots,n} G(\widehat{F}_i)$.

3. Spécialisation du défaut d'approximation faible

3.1. Principe

Soit (k', v_0) un corps valué contenant le corps k de façon dense. On munit le corps $k'(t)$ de l'unique valuation v prolongeant la valuation v_0 de k' et triviale sur t [3, VI, §10, prop. 2]. Cette valuation est parfois appelée la valuation de Gauss; pour un polynôme $Q = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$, on a $v(Q) = \mathrm{Inf}(v_0(a_i))$.

On note $k'(t)_{v\text{-top}}$ le corps $k'(t)$ équipé de la topologie définie par la valuation de Gauss. La description explicite précédente indique que le corps $k(t)$ est dense dans $(k'(t))_{v\text{-top}}$.

Plus généralement, si Y est une $k(t)$-variété, on note $Y(k'(t))_{v\text{-top}}$ l'espace topologique induit par la topologie de $k'(t)$ définie par la valuation de Gauss.

Enfin, on rappelle la notation $\mathcal{O}$ pour l'anneau local de $k[t]$ en 0; on pose $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \otimes_k k'$.

Proposition 3.1.1. *Soit $\mathfrak{G}/\mathcal{O}$ un schéma en groupes affine de type fini. On note $\mathfrak{G}_\natural/k$ la fibre spéciale. Si $\mathfrak{G}(\mathcal{O}') = \mathfrak{G}(k'(t))$, alors l'application de spécialisation $\mathfrak{G}(\mathcal{O}') \to G(k')$ induit une application entre les défauts d'approximation faible*

$$\overline{\mathfrak{G}(k(t))} \setminus \mathfrak{G}(k'(t))_{v\text{-top}} \to \overline{\mathfrak{G}_\natural(k)} \setminus \mathfrak{G}_\natural(k')_{v_0\text{-top}}.$$

où les adhérences sont prises pour les topologies respectives. En particulier, si $\mathfrak{G}(\mathcal{O}') \to \mathfrak{G}_\natural(k')$ est surjective et si $(\mathfrak{G}_{k(t)}, k(t), (k'(t))_{v\text{-top}})$ satisfait l'approximation faible, alors $(\mathfrak{G}_\natural, k, k')$ satisfait l'approximation faible.

Démonstration. Vu que $\mathfrak{G}(\mathcal{O}') = \mathfrak{G}(k'(t))$, on a $\mathfrak{G}(\mathcal{O}) = \mathfrak{G}(k(t))$ et il suffit de vérifier que l'application de spécialisation $\mathfrak{G}(\mathcal{O}') \to \mathfrak{G}_\natural(k')$ est continue. Ceci se vérifie sur un espace affine, cas qui est évident puisque l'application $\mathcal{O}' \to k'$ est continue par construction.

3.2. Schémas en groupes de Bruhat-Tits

On suppose désormais que k est de caractéristique nulle. On pose $K = k((t))$ (resp. $K' = k'((t))$), $O = k[[t]]$ (resp. $O' = k'[[t]]$) et on note $\widetilde{K}$ la clôture non ramifiée de K et $\widetilde{O}$ son anneau de valuation. Le corps K (resp. K') est muni de la topologie t-adique; ainsi le corps $k(t)$ (resp. $k(t')$) est muni de deux topologies distinctes, à savoir la topologie v-adique et la topologie t-adique. Le fait de travailler de façon simultanée avec ces deux topologies est crucial pour le reste de l'article.

La théorie de Bruhat-Tits a plusieurs parties [4], [5], [6] et nous sommes intéressés ici surtout par la seconde partie qui construit des O-modèles lisses d'un K-groupe réductif donné H attachés à chaque point de l'immeuble de Bruhat-Tits de H. De façon plus précise, seul le cas extrême d'un K-groupe réductif anisotrope intervient ici. Dans ce cas, l'immeuble de Bruhat-Tits de H/K n'a qu'un point et le groupe topologique $H(K)_{\mathrm{top}}$ est borné [5, 5.2.7]. Le K-groupe H admet alors un unique O-modèle de Bruhat-Tits $\mathfrak{H}/O$, celui-ci satisfait $\mathfrak{H}(O) = H(K)$.

Cette construction se marie bien avec la cohomologie galoisienne [6]; nous recommandons au lecteur l'article de Tits [55] dont l'objet est la construction des K-formes anisotropes remarquables d'un groupe de Chevalley donné et que nous utilisons dans les exemples à suivre.

Soit G/K un K-groupe semi-simple anisotrope. On note $\mathfrak{G}/O$ l'unique O-modèle de Bruhat-Tits. On sait qu'il existe un unique schéma en groupes réductifs «de lacets» $\underline{G}/k[t,t^{-1}]$ tel que $G = \underline{G} \times_{k[t,t^{-1}]} K$ [25, th. 8.1] (on utilise ici l'hypothèse de caractéristique nulle). Ceci est cohérent avec le fait que les K-groupes construits par Tits [55] sont définis sur le corps $k(t)$.

On note $\mathfrak{G}_\natural/k$ la fibre spéciale de $\mathfrak{G}$, elle est décrite en [5, §5]. La fibre spéciale n'est pas en général connexe (c'est néanmoins le cas si G/K est simplement connexe [5, 5.2.5]), et sa composante neutre $\mathfrak{G}^0_\natural/k$ n'est en général pas réductive. On note $(\mathfrak{G}^0_\natural)^{\text{réd}}/k$ le quotient réductif de $\mathfrak{G}^0_\natural$.

Selon le principe de recollement [2, §6.2, prop. D.4], le modèle $\mathfrak{G}/O$ de G_K définit un modèle $\underline{\mathfrak{G}}/\mathbf{A}^1_k$ satisfaisant $\underline{\mathfrak{G}} \times_{\mathbf{A}^1_k} \operatorname{Spec}(R) = \underline{G}$ et $\underline{\mathfrak{G}} \times_{\mathbf{A}^1_k} \operatorname{Spec}(O) = \mathfrak{G}$.

THÉORÈME 3.2.1. *On suppose que $G_{K'}$ est anisotrope. Si $A(\underline{G}_{k(t)}, k(t), k'(t)_{v\text{-top}}) = 1$, alors $A((\mathfrak{G}^0_\natural)^{\text{réd}}, k, k') = 1$.*

Pour se ramener à la proposition 3.1.1, nous commençons par établir le lemme suivant.

LEMME 3.2.2. *Sous les hypothèses du théorème 3.2.1, on a*

$$A\big(\underline{G} \times_R k'(t), k'(t), (K')_{t\text{-top}}\big) = 1.$$

DÉMONSTRATION. En d'autres mots, on doit montrer que $\underline{G}(k'(t))$ est dense dans $G(K')_{\text{top}}$ pour la topologie t-adique. En vertu du théorème 2.4.1, il existe un entier $d \geq 1$ et un sous-groupe ouvert distingué U de $G(K')_{\text{top}}$ tel que $G(K')^d \subset U \subset \overline{\underline{G}(k'(t))}$. Selon le théorème de densité [10, Th. 13.2], on a

$$G(K') = \big\langle J, \underline{G}\big(k'\big[t, t^{\pm 1}\big]\big)\big\rangle \tag{$\star$}$$

où le groupe J est un groupe pro-résoluble en k'-espaces vectoriels. De façon plus précise, il existe une suite de sous-groupes distingués de J

$$\ldots J_n \lhd J_{n-1} \lhd \cdots \lhd J_1 \lhd J_0 = J$$

telle que J_n/J_{n-1} est un k'-espace vectoriel pour tout $n \geq 1$ et telle que les J_n forment une base de voisinage de l'origine dans $G(K')$. Par récurrence sur n, il vient aussitôt que J^d se surjecte sur J/J_n. Ainsi l'image de J dans $G(K')/U$ est triviale et donc $J \subset U$. La décomposition $(\star)$ ci-dessus montre que $G(K) = U \,.\, \underline{G}(k'[t,t^{\pm 1}])$, ce qui permet de conclure que $\underline{G}(k'(t))$ est dense dans $G(K')_{\text{top}}$.

Démonstration du théorème 3.2.1. Vu que $G_{K'}$ est anisotrope, on a $\mathfrak{G}(O') = G(K')$ d'où $\mathfrak{G}(\mathcal{O}') = \mathfrak{G}(k'(t))$. Le $\mathcal{O}$-schéma en groupes $\underline{\mathfrak{G}} \times_{\mathbf{A}^1_k} \mathcal{O}$ satisfait l'hypothèse de la proposition 3.1.1. Le lemme précédent indique que $\underline{\mathfrak{G}}(k'(t))$ est dense dans $\mathfrak{G}(O') = G(K')$, donc $\underline{\mathfrak{G}}(\mathcal{O}') = \mathfrak{G}(O') \cap \underline{\mathfrak{G}}(k'(t))$ est dense dans $\mathfrak{G}(O')$. En particulier, il suit que la spécialisation $\underline{\mathfrak{G}}(\mathcal{O}') \to \mathfrak{G}_\natural(k')$ est surjective. La proposition 3.1.1 appliquée au $\mathcal{O}$-groupe $\underline{\mathfrak{G}} \times_{\mathbf{A}^1_k} \mathcal{O}$ définit alors une application

$$\overline{\underline{\mathfrak{G}}(k(t))} \setminus \underline{\mathfrak{G}}(k'(t))_{v\text{-top}} \longrightarrow\!\!\!\!\to \overline{\mathfrak{G}_\natural(k)} \setminus \mathfrak{G}_\natural(k')_{v_0\text{-top}}.$$

Par hypothèse, on a $A\big(\underline{G}_{k(t)}, k(t), k'(t)_{v\text{-top}}\big) = 1$ et la flèche ci-dessus montre que $A(\mathfrak{G}_\natural, k, k') = 1$. A fortiori, on obtient que $A(\mathfrak{G}^0_\natural, k, k') = 1$, d'où finalement $A\big((\mathfrak{G}^0_\natural)^{\text{réd}}, k, k'\big) = 1$ en tenant compte du lemme 2.1.6.

4. Autour de la construction de Platonov

Comme au paragraphe précédent, k est un corps de caractéristique nulle et est un sous-corps dense d'un corps valué k' pour une valuation non triviale v_0. On rappelle les notations $F_n = k(t_1, \dots, t_n)$ et $F'_n = k'(t_1, \dots, t_n)$. Par récurrence sur n, on construit sur F'_n la valuation v_n qui est l'unique valuation étendant v_0 et triviale sur les t_i.

Nous allons montrer que la non k-rationalité de certains groupes $\mathrm{SL}_1(D)$ construits par Platonov [44] peut se comprendre par le principe de spécialisation.

Par commodité, on s'intéresse à des algèbres l-primaires, l étant un nombre premier tel que k contienne une racine primitive l-ième de l'unité ζ. Si D/k est une algèbre simple centrale de degré l^n, M/k une algèbre étale, et r un entier satisfaisant $0 \le r \le n$, on définit le k-groupe

$$\mathrm{G}_{r,M}(D)/k = \Big\{(d,x) \mid N_{M/k}\big(\mathrm{Nrd}_{D\otimes_k M}(d)\big) = x^{l^r}\Big\} \subset R_{M/k}(\mathrm{GL}_1(D)) \underset{k}{\times} \mathsf{G}_m.$$

On dispose du cocaractère

$$\lambda : \mathsf{G}_m \hookrightarrow \mathrm{G}_{r,M}(D), \qquad x \mapsto \big(x, x^{l^{n-r}\,[M:k]}\big)$$

et on pose

$$\mathrm{PG}_{r,M}(G) := \mathrm{G}_{r,M}(D)/\mathsf{G}_m.$$

C'est un groupe semi-simple et dans le cas $M = k$, on observe que

$$\mathrm{PG}_{r,k}(D) \xrightarrow{\sim} \mathrm{SL}_1(D)/\mu_{l^{n-r}}.$$

On pose $K = k((t))$ et $O = k[[t]]$.

LEMME 4.0.1. *Soient M/k une algèbre étale et r un entier satisfaisant $0 \leq r \leq n$. Soit*

$$D_n/k(t) = (D_{n-1})_{k(t)} \otimes A_\zeta(a, t)$$

où D_{n-1} désigne une k-algèbre simple centrale de degré l^{n-1} et $a \in k^\times$. On note $k_a = k[u]/(u^l - a)$.

(1) *Il existe un $\mathcal{O}$-schéma en groupes lisse $\mathfrak{G}$ de fibre générique $\mathrm{PG}_{r,K\otimes_k M}(D_n)$ et dont la fibre spéciale est extension de $\mathrm{PG}_{r,M}(D_{n-1})$ par un k-groupe unipotent déployé.*

(2) *On suppose que $a \notin (k'^\times)^l$ et que $D_{n-1} \otimes_k k'$ est à division. Si $\mathrm{PG}_{r,K\otimes_k M}(D_n)/k(t)$ satisfait l'approximation faible pour le couple $\big(k(t), (k'(t))_{v\text{-top}}\big)$, alors $\mathrm{PG}_{r,M}(D_{n-1})$ satisfait l'approximation faible pour le couple (k, k').*

DÉMONSTRATION. (1) On pose $D = D_n \otimes_O K$. La valuation de K s'étend de façon unique à D, on note O_D son anneau de valuation. On définit le O-schéma en groupes $\mathrm{GL}_1(O_D)/\operatorname{Spec}(O) \subset O_D \xrightarrow{\sim} (\mathbf{A}_O)^{l^n}$ par l'ouvert $\mathrm{Nrd} \neq 0$. La fibre générique de $\mathrm{GL}_1(O_D)$ est $\mathrm{GL}_1(D)/K$, sa fibre spéciale réductive est donnée par l'ouvert (cf. [54], §1)

$$\big\{N_{k_a/k}(\mathrm{Nrd}_{k_a}(d)) \neq 0\big\} \subset R_{k_a/k}(\mathrm{GL}_1(D_{n-1})).$$

De la même façon, on définit le O-schéma en groupes

$$\mathrm{G}_{r,O\otimes_k M}(O_D) = \big\{N_{M/k}(\mathrm{Nrd}_M(d)) = x^{l^r}\big\} \subset R_{M/k}(\mathrm{GL}_1(D)) \underset{O}{\times} \mathsf{G}_m$$

de fibre générique $\mathrm{G}_{r,K\otimes_k M}(D)$ et de fibre spéciale réductive

$$\mathrm{G}_{r,M\otimes_k k_a}(D_{n-1}) = \big\{N_{M\otimes k_a/k}(\mathrm{Nrd}_{M\otimes_{k_a}}(d)) = x^{l^r}\big\} \subset R_{k_a}(\mathrm{GL}_1(D_{n-1})) \underset{k}{\times} \mathsf{G}_m.$$

En passant au quotient par G_m, on voit alors que $\mathrm{PG}_{r,K\otimes_k M}(D)$ admet un modèle de fibre spéciale réductive $\mathrm{PG}_{r,K\otimes_k M}(D)$. Ces modèles sont des schémas en groupes de Bruhat-Tits [7, §3] et se descendent à $\mathcal{O}$.

(2) Alors $\mathrm{PG}_{r,K\otimes_k M}(D)$ est K'-anisotrope et $\mathrm{PG}_{r,K\otimes_k M}(D)$ et $\mathrm{PG}_{r,K\otimes_k M}(D)$ ont un rang relatif nul sur K et K'. On applique alors le théorème 3.2.1.

L'itération du processus conduit à la:

PROPOSITION 4.0.2. *Soient r, n des entiers positifs et $a_1, \ldots, a_n \in k^\times$. On note $k_i = k[u]/(u^l - a_i)$, $M = k_1 \otimes_k \cdots \otimes_k k_n$,*

$$D/F_n = A_\zeta(t_1, a_1) \otimes_{F_n} A_\zeta(t_2, a_2) \otimes_{F_n} \cdots \otimes_{F_n} A_\zeta(t_n, a_n).$$

et $T_{r,M} \subset \mathsf{G}_m \times R_{M/k}(\mathsf{G}_m)$ le tore d'équation $x^{l^r} = N_{M/k}(y)$.

On suppose que $M \otimes_k k'$ est un corps et on note $F_n' = k'(t_1, \dots, t_n)$ le corps topologique munie de la topologie de Gauss v_n. Si $\mathrm{PG}_{r,F}(D)/F_n$ satisfait l'approximation faible le couple $(F_n, (F_n')_{v_n\text{-top}})$, alors $T_{r,M}$ satisfait à l'approximation faible pour le couple (k, k').

Démonstration. On suit l'induction en posant $M_i = k_1 \otimes_k \cdots \otimes_k k_{a_i}$, $D_i/F_i = A_\zeta(t_1, a_1) \otimes_{K_i} A_\zeta(t_2, a_2) \otimes_{F_i} \cdots \otimes_{F_i} A_\zeta(t_i, a_i)$. Alors D_i/F_i est à division pour $i = 1, \dots, n$. On considère la liste de groupes algébriques anisotropes

$$\mathrm{PG}_{r,F_n \otimes_k M_n}(D_n),\ \mathrm{PG}_{r,F_{n-1} \otimes_k M_{n-1}}(D_{n-1}), \dots$$
$$\dots, \mathrm{PG}_{r,F_1 \otimes_k M_1}(D_1),\ \mathrm{PG}_{r,k}(k\text{-algèbre triviale}) = T_{r,M}$$

et le lemme 4.0.1 entraîne la proposition.

On analyse maintenant le cas particulier $r = n$.

Corollaire 4.0.3. *On garde les notations de la proposition précédente. Si $\mathrm{SL}_1(D)/F_n$ satisfait à l'approximation faible pour le couple $(F_n, (F_n')_{v_n\text{-top}})$, alors le tore $R^1_{M/k}(\mathsf{G}_m)$ satisfait à l'approximation faible pour le couple (k, k').*

Démonstration. On a $\mathrm{PG}_{n,F_n}(D) = \mathrm{SL}_1(D)$ et $T_{n,M} \xrightarrow{\sim} \mathsf{G}_m \times_k R^1_{M/k}(\mathsf{G}_m)$.

4.1. Le contre-exemple de Platonov

On prend $r = n = 2$ dans la proposition. Alors le tore $T_{r,M}$ n'est pas autre chose que le tore normique $R^1_{M/k}(\mathsf{G}_m)$ pour l'extension bicyclique $k(\sqrt[l]{a_1}, \sqrt[l]{a_2})$. On connaît de exemples de tels tores normiques qui ne satisfont pas l'approximation faible, par exemple, pour k un corps de nombres et k' un corps local p-adique [57, §11, ex. 3].

En vertu du lemme 2.1.5, cela permet de produire pour le corps $k(t_1, t_2)$ un groupe $\mathrm{SL}_1(D)$ qui n'est pas une variété rétracte $k(t_1, t_2)$-rationnelle.

5. Exemples de groupes exceptionnels non rationnels

Dans cette section, nous utilisons librement la construction de groupes sur des corps de séries de Laurent issue de la théorie de Bruhat-Tits ([55], §2). Comme précédemment, le corps k est de caractéristique nulle et est un sous-corps dense d'un corps valué k' pour la valuation v_0.

5.1. Type E_6

On note $H^d = (\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3)/\mu_3$ (resp. $\overline{H}^d = (\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3)/\operatorname{Ker}(\mu_3^3 \to \mu_3)$) le groupe maximal de type $A_2.A_2.A_2$ du groupe déployé simplement connexe (resp. adjoint) de type E_6. L'image du bord

$$\mathrm{H}^1(k, \overline{H}^d) \to \operatorname{Ker}\big(\mathrm{H}^2(k, \mu_3)^3 \to \mathrm{H}^2(k, \mu_3)\big)$$

est formée des classes d'algèbres D_1, D_2, D_3 (de degré 3) satisfaisant

$$[D_1] + [D_2] + [D_3] = 0 \in \mathrm{Br}(k).$$

Soit $z \in \mathrm{Z}^1(k, \overline{H}^d)$ et D_i les algèbres correspondantes. Alors

$${}_zH^d = \big(\mathrm{SL}_1(D_1) \times \mathrm{SL}_1(D_2) \times \mathrm{SL}_1(D_3)\big)/\mu_3.$$

PROPOSITION 5.1.1. *On suppose que k contient une racine primitive 3-ième de l'unité ζ. Soient $a_1, a_2, a_3 \in k^\times$ satisfaisant $a_1a_2a_3 = 1$. On note $k_i = k[u]/(u^3 - a_i)$ et on suppose que $k_1 \otimes_k k_2 \otimes_k k'$ est un corps. On pose*

$$D_1/k(t_1) = A_\zeta(a_1, t_1), \quad D_2/k(t_1) = A_\zeta(a_2, t_1), \quad D_3/k(t_1) = A_\zeta(a_3, t_1).$$

On note $\mathfrak{G}/k(t_1)[[t_2]]$ le schéma en groupe de Bruhat-Tits simplement connexe de type E_6 de fibre spéciale réductive

$$H/k(t_1) = \big(\mathrm{SL}_1(D_1) \times \mathrm{SL}_1(D_2) \times \mathrm{SL}_1(D_3)\big)/\mu_3$$

construit de façon analogue à celui du §6.1 ci-dessous. On note aussi $\underline{\mathfrak{G}}/\mathcal{O}_2$ le modèle associé. Si $\underline{\mathfrak{G}} \times_{\mathcal{O}_{k(t_1)}} F_2$ satisfait à l'approximation faible pour le couple $(F_2, (F_2')_{v_2\text{-top}})$, alors le k-tore des normes communes

$$T_{3,a_1,a_2}\colon\ N_{k_1/k}(y_1) = N_{k_2/k}(y_2) \neq 0$$

satisfait à l'approximation faible pour le couple (k, k'),

DÉMONSTRATION. On suppose que $\underline{\mathfrak{G}} \times_{\mathcal{O}_2} F_2$ satisfait à l'approximation faible pour le couple $(F_2, (F_2')_{v_2\text{-top}}, F_2)$. Par construction le groupe $\underline{\mathfrak{G}} \times_{\mathcal{O}_2} k'(t_1)((t_2))$ est anisotrope. Le théorème 3.2.1 montre le groupe $H/k(t_1)$ satisfait à l'approximation faible pour $(k(t_1), (k'(t_1))_{v_1\text{-top}}$. Le $k(t_1)$-groupe H admet un $\mathcal{O}_1$-modèle lisse de fibre spéciale réductive

$$T := \big(R^1_{k_1/k}(\mathsf{G}_m) \times R^1_{k_2/k}(\mathsf{G}_m) \times R^1_{k_3/k}(\mathsf{G}_m)\big)/\mu_3.$$

Ainsi ce tore satisfait à l'approximation faible pour le couple (k, k'). La suite exacte longue de cohomologie

$$1 \to \mu_3 \to \prod_i (R_{k_i/k}\mathsf{G}_m)(k) \to T(k) \to k^\times/(k^\times)^3 \to \prod_i k^\times/N_{k_i/k}(k_i^\times)$$

fournit une surjection (idem pour k')

$$T(k) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \Big(\bigcap_{i=1,\dots,3} N_{k_i/k}(k_i^\times) \Big) / (k^\times)^3.$$

Ainsi le tore des normes communes satisfait à l'approximation faible pour le couple (k, k').

EXEMPLE 5.1.2. On part de $k_\sharp = \mathsf{C}(x, y)$ et $a_1 = x$ et $a_2 = y$. D'après le théorème 2.2.11, le $k_\sharp$-tore T_{3,a_1,a_2} est non R-trivial. D'après le théorème 2.2.2, (5') $\Longrightarrow$ (1), il existe une extension $k/k_\sharp$ tel que alors T_{3,a_1,a_2} ne satisfait pas l'approximation faible pour un couple (k, k') où k' est une complétion de k pour une valuation discrète (de rang 1) de corps résiduel $k_\sharp(T_{3,a_1,a_2})$. On note que $k_1 \otimes_k k_2 \otimes k'$ est un corps. Ainsi cet exemple satisfait les hypothèses de la proposition ce qui produit un groupe semi-simple simplement connexe de type E_6 sur $k(t_1, t_2)$ qui n'est pas une variété rétracte $k(t_1, t_2)$-rationnelle. Ce groupe est défini sur $k_\sharp(t_1, t_2)$ et n'est pas une variété rétracte $k_\sharp(t_1, t_2)$-rationnelle.

REMARQUE 5.1.3. Dans le cas adjoint, la même démonstration montre que si $\underline{\mathfrak{G}}_{\mathrm{ad}}/F_2$ satisfait à l'approximation faible pour le couple $(F_2, (F_2')_{v_2\text{-top}})$, alors le k-tore $N_{k_1/k}(y_1)N_{k_2/k}(y_2)N_{k_3/k}(y_3) = 1$ satisfait à l'approximation faible pour le couple (k, k'). On ignore s'il existe de tels tores ne satisfaisant pas à l'approximation faible.

5.2. Type E_7

On note $H^d = \mathrm{SL}_8/\mu_2$ (resp. $\overline{H}^d = \mathrm{SL}_8/\mu_4$) le groupe maximal de type A_8 du groupe déployé simplement connexe (resp. adjoint) de type E_7. L'image du bord $\mathrm{H}^1(k, \overline{H}^d) \to \mathrm{H}^2(k, \mu_2)$ est formée des classes d'algèbres D (de degré 8) satisfaisant

$$4[D_3] = 0 \in \mathrm{Br}(k).$$

Soit $z \in \mathrm{H}^1(k, \overline{H}^d)$ et D l'algèbre correspondante. Alors on a ${}_zH = \mathrm{SL}_1(D)/\mu_2$.

PROPOSITION 5.2.1. *Soient $a_1, a_2, a_3 \in k^\times$. On note $k_i = k[u]/(u^2 - a_i)$ et $M = k_1 \otimes k_2 \otimes k_3$. On suppose que $M \otimes_k k'$ est un corps et on considère le produit tensoriel d'algèbres de quaternions*

$$D/F_3 = (a_1, t_1) \otimes (a_2, t_2) \otimes (a_3, t_3).$$

On note alors $\mathfrak{G}/F_3[[t_4]]$ le schéma en groupe de Bruhat-Tits simplement connexe de type E_7 de fibre spéciale réductive

$$H/F_3 = \mathrm{SL}_1(D)/\mu_2.$$

On note $\underline{\mathfrak{G}}/\mathcal{O}_{k(t_1,t_2,t_3),t_4}$ *le modèle associé. Si* $M \otimes_k k'$ *est un corps et si* $\underline{\mathfrak{G}}_{\mathrm{gen}}/F_4$ *(resp.* $\underline{\mathfrak{G}}_{\mathrm{ad,gen}}/F_4$*) satisfait à l'approximation faible pour le couple* $(F_4, (F'_4)_{v_4\text{-top}})$*, alors le* k*-tore* $T_{2,M} \subset \mathsf{G}_m \times R_{M/k}(\mathsf{G}_m)$ *(resp.* $T_{1,M}$*) d'équation*

$$x^4 = N_{M/k}(y) \qquad (\textit{resp. } x^2 = N_{M/k}(y))$$

satisfait à l'approximation faible pour le couple (k, k')*.*

DÉMONSTRATION. La condition sur M impose l'anisotropie des groupes semi-simples considérés. On suppose que $\underline{\mathfrak{G}}_{\mathrm{gen}}/F_4$ satisfait à l'approximation faible pour le couple $(F_4, (F'_4)_{v_4\text{-top}})$. Alors le théorème 3.2.1 indique que H/F_3 satisfait à l'approximation faible pour le couple $(F_3, (F'_3)_{v_3\text{-top}})$. La proposition 4.0.2 montre alors que le tore $T_{2,M}$ satisfait à l'approximation faible pour le couple (k, k'). Pour le groupe adjoint, la démonstration est analogue.

EXEMPLE 5.2.2. On part du corps $k_\sharp = \mathsf{C}(a_1, a_2, a_3)$ et on note $\Gamma = \mathcal{G}\mathrm{al}\big(\mathsf{C}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3})/\mathsf{C}(a_1, a_2, a_3)\big)$. Suivant le lemme 2.2.8, $\text{Ш}^2_\omega(\Gamma, \widehat{T}_{2,M_\sharp})$ est non nul et ce tore n'est donc pas une variété rétracte $k_\sharp$-rationnelle. Le théorème 2.2.2, (5') $\Longrightarrow$ (1), indique qu'il existe un corps $k/k_\sharp$ muni d'une complétion k'/k pour une valuation discrète v (de rang 1) de corps résiduel $k_\sharp(T_{2,M_\sharp})$ tel que $T_{2,M_\sharp}(k)$ n'est pas dense dans $T_{2,M_\sharp}(k')$. En particulier, $M_\sharp \otimes_k k'$ est un corps et la proposition montre alors que le $\underline{G} \times_{k(t_1,\ldots,t_4)} F_4$ n'est pas une variété rétracte $k(t_1,t_2,t_3,t_4)$-rationnelle. Ce groupe se descend à $k_\sharp(t_1, \ldots, t_4)$.

REMARQUE 5.2.3. Dans le cas adjoint, le même argument marche puisque $\text{Ш}^2_\omega(\Gamma, \widehat{T}_{1,M_\sharp}) = \text{Ш}^2_\omega(\Gamma, \mathsf{Z}/2\mathsf{Z}) \neq 0$.

5.3. *Type* E_8

On suppose que k contient une racine primitive 3-ième de l'unité ζ. On note $H^d = \mathrm{SL}_9/\mu_3$ le groupe maximal de type A_8 du groupe déployé de type E_8. L'image d'une classe $[z] \in \mathrm{H}^1(k, H^d)$ par le bord $\mathrm{H}^1(k, H^d) \to H^2(k, \mu_3) \xrightarrow{\sim} {}_3\mathrm{Br}(k)$ est une algèbre D de degré 9 et d'exposant 3. La forme tordue correspondante est ${}_zH^d = \mathrm{SL}_1(D)/\mu_3$, c'est la fibre spéciale d'un schéma en groupes lisse $\mathfrak{G}/A$ de fibre générique de type E_8.

PROPOSITION 5.3.1. *Soient* $a_1, a_2 \in k^\times$*. On note* $k_i = k(\sqrt[3]{a_i})$ *et on suppose que* $k_1 \otimes_k k_2 \otimes k'$ *est un corps. On pose*

$$D/F_2 = A_\zeta(a_1, t_1) \otimes A_\zeta(a_2, t_2).$$

On note $\mathfrak{G}/F_2[[t_3]]$ *le schéma en groupe de Bruhat-Tits (construit de façon analogue à celui du §6.1). simplement connexe de type* E_8 *de fibre spéciale réductive*

$$H/k(t_1, t_2) = \mathrm{SL}_1(D)/\mu_3.$$

On note $\underline{\mathfrak{G}}/\mathcal{O}_3$ le schéma en groupes associé à $\mathfrak{G}/F_2[[t_3]]$. Si le groupe $\underline{G}_{\mathrm{gen}}/F_3$ satisfait à l'approximation faible pour le couple $(F_3, (F_3')_{v_3\text{-top}})$, alors le k-tore $T_{2,k_1\otimes k_2} \subset \mathsf{G}_m \times R_{k_1\otimes k_2/k}(\mathsf{G}_m)$ d'équation

$$x^9 = N_{k_1\otimes k_2/k}(y)$$

satisfait à l'approximation faible pour le couple (k, k').

Démonstration. L'hypothèse $k_1 \otimes_k k_2 \otimes_k k'$ connexe impose l'anisotropie des groupes semi-simples considérés. On suppose que $\underline{\mathfrak{G}}_{\mathrm{gen}}/F_3$ satisfait à l'approximation faible pour le couple $(F_3, (F_3')_{v_3\text{-top}})$. Alors H/F_2 satisfait à l'approximation faible pour le couple $(F_2, (F_2')_{v_2\text{-top}})$ suivant le théorème 3.2.1. La proposition 4.0.2 montre alors que le k-tore $T_{2,k_1\otimes k_2}$ satisfait à l'approximation faible pour le couple (k, k').

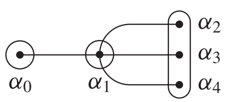
Exemple 5.3.2. On part du corps $k_\sharp = \mathsf{C}(a_1, a_2)$ et on sait alors que le groupe $Ш^2_\omega\big(\mathcal{G}\mathrm{al}(k_\sharp(\sqrt[3]{a_1}, \sqrt[3]{a_2})/k_\sharp), \widehat{T}_{2,k_{\sharp,1}\otimes_{k_\sharp}k_{\sharp,2}}\big)$ est non nul suivant le lemme 2.2.8.(2). Ainsi la variété $T_{2,k_{1,\sharp}\otimes_{k_\sharp}\sharp k_2}$ n'est pas R-triviale et le théorème 2.2.2, (5') $\Longrightarrow$ (1), indique qu'il existe un corps $k/k_\sharp$ muni d'une complétion k' pour une valuation discrète v (de rang 1) de corps résiduel $k_\sharp(T_{2,k_{\sharp,1}\otimes_{k_\sharp}k_{\sharp,2}})$ tel que $T_{2,k_{1,\sharp}\otimes k_{2,\sharp}}(k)$ n'est pas dense dans $T_{2,k_{1,\sharp}\otimes k_{2,\sharp}}(k')$. On note que $k_{1,\sharp}\otimes_{k_\sharp}k_{2,\sharp}\otimes_{k_\sharp}k'$ est un corps et la proposition montre alors que le groupe $\underline{\mathfrak{G}}/k(t_1, \dots, t_4)$ construit n'est pas une variété rétracte $k(t_1, t_2, t_3)$-rationnelle. Ce groupe se descend à $k_\sharp(t_1, \dots, t_4)$.

6. Groupes trialitaires

On s'intéresse maintenant au cas laissé en suspens, celui des groupes trialitaires, i.e. de type quasi-déployé ${}^3D_4$ ou ${}^6D_4$. On rappelle qu'à un tel groupe trialitaire G/k est attaché une extension séparable cubique l/k et une algèbre simple centrale A/l de degré 8, l'algèbre d'Allen de G [31, §43, 44]; on sait que $\mathrm{Cor}^l_k([A]) = 0 \in \mathrm{Br}(k)$.

6.1. *Contruction de $k(t)$-groupes trialitaires*

On travaille d'abord sur $K = k((t))$ et on considère le cas d'une extension cubique $L = l((t))$ pour une extension cubique l/k. Etant donné un $k[[t]]$-schéma $\mathfrak{G}$ en groupes de Bruhat-Tits $\mathfrak{G}$ de type ${}^{3,6}D_4$, on sait que le type quasi-déployé de la fibre spéciale réductive H/k de $\mathfrak{G}$ est donné par un sous-diagramme du diagrame de Dynkin complété



Pour le cas intéressant où $\mathfrak{G}$ n'est pas semi-simple et H est semi-simple, il n'y a alors qu'une possibilité de type, i.e. la fibre spéciale réductive H/k est isogène à $\mathrm{SL}_2 \times R_{l/k}(\mathrm{SL}_2)$. En fait, le groupe H/k est une forme interne de

$$H^{\mathrm{qd}} = \big(\mathrm{SL}_2 \times R_{l/k}(\mathrm{SL}_2)\big)/\mu_2.$$

le μ_2 étant plongé diagonalement. Ce k-groupe H^{qd} apparaît comme la fibre spéciale réductive du O-schéma en groupes de Bruhat-Tits $\mathfrak{P}/O$ du K-groupe quasi-déployé G^{qd}/K associé à L/K associé au sommet α_1. Le centre $R^1_{L/K}(\mu_2)$ de G^{qd} se prolonge en un sous O-schéma en groupes $R^1_{O\times_k l/O}(\mu_2) \to \mathfrak{P}$. Alors le quotient $\mathfrak{P}/R^1_{O\times_k l/O}(\mu_2)$ est un O-modèle lisse du quotient adjoint $G^{\mathrm{qd}}_{\mathrm{ad}}$ de G et de fibre spéciale

$$H^{\mathrm{qd}}/R^1_{l/k}(\mu_2) = \big(\mathrm{SL}_2 \times R_{l/k}(\mathrm{SL}_2)\big)/\mu$$

où μ est donné par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mu_2 & \longrightarrow & \mu & \xrightarrow{\;p\;} & R^1_{l/k}(\mu_2) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & \bigcap & & \bigcap & & \\
1 & \longrightarrow & \mu_2 & \xrightarrow{\mathrm{id}\times \mathrm{Res}^L_k} & \mu_2 \times R_{l/k}(\mu_2) & \xrightarrow{\mathrm{Res}^l_k \times \mathrm{id}} & R_{l/k}(\mu_2) & \longrightarrow & 1.
\end{array}$$

On considère alors le composé

$$\rho\colon \mathrm{H}^1\big(k, H^{\mathrm{qd}}/R^1_{l/k}(\mu_2)\big) \xleftarrow{\sim} \mathrm{H}^1\big(O, \mathfrak{P}/R^1_{O\times_k l/O}(\mu_2)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^1\big(K, G^{\mathrm{qd}}_{\mathrm{ad}}\big)$$

défini par Bruhat-Tits [6, §3]. Le fait que la flèche de gauche soit bijective est le lemme de Hensel (*loc. cit.*, Lemme 2) et la flèche de droite est le changement de base de O à K. Le composé ci-dessus permet donc de construire des K-formes de G qui par torsion arrivent munis d'un O-modèle lisse. En pratique, on se donne un cocycle $z \in Z^1\big(\mathcal{G}\mathrm{al}(\widetilde{k}/k), (H^{\mathrm{qd}}/R^1_{l/k}(\mu_2))(\widetilde{k})\big)$ pour une extension galoisienne finie $\widetilde{k}/k$, et un relevé $z^\flat \in \mathrm{Z}^1\big(\mathcal{G}\mathrm{al}(\widetilde{k}/k), (\mathfrak{P}/R^1_{O\times_k l/O}(\mu_2))(O\times_k \widetilde{k})\big)$. Alors le K-groupe tordu $G = {}_{z^\flat}G^{\mathrm{qd}}/K$ admet le O-modèle lisse $\mathfrak{G} = {}_{z^\flat}\mathfrak{P}/O$ dont la fibre spéciale réductive est $H = {}_zH^{\mathrm{qd}}/k$.

On va estimer la cohomologie galoisienne du k-groupe $(\mathrm{SL}_2 \times R_{l/k}(\mathrm{SL}_2))/\mu$ en utilisant le diagramme commutatif exact de k-groupes

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 1 \arrow[d] & \\
 & 1 \arrow[d] & & \mu_2 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \mu \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{SL}_2 \times R_{l/k}(\mathrm{SL}_2) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \big(\mathrm{SL}_2 \times R_{l/k}(\mathrm{SL}_2)\big)/\mu \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mu_2 \times R_{l/k}(\mu_2) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id} \times N_{l/k}"] & \mathrm{SL}_2 \times R_{l/k}(\mathrm{SL}_2) \arrow[r] & \mathrm{PGL}_2 \times R_{l/k}(\mathrm{PGL}_2) \arrow[r] \arrow[d] & 1. \\
 & \mu_2 \arrow[d] & & 1 & \\
 & 1 & & &
\end{tikzcd}
$$

LEMME 6.1.1.

(1) *L'image de* $\mathrm{H}^1\big(k, (\mathrm{SL}_2 \times R_{l/k}(\mathrm{SL}_2))/\mu\big)$ *dans* $\mathrm{H}^1\big(k, \mathrm{PGL}_2 \times R_{l/k}(\mathrm{PGL}_2)\big) = \mathrm{H}^1(k, \mathrm{PGL}_2) \times \mathrm{H}^1(l, \mathrm{PGL}_2)$ *consiste en les classes de couples d'algèbres de quaternions* $(B/k, C/l)$ *satisfaisant* $[B] = \mathrm{cor}_k^l([C])$.

(2) *On note* $[(D/k, E/l)]$ *l'image de* $[z]$ *dans* $H^1(k, \mathrm{PGL}_2) \times H^1(l, \mathrm{PGL}_2)$.

   (a) *Le groupe tordu* $H = {}_zH^{\mathrm{qd}}$ *est k-isomorphe à*

$$\big(\mathrm{SL}_1(D) \times R_{l/k}(\mathrm{SL}_1(E))\big)/\mu_2.$$

   (b) *La classe de l'algèbre d'Allen du* K*-groupe* G/K *associé à* z *est* $[E_L] + \mathrm{Res}_K^L([D_K]) \in \mathrm{Br}(L)$.

   (c) *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

      (i) D *est un corps gauche;*

      (ii) H *est anisotrope;*

      (iii) G/K *est anisotrope.*

DÉMONSTRATION. (1) Le diagramme précédent donne lieu au diagramme commutatif exact d'ensembles pointés

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1\big(k, (\mathrm{SL}_2 \times R_{l/k}(\mathrm{SL}_2))/\mu\big) \arrow[d] & \\
\mathrm{H}^1(k, \mathrm{PGL}_2) \times \mathrm{H}^1(l, \mathrm{PGL}_2) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\partial"'] & \mathrm{H}^2(k, \mu_2) \oplus \mathrm{H}^2(l, \mu_2) \arrow[d, "\mathrm{id} \times \mathrm{Cor}^l_k"'] \\
\mathrm{H}^2(k, \mu_2) \arrow[r, equal] & \mathrm{H}^2(k, \mu_2).
\end{tikzcd}$$

Ainsi l'image de $\mathrm{H}^1(k, (\mathrm{SL}_2 \times R_{l/k}(\mathrm{SL}_2))/\mu)$ dans $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{PGL}_2 \times R_{l/k}(\mathrm{PGL}_2)) = \mathrm{H}^1(k, \mathrm{PGL}_2) \times \mathrm{H}^1(l, \mathrm{PGL}_2)$ consiste en les classes de couples d'algèbres de quaternions $(B/k, C/l)$ satisfaisant $[B] = \mathrm{cor}^l_k([C])$.

(2) (a) Le k-groupe ${}_z\big(\mathrm{SL}_2 \times R_{l/k}(\mathrm{SL}_2)\big)$ est k-isomorphe à $\mathrm{SL}_1(D) \times R_{l/k}(\mathrm{SL}_1(E))$. Comme la torsion est intérieure, on peut quotienter par le μ_2 diagonal et on conclut que H est k-isomorphe à $\big(\mathrm{SL}_1(D) \times R_{l/k}(\mathrm{SL}_1(E))\big)/\mu_2$.

(b) On utilise maintenant le sous-O-groupe $R^1_{O_L/O}(\mu_2)$ de $\mathfrak{P}$ avec le diagramme commutatif de bords [27, IV.4.2] pour la cohomologie étale

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(K, G^{\mathrm{qd}}) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(K, G^{\mathrm{qd}}_{\mathrm{ad}}) \arrow[r, "\delta_K"] & \mathrm{H}^2(K, R^1_{L/K}(\mu_2)) \\
\mathrm{H}^1(O, \mathfrak{P}) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \mathrm{H}^1\big(K, \mathfrak{P}/R^1_{O_L/O}(\mu_2)\big) \arrow[r, "\delta_O"] \arrow[u] \arrow[d] & \mathrm{H}^2(O, R^1_{O/O}(\mu_2)) \arrow[u] \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{H}^1(k, H^{\mathrm{qd}}) \arrow[r] & \mathrm{H}^1(k, H^{\mathrm{qd}}/R^1_{l/k}(\mu_2)) \arrow[r, "\delta_k"] & \mathrm{H}^2\big(k, R^1_{l/k}(\mu_2)\big).
\end{tikzcd}$$

La flèche $\mathrm{H}^2(O, R^1_{l/k}(\mu_2)) \to \mathrm{H}^2(O, R^1_{L/k}(\mu_2))$ est un isomorphisme [41, III.3.11.(a)]. La classe de l'algèbre d'Allen de G est l'image de $\delta_K([z^\flat])$ par l'application $\mathrm{H}^2(K, R^1_{L/K}(\mu_2)) \to \mathrm{H}^2(K, R_{L/K}(\mu_2)) = {}_2\mathrm{Br}(L)$. Le diagramme indique donc que cette classe est l'image par ${}_2\mathrm{Br}(l) \to {}_2\mathrm{Br}(k)$ de l'image de $\delta_k([z]) \in \mathrm{H}^2(k, R^1_{l/k}(\mu_2)$ dans $\mathrm{Br}(l)$. Cette classe se calcule par diagramme commutatif

$(\star_1)$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1\big(k, (\mathrm{SL}_2 \times R_{l/k}(\mathrm{SL}_2))/\mu\big) \arrow[r, "\mathrm{bord}"] \arrow[d] & \mathrm{H}^2(k, \mu) \arrow[r] \arrow[d, "p_*"] & \mathrm{H}^2(k, \mu_2) \times \mathrm{H}^2(k, R_{l/k}(\mu_2)) \arrow[d, "\mathrm{Res}^l_k \times \mathrm{id}"] \\
\mathrm{H}^1\big(k, H^{\mathrm{qd}}/R^1_{l/k}(\mu_2)\big) \arrow[r, "\mathrm{bord}"] & \mathrm{H}^2(L, R^1_{l/k}(\mu_2)) \arrow[r] & \mathrm{H}^2(k, R_{l/k}(\mu_2)) \cong {}_2\mathrm{Br}(l)
\end{tikzcd}$$

où le carré de droite provient du diagramme $(\star_1)$ ci-dessus. On obtient que l'image de $\delta_k([z])$ dans $\mathrm{H}^2(k, R_{l/k}(\mu_2) = {}_2\mathrm{Br}(l)$ est $[D_l] + [E]$, d'où la formule souhaitée.

(3) L'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) est la correspondance sous-groupes parahoriques/sous-groupes paraboliques [5, §5.1.31] appliquée à ${}_{z^\flat}\mathfrak{P}/O$ et H/k.

Montrons l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Si D est un corps gauche, alors $[D] \neq 0$ dans $\mathrm{Br}(k)$ et la formule $[D] = \mathrm{cor}_k^l([E])$ indique que $[E] \neq 0$ dans $\mathrm{Br}(l)$, donc que E est une l-algèbre de quaternions à division. Ainsi le k-groupe $\mathrm{SL}_1(D) \times R_{l/k}(\mathrm{SL}_1(E))$ est anisotrope et il en est de même de H.

Si D n'est pas un corps gauche, alors $D \cong M_2(k)$ et H est isotrope. Par contraposition, ceci montre l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i).

En somme, on a construit un K-groupe G/K admettant un modèle $\mathfrak{G}/O$ dont la fibre spéciale est le groupe H. Comme on l'a expliqué au §3.2, ce K-groupe se prolonge de façon unique en un schéma en groupes réductifs «de lacets» $\underline{G}/k[t, t^{-1}]$ et par recollement, on obtient finalement un schéma en groupes $\underline{\mathfrak{G}}/k[t]$ dont la fibre spéciale réductive en 0 est H. En outre, la classe de l'algèbre d'Allen de $\underline{G}_{k(t)}$ est $[C_{l(t)}] + \mathrm{Res}_l^{l(t)}([B_l]) \in \mathrm{Br}(l(t))$. En effet cette classe est non ramifiée sur la droite affine $\mathbf{A}_k^1$, elle est donc constante par la suite exacte de Faddeev [50, p. 122] et sa valeur est alors donnée par sa restriction à K.

6.2. Etude de la rationalité

On note M le produit contracté $M = \mathsf{G}_m \wedge^{\mu_2} \big(\mathrm{SL}_1(D) \times R_{l/k}(\mathrm{SL}_1(E))\big)$, c'est une extension centrale de H par G_m [27, 1.3.1.3]. Les restrictions des morphismes $\mathrm{SL}_1(D) \times R_{l/k}(\mathrm{SL}_1(E)) \to \mathrm{GL}_1(D) \times R_{l/k}(\mathrm{GL}_1(E))$ et $\mathsf{G}_m \to \mathrm{GL}_1(D) \times R_{l/k}(\mathrm{GL}_1(E))$, $x \mapsto (x^{-3}, x_l)$, sont égales sur μ_2, d'où un morphisme $u : M \to \mathrm{GL}_1(D) \times R_{l/k}(\mathrm{GL}_1(E))$. Par construction, ce morphisme u est un plongement et son image est le sous-groupe fermé défini par l'équation $\mathrm{Nrd}_D(x) = \mathrm{Nrd}_E(y)$. On a donc

$$M = \big\{(x, y) \in \mathrm{GL}_1(D) \times R_{l/k}(\mathrm{GL}_1(E)) \bigm| \mathrm{Nrd}_D(x) = \mathrm{Nrd}_E(y)\big\}.$$

Comme le G_m-torseur $M \to H$ admet une section rationnelle, le groupe M est stablement k-rationnel à H. Le lemme suivant va permettre de construire un exemple explicite de tel groupe M qui n'est pas k-rationnel. On note σ un générateur de $\mathcal{G}\mathrm{al}(l/k)$.

LEMME 6.2.1. *Soit $b \in l^\times$. On pose $a = N_{l/k}(b)$ et on suppose que $a \notin (k'^\times)^{\times 2}$. On définit les algèbres de quaternions suivantes*

$$Q/k(s) := (s, a), \qquad E/l(s) = (s, b).$$

et le groupe

$$J/k(s) := \{(x, y) \in \mathrm{SL}_1(Q) \times R_{l/k}(\mathrm{SL}_1(E)) \mid \mathrm{Nrd}_Q(x) = \mathrm{Nrd}_E(y)\}.$$

On note T/k le sous k-tore de $R_{k(\sqrt{a})/k}(\mathsf{G}_m) \times R_{l(\sqrt{b})/k}(\mathsf{G}_m)$ défini par

$$N_{k(\sqrt{a})/k}(x) = N_{l(\sqrt{b})/l}(y)$$

Si $J/k(s)$ est satisfait à l'approximation faible pour le couple $(k(s), (k'(s))_{v\text{-top}})$, alors le k-tore T satisfait à l'approximation faible pour le couple (k, k').

Démonstration. L'hypothèse entraîne que la $k'((s))$-algèbre de quaternions (a, t) est à divisions et donc que $J \times_{k(s)} k'((s))$ est un groupe anisotrope. La preuve est alors analogue à celle de la proposition 4.0.2.

On choisit maintenant k, l, et $b \in l^\times$ de sorte que l/k est cyclique de degré 3, $[l(\sqrt{b}, \sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}) : l] = 8$ où $b_i = \sigma^i(b)$ pour $i = 1, 2$ sont les conjugués de b sous $\mathscr{G}\mathrm{al}(l/k)$. On remarque que le tore $T \times_k l$ n'est pas autre chose que le tore des normes communes

$$N_{l(\sqrt{a})/l}(x) = N_{l(\sqrt{b_0})/l}(y_0) = N_{l(\sqrt{b_1})/l}(y_1) = N_{l(\sqrt{b_2})/l}(y_2) \neq 0.$$

qui est stablement k-rationnel au tore des normes communes

$$N_{l(\sqrt{b_0})/l}(y_0) = N_{l(\sqrt{b_1})/l}(y_1) = N_{l(\sqrt{b_2})/l}(y_2) \neq 0$$

vu que $a = b_0\, b_1\, b_2$. Il nous reste à construire un exemple «explicite» de la même manière qu'en 5.1.2.

Démonstration du théorème 1.1.(1). Il s'agit de construire k, l, a et b pour que la construction précédente fonctionne. On part du corps C et on note $l_\sharp = \mathsf{C}(w_0, w_1, w_2)$ muni de la permutation cyclique σ. On pose $k_\sharp = l_\sharp^{\langle\sigma\rangle}$ et $a = w_0\, w_1\, w_2 \in k_\sharp$ et $b = w_0$. D'après le théorème 2.2.12, le $l_\sharp$-tore des normes communes

$$N_{l_\sharp(\sqrt{w_0})/l_\sharp}(y_0) = N_{l_\sharp(\sqrt{w_1})/l_\sharp}(y_1) = N_{l_\sharp(\sqrt{w_2})/l_\sharp}(t_2) \neq 0$$

n'est pas R-trivial. A fortiori le $k_\sharp$-tore d'équation

$$T_\sharp : N_{k_\sharp(\sqrt{a})/k_\sharp}(x) = N_{l_\sharp(\sqrt{b})/l_\sharp}(y)$$

n'est pas R-trivial. Le théorème 2.2.2, (5') $\Longrightarrow$ (1) montre l'on peut choisir une extension de corps $k/k_\sharp$ et une complétion k' de k pour une valuation discrète (de rang 1) de corps résiduel $k_\sharp(T_\sharp)$ tel que $T = T_\sharp \times_{k_\sharp} k$ ne satisfait pas l'approximation faible pour un couple (k, k'). Alors le tore T est anisotrope et le lemme 6.2.1 montre que le $k(s)$-groupe $J/k(s)$ (avec les notations du lemme) ne satisfait pas l'approximation faible pour le couple $(k(s), (k'(s))_{v\text{-top}})$.

Maintenant le lemme 6.1.1 indique qu'il existe une classe

$$[z] \in \mathrm{H}^1\big(k(s), \big(\mathrm{SL}_2 \times R_{l(s)/k(s)}(\mathrm{SL}_2)\big)/\mu\big)$$

dont les algèbres de quaternions associées sont respectivement $(s, a)/k(s)$ et $(s, b)/l(s)$. En appliquant le théorème 3.2.1, il suit que le groupe $\underline{\mathfrak{G}}_{k(u)(t)}$ ne satisfait pas l'approximation faible pour le couple $(k(s, t), (k'(s, t)_{v\text{-top}})$. On conclut que le $k(s, t)$-groupe $\underline{\mathfrak{G}}_{k(s)(t)}$ trialitaire n'est pas une variété $k(s, t)$-rationnelle.

Enfin ce groupe est défini sur $k_\sharp(s, t)$ et n'est pas une variété rétracte $k_\sharp(s, t)$-rationnelle. Suivant le lemme 6.1.1.(2), son algèbre d'Allen est Brauer-équivalente à

$$(a, s)_{l_\sharp(s,t)} \otimes_{l_\sharp(s,t)} (b, t)_{l_\sharp(s,t)} \cong (w_1 w_2, t)$$

donc est d'indice de Schur 2.

REMARQUE 6.2.2. Notons que cet exemple produit au passage un groupe $\mathfrak{G}/l_\sharp(t)$ simplement connexe de type ${}^1D_4$ qui n'est pas une variété rétracte $l_\sharp(t)$-rationnelle.

REMARQUE 6.2.3. Pour la rationalité du groupe adjoint $(\mathfrak{G}/R^1_{l_\sharp/k}(\mu_2))/k(t)$, on a affaire au groupe $\overline{H} := H/\mu_2$. La même méthode que ci-dessus permet de montrer que $\overline{H}$ est stablement k-rationnellement équivalent au k-groupe

$$M^\flat := \big\{(x, y) \in \mathrm{GL}_1(D) \times R_{l/k}(\mathrm{GL}_1(E)) \bigm| \mathrm{Nrd}_D(x) = N_{l/k}(\mathrm{Nrd}_E(y))\big\}.$$

Une première observation est que

$$(\star_2) \qquad N_{l/k}(\mathrm{Nrd}_E(E^\times)) \subset \mathrm{Nrd}(D^\times).$$

On note X/k (resp. Y/l) la conique associée à D (resp. E). On sait que $\mathrm{Nrd}(D^\times) = N_X(k)$ est le groupe de normes de X [16, lemme 1] (ou [26, §2, ex. 10]) et itou pour E/l. Si l'/l est une extension finie déployant E, alors la condition $[D] = \mathrm{cor}^l_k([E])$ entraîne que l'/k déploie D. Ainsi $N_{l/k}(N_{l'/l}(l'^\times)) = N_{l'/k}(l'^\times) \subset \mathrm{Nrd}(D^\times)$ et en prenant toutes extensions finies l'/l déployant E, on obtient l'inclusion $(\star_2)$.

Nous allons montrer que $M^\flat$ est rétracte k-rationnel au moyen du critère de relèvement de Saltman [48, Th. 3.8] (voir aussi [14, Prop. 1.3]). Par inspection de la démonstration du critère, il suffit de montrer la surjectivité de l'application $M^\flat(A) \to M^\flat(\kappa)$ où A est un anneau local d'un k-espace affine et κ désigne son corps résiduel. On note F_A le corps de fractions de A. Soit $(\overline{x}, \overline{y}) \in$

$M^\flat(\kappa)$. Comme $R_{l/k}(\mathrm{GL}_1(E))$ est un ouvert d'un espace affine, il existe $y \in R_{l/k}(\mathrm{GL}_1(E))(A)$ relevant $\overline{y}$. D'après l'inclusion ($\star_2$) appliquée à F_A, on a

$$N_{l\otimes_k F_A/F_A}(\mathrm{Nrd}_{E\otimes_l(l\otimes_k F_A)}(y)) \in \mathrm{Nrd}((D \otimes_k F_A)^\times) \cap A^\times.$$

Or Colliot-Thélène et Ojanguren ont montré que $\mathrm{Nrd}\big((D \otimes_k F_A)^\times\big) \cap A^\times = \mathrm{Nrd}((D \otimes_k A)^\times)$ [11, Corollaire 2.7]. Il existe donc $d \in (D \otimes_k A)^\times$ tel que $N_{l\otimes_k A/A}(\mathrm{Nrd}_{E\otimes_l(l\otimes_k A)}(y)) = \mathrm{Nrd}_{D\otimes_k A}(d)$. Ainsi $(d, y) \in M^\flat(A)$, et on a

$$(\overline{d}, \overline{y}) \,.\, (\overline{x}, \overline{y})^{-1}) = (\overline{d}(\overline{x})^{-1}, 1) \in \mathrm{SL}_1(D)(\kappa) \subset M^\flat(\kappa).$$

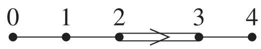
Suivant le théorème de Wang [26, 2.8.12], on a $[D_\kappa^\times, D_\kappa^\times] = \mathrm{SL}_1(D)(\kappa)$, donc $\mathrm{SL}_1(D)(A)$ se surjecte sur $\mathrm{SL}_1(D)(\kappa)$. Ceci permet de conclure que $(\overline{x}, \overline{y})$ se relève à $M^\flat(A)$.

En conclusion, $M^\flat$ et $\overline{H}$ sont rétractes k-rationnels. On ne peut donc pas conclure sur la rétracte $k(t)$-rationalité de $(\mathfrak{G}/R^1_{l/k}(\mu_2))/k(t)$.

REMARQUE 6.2.4. Un argument similaire à celui de la proposition 9.0.2 montre qu'un F-groupe trialitaire simplement connexe superversel de type ${}^3D_4$ n'est pas variété rétracte F-rationnelle.

7. Groupes de type F_4

Dans cette section, nous tentons d'appliquer la méthode précédente aux groupes de type F_4. Rappelons le diagramme de Dynkin étendu sous-jacent



La théorie de Bruhat-Tits permet donc de construire des groupes de type F_4 sur $k((t))$ qui dégénèrent en des groupes semi-simples des types suivants

$$A_1 \times C_3, \quad A_2 \times A_2, \quad A_3 \times A_1, \quad B_4$$

qui sont respectivement des formes internes des groupes suivants

$$(\mathrm{SL}_1 \times \mathrm{Sp}_6)/\mu_2, \quad (\mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_3)/\mu_3, \quad (\mathrm{SL}_4 \times \mathrm{SL}_1)/\mu_2, \quad \mathrm{Spin}_8\,.$$

Dans le premier cas, cette k-forme est un k-groupe

$$(\mathrm{SL}_1(D) \times \mathrm{Sp}(D, h))/\mu_2,$$

où D est une algèbre de quaternions et h une forme hermitienne non dégénérée sur D^3. Par la même méthode qu'au §6, ce groupe est stablement k-birationnel à

$$H := \big\{(x, y) \in \mathrm{GL}_1(D) \times \mathrm{GSp}_1(D, h) \;\big|\; \mathrm{Nrd}(x) = \mu(y)\big\},$$

où $\mu : \mathrm{GSp}_1(D,h) \to \mathsf{G}_m$ désigne le multiplicateur.

LEMME 7.0.1. *Le groupe H/k est stablement k-rationnel.*

DÉMONSTRATION. Le groupe H s'insère dans une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{SL}_1(D) \times \mathrm{Sp}_1(D,h) \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} \mathsf{G}_m \longrightarrow 1.$$

Les groupes $\mathrm{SL}_1(D)$ et $\mathrm{Sp}_1(D,h)$ sont k-rationnels. Vu que Sp_6 est de type C_3, le lemme 3 de [38] indique que $\mu(\mathrm{GSp}_1(D,h)(F)) = \mathrm{Nrd}((D \otimes_k F)^\times) = \alpha(H(F))$ pour tout F/k. Ainsi les images de $\alpha : H(F) \to F^\times$ et $\mathrm{Nrd} : D^\times \to F^\times$ coïncident pour tout F/k. La proposition 3 de [38] permet de conclure que le groupe H est stablement k-birationnel à $\mathrm{GL}_1(D)$, donc stablement k-rationnel.

Dans le second cas, il s'agit d'un k-groupe

$$(\mathrm{SL}_1(D) \times \mathrm{SL}_1(D))/\mu_3$$

pour une algèbre simple centrale D de degré 3. On note G le sous-groupe de $\mathrm{GL}_1(D) \times \mathrm{GL}_1(D)$ défini par $\mathrm{Nrd}_D(y_1) = \mathrm{Nrd}_D(y_2)$. Il contient le tore diagonal G_m et G est k-birationnel à $(\mathsf{G}_m \times G)/\mathsf{G}_m$. Par ailleurs, le morphisme $\mathrm{SL}_1(D) \times \mathrm{SL}_1(D) \to G/\mathsf{G}_m$ est surjectif de noyau μ_3 diagonal, donc $(\mathrm{SL}_1(D) \times \mathrm{SL}_1(D))/\mu_3$ est stablement k-birationnel au groupe G. Ce k-groupe G est stablement k-rationnel puisque isomorphe à $\mathrm{GL}_1(D) \times \mathrm{SL}_1(D)$ en tant que k-variété.

Dans le troisième cas, on a affaire à un groupe

$$(\mathrm{SL}_2(D) \times \mathrm{SL}_1(D))/\mu_2$$

pour une algèbre de quaternions D et un tel groupe est de même une variété stablement k-rationnelle. Dans le dernier cas, on tombe sur le groupe des spineurs $\mathrm{Spin}(q)$ d'une 3-forme de Pfister q. Il est alors connu que le groupe $\mathrm{Spin}(q)$ est k-rationnel (Chernousov-Merkurjev-Rost [39], Theorem 8.6). En conclusion, notre méthode ne permet pas de construire de variétés de groupe de type F_4 non rétractes k-rationnelles.

8. *R*-équivalence et approximation faible

Pour les k-groupes algébriques linéaires, nous nous proposons de montrer que le défaut de R-équivalence s'interprète comme un défaut d'approximation faible pour le corps $k(t)$ et ses complétions en zéro $k((t))$ et à l'infini $k((t^{-1}))$.

8.1. Comparaison

Soit H/k un groupe algébrique linéaire. On pose

$$\begin{aligned} L(H)(k) &= A\big(H, k((t)) \times k\big(\big(\tfrac{1}{t}\big)\big), k(t)\big) \\ &= \overline{H(k(t))} \setminus \Big(H(k((t))) \times H\Big(k\Big(\Big(\tfrac{1}{t}\Big)\Big)\Big)\Big), \end{aligned}$$

c'est le défaut d'approximation faible pour les valuations en 0 et à l'infini du corps $k(t)$. On a une flèche naturelle (fonctorielle en H et en k), $j_k : H(k) \to L(H)(k), h \mapsto [(h, 1)]$.

PROPOSITION 8.1.1. *La flèche j_k induit une bijection $H(k)/R \xrightarrow{\sim} L(H)(k)$. En outre, la réciproque applique $(h_1, h_2) \in H(k[[t]]) \times H\big(k\big[\big[\tfrac{1}{t}\big]\big]\big)$ sur $h_2(\infty)^{-1}\, h_1(0)$.*

REMARQUE 8.1.2. Si H est anisotrope, on a $H(k[[t]]) = H(k((t)))$ (resp. $H\big(k\big[\big[\tfrac{1}{t}\big]\big]\big) = H\big(k\big(\big(\tfrac{1}{t}\big)\big)\big)$ suivant le théorème de Bruhat-Tits-Rousseau ([47, V.2.3], voir aussi [45]). Dans ce cas l'application, l'application réciproque de la proposition 8.1.1 est définie par la formule donnée.

LEMME 8.1.3.

(1) *On a dans $H(k((t)))_{t\text{-top}}$ l'inclusion*

$$\ker\big(H(k[[t]]) \to H(k)\big) \times \ker\big(H\big(k\big[\big[\tfrac{1}{t}\big]\big]\big) \to H(k)\big) \subset \overline{H(k(t))}.$$

(2) *Si H est réductif, alors $H(k(t))$ est dense dans $H\big(k((t))\big)_{t\text{-top}}$.*

DÉMONSTRATION. Si le corps de base k est fini, cela est réglé par le lemme 2.3.1. On peut donc supposer le corps k infini.

(1) Suivant Raghunathan [46, prop. 1.3], il existe une famille finie de k-tores algébriques k-rationnels $T_1, \ldots, T_l$ et de morphismes $f_i : T_i \to H$ et des éléments $h_1, \ldots, h_l$ de $H(k)$ tels que l'application

$$\begin{aligned} \prod_{i=1,\ldots,l} \operatorname{Ker}\big(T_i(k[[t]]) \to T_i(k)\big) &\longrightarrow \ker(H(k[[t]]) \to H(k)) \\ (t_1, \ldots, t_l) &\longmapsto {}^{h_1}t_1 \ldots {}^{h_l}t_l \end{aligned}$$

soit surjective. Il en est de même pour $k\big[\big[\tfrac{1}{t}\big]\big]$, ce qui nous ramène au cas d'un k-tore T k-rationnel. Or ce cas est trivial puisque T satisfait l'approximation faible suivant le lemme 2.1.3.(1).

(2) La proposition 2.3.2 nous ramène au cas anisotrope. On a alors

$$H(k((t))) = H(k[[t]]) = H(k) \ltimes \ker(H(k[[t]]) \to H(k)).$$

Ainsi le (1) montre que $H(k((t))) \subset \overline{H(k(t))}$.

Démonstration de la proposition 8.1.1. Montrons tout d'abord que l'application passe au quotient par la R-équivalence. On note A l'anneau semi-local de la droite projective en 0 et à l'infini. Si $h \in R(k, H)$, il existe $f \in H(A)$ tel que $f(0) = h$ et $f(\infty) = 1$. On a $(h, 1) = (f(0), f(\infty)) = f \,.\, \big(f^{-1} f(0), f^{-1} f(\infty)\big)$ d'où

$$(h, 1) \in H(k(t)) \,.\, \Big(\ker(H(k[[t]]) \to H(k)\big) \times \ker\Big(H\big(k\big[\big[\tfrac{1}{t}\big]\big]\big) \to H(k)\Big)\Big).$$

Le lemme 8.1.3 indique que le groupe de droite est inclus dans $\overline{H(k(t))}$. On conclut que $(h, 1) \in \overline{H(k(t))}$.

On dispose donc d'une application $j_k : H(k)/R \to L(H)(k)$. Pour montrer sa bijectivité, on procède par réduction au cas anisotrope. Soit S un k-tore maximal déployé. On a considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} (Z_H(S)/S)(k)/R & \xleftarrow{\sim} & Z_H(S)(k)/R & \xrightarrow{\sim} & H(k)/R \\ \downarrow{\scriptstyle j_k} & & \downarrow{\scriptstyle j_k} & & \downarrow{\scriptstyle j_k} \\ L(Z_H(S)/S)(k) & \xleftarrow{\sim} & L(Z_H(S))(k) & \xrightarrow{\sim} & L(H)(k). \end{array}$$

Les isomorphismes du haut proviennent du lemme 1.7 de [23], ceux du bas de la proposition 2.3.2. Quitte à remplacer H par $Z_H(S)/S$, on peut supposer H anisotrope. On définit une application

$$s_k : H\big(k[[t]]\big) \times H\big(k\big[\big[\tfrac{1}{t}\big]\big]\big) \to H(k)/R, \quad (h_1, h_2) \mapsto h_2(\infty)^{-1}\, h_1(0).$$

Montrons d'abord que s_k induit une application $s_k : L(G) \to H(k)/R$. En effet, si $h \in H(k(t))$, alors $s_k(hh_1, hh_2) = h_2(\infty)^{-1} h(\infty)^{-1} h(0) h_1(0) = s_k(h_1, h_2)$. De plus le composé $s_k \circ j_k$ est l'identité de $H(k)/R$ de façon triviale. Pour établir la bijectivité, il suffit de vérifier que j_k est surjective. Le lemme 8.1.3 indique que le composé

$$H(k) \times H(k) \longrightarrow H\big(k((t))\big) \times H\big(k\big(\big(\tfrac{1}{t}\big)\big)\big) \to L(H)(k)$$

est surjectif. Ce composé est $H(k)$-invariant (pour l'action diagonale à gauche) ce qui permet de conclure que j_k est surjectif.

Corollaire 8.1.4. *Si H satisfait l'approximation faible pour le corps $k(t)$ et les places en* 0 *et à l'infini, alors $H(k)/R = 1$.*

La proposition 2.3.1 produit le corollaire suivant.

Corollaire 8.1.5. *Si k est un corps fini, alors H est R-trivial.*

Celui-ci contribue à donner une première caractérisation des groupes R-triviaux.

LEMME 8.1.6. *Soit H/k un groupe algébrique linéaire connexe. On note $\eta \in H(k(H))$ le point générique de H. Alors H est R-trivial si et seulement si $[\eta] \in \operatorname{Im}\big(H(k)/R \to H(k(H))/R\big)$.*

DÉMONSTRATION. Si k est un corps fini, cela résulte du corollaire précédent. On suppose donc k infini. Le sens direct étant trivial, supposons que $[\eta] = [\underline{h}] \in H(k(H))/R$ pour un élément $\underline{h} \in H(k)$. Il existe alors un ouvert $V \subset \mathbf{A}^1_k \times_k H$ tel que $U_0 = (\{0\} \times_k H) \cap V$ (resp. $U_1 = (\{1\} \times_k H) \cap V$) est non vide et un morphisme $f : V \to H \times_k H$, qui commute avec la seconde projection sur H, et tel que $f_{|U_0}$ s'identifie à la composée $U_0 \to H \xrightarrow{\underline{h}, \mathrm{id}_H} H \times_k H$, $f_{|U_1}$ s'identifie au plongement diagonal $U_1 \subset H \to H \times_k H$. On pose $U = U_0 \cap U_1$. Alors si $h \in U(k)$, h est R-équivalent à $\underline{h}$ suivant l'élément f_{V_h} qui relie $\underline{h}$ et h. Ainsi $U(k)/R = 1$ et la proposition 11 de [12] indique que $H(k)/R = 1$. On conclut que H est R-trivial.

8.2. Caractérisation des k-groupes réductifs R-triviaux

PROPOSITION 8.2.1. *Soit G un k-groupe algébrique réductif. On considère les assertions suivantes:*

(i) *G est R-trivial;*

(ii) *Pour tout k-anneau de valuation discrète A, et de corps résiduel κ, l'application $G(A) \to G(\kappa)/R$ est surjective.*

(ii') *Pour tout k-anneau de valuation discrète A de corps résiduel $\kappa = k(G)$, l'application $G(A) \to G(\kappa)/R$ est surjective.*

(iii) *Pour tout k-anneau de valuation discrète A de corps des fractions K, l'application $G(K) \to G(\widehat{K})/R$ est surjective.*

(iii') *Pour tout k-anneau de valuation discrète A de corps des fractions K, et de corps résiduel $\kappa = k(G)$, l'application $G(K) \to G(\widehat{K})/R$ est surjective.*

(iv) *Pour tout k-anneau de valuation discrète A de corps des fractions K, $G(K)$ est dense dans $G(\widehat{K})$.*

(iv') *Pour tout k-anneau de valuation discrète A de corps des fractions K, et de corps résiduel $\kappa = k(G)$, $G(K)$ est dense dans $G(\widehat{K})$.*

Alors on a le diagrame d'implications suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{(i)} \Longleftrightarrow & \text{(ii)} & \Longleftrightarrow & \text{(iii)} & \Longleftarrow & \text{(iv)} \\
& \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Downarrow \\
& \text{(ii')} & \Longleftrightarrow & \text{(iii')} & \Longleftarrow & \text{(iv')}.
\end{array}$$

DÉMONSTRATION. Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (ii') (resp. (i) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iii')) sont triviales.

(ii') $\Longrightarrow$ (i): Comme G/k est lisse, le corps $\kappa = k(G)$ est une extension finie séparable du corps $F_d = k(t_1, \dots, t_d)$ où d désigne la dimension de G. On réalise alors κ comme le corps résiduel d'un point M de la droite affine $\mathbf{A}^1_{F_d}$. On note alors R l'anneau local de M et $K = F_{d+1}$ son corps de fractions. Notre hypothèse entraîne que l'application $G(R) \to G(\kappa)/R$ est surjective. Cette application factorise selon

$$G(A) \longrightarrow G(K) \longrightarrow G(\widehat{K}) \longrightarrow G(\widehat{K})/R \xrightarrow{\mathrm{sp}} G(\kappa)/R$$

où sp est le morphisme de spécialisation défini en [24, th. 0.2]. Il suit que $G(K)/R \to G(\kappa)/R$ est surjectif. Or $G(k)/R \cong G(F_d)/R$ [21, lemme II.1.1.(c)], d'où la surjectivité de $G(k)/R \to G(\kappa)/R$. Comme $\kappa = k(G)$, le lemme 8.1.6 permet de conclure que G est R-trivial.

(ii') $\Longrightarrow$ (i): On garde les notations précédentes. En utilisant que la spécialisation $G(\widehat{K})/R \to G(\kappa)/R$ est un isomorphisme (*ibid*), le fait que $G(K) \to G(\widehat{K})/R$ soit surjectif entraîne aussitôt la surjectivité de $G(k) \to G(\kappa)/R$.

(iv) $\Longrightarrow$ (iii): Soit R un k-anneau de valuation discrète de corps résiduel κ. On suppose que $G(K)$ est dense dans $G(\widehat{K})$. Suivant [23, lemme 2.4], le sous-groupe ouvert $\ker(G(\widehat{R}) \to G(\kappa))$ est inclus dans $RG(\widehat{K})$. La topologie quotient sur $G(\widehat{K})/R$ est donc la topologie discrète et on conclut que le morphisme $G(K) \to G(\widehat{K})/R$ est surjectif.

(iv') $\Longrightarrow$ (iii'): itou.

REMARQUE 8.2.2. L'argument est calqué sur celui de la proposition 7.5.6 de [26].

8.3. Problématique de la spécialisation

Soit A un anneau de valuation discrète (de rang 1), F son corps des fractions F, et k son corps résiduel. Soit $\mathfrak{X}/\mathrm{Spec}(A)$ est un schéma projectif, X/F sa fibre générique et $X_\natural/k$ sa fibre fermée. Kollár [32] et Madore [35, p. 19] ont indépendamment montré que la spécialisation $X(F) = \mathfrak{X}(A) \to X_\natural(k)$ induit une application $X(F)/R \to X_\natural(k)/R$.

Si $\mathfrak{G}/A$ est un schéma en groupes réductifs de fibre générique G/F et de fibre spéciale $\mathfrak{G}_\natural/k$, nous avons établi un résultat analogue [23]. Les schémas en groupes de Bruhat-Tits des sections précédentes ne sont pas réductifs. C'est donc une question ouverte de définir une application de spécialisation $G(F)/R \to \mathfrak{G}_\natural(k)/R$ pour de tels groupes qui jouerait le rôle de la proposition 3.1.1. Le cas échéant, cela montrerait que le défaut d'approximation faible pourrait être remplacé dans cet article par le défaut de R-équivalence.

9. Appendice: groupes superversels

On utilise ici une construction [19, §6] qui est une variante de la construction de Grothendieck de torseurs versels ([20], §I.5).

Fixons un corps de base k, un diagramme de Dynkin connexe Δ, et un sous-groupe $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Delta)$. Un groupe superversel de type (Δ, Γ) est un groupe adjoint semi-simple G défini sur une extension F de type fini de k et de type quasi-déployé (Δ, ϕ_G) satisfaisant

$$\phi_G \in \mathrm{Im}\big(\mathrm{H}^1(F, \Gamma) \to \mathrm{H}^1(F, \mathrm{Aut}(\Delta))\big)$$

et tel qu'il existe une k-variété lisse irréductible X de corps des fonctions F et un schéma en groupes adjoints $\mathfrak{G}/X$ satisfaisant les deux propriétés suivantes:

1. La fibre de $\mathfrak{G}$ au point générique de X est G.
2. Pour toute extension E de k, avec E infini, pour tout groupe semi-simple adjoint H/E de type quasi-déployé (Δ, ϕ_H) tel que

$$\phi_H \in \mathrm{Im}\big(\mathrm{H}^1(E, \Gamma) \to \mathrm{H}^1(E, \mathrm{Aut}(\Delta))\big)$$

   et toute sous-variété ouverte non vide U de X, il existe $x \in U(E)$ tel que la fibre $\mathfrak{G}_x$ est $k(x)$-isomorphe à H.

Les groupes superversels existent et permettent d'étudier la rationalité des formes tordues de G.

Proposition 9.0.1. *On suppose k infini. Soit $G/k(X)$ un groupe superversel de type* (Δ, Γ).

(1) *Si G est $k(X)$-rationnel (resp. stablement $k(X)$-rationnel, rétracte $k(X)$-rationnel), alors pour tout corps E/k et tout groupe semi-simple adjoint H/E de type quasi-déployé (Δ, ϕ_H) satisfaisant*

$$\phi_H \in \mathrm{Im}\big(\mathrm{H}^1(E, \Gamma) \to \mathrm{H}^1(E, \mathrm{Aut}(\Delta))\big),$$

alors le groupe H/E est E-rationnel (resp. stablement E-rationnel, resp. E-rétracte rationnel).

(2) *Idem pour G^{sc} et H^{sc}.*

Démonstration de la proposition 9.0.1. On montre seulement la première assertion, les autres étant analogues. On suppose donc que $\mathfrak{G} \underset{X}{\times} k(X)$ est $k(X)$-rationnel, c'est-à-dire qu'il existe un ouvert $V \subset \mathfrak{G} \underset{X}{\times} k(X)$ $k(X)$-isomorphe à un ouvert de $\mathbf{A}^d_{k(X)}$. Il existe un ouvert non vide $U \subset X$ et un ouvert $W \subset \mathfrak{G} \underset{X}{\times} U$, surjectif sur U, tel que W est U-isomorphe à un ouvert de $\mathbf{A}^d_U$. On se donne un groupe H/E comme dans l'énoncé, il existe alors un point $u \in U(E)$ tel que $H \cong \mathfrak{G} \times^u_X E$. On observe que $W \times^u_U E$ est un ouvert de $\mathfrak{G} \times^u_X E$, il est non vide car surjectif sur $\mathrm{Spec}(F)$. Alors $W \times^u_U F$ est E-isomorphe à un ouvert de $\mathbf{A}^d_F$. On conclut que H/E est une variété E-rationnelle.

Ceci nous permet de démontrer à peu de frais que les groupes trialitaires ne sont pas en général des variétés rationnelles.

Proposition 9.0.2. *Il existe un corps $F/\mathbf{C}$ et un F-groupe trialitaire simplement connexe de type ${}^6D_4$ qui n'est pas une variété rétracte k-rationnelle.*

Démonstration. On applique la proposition précédente à D_4, au groupe $\Gamma = \mathrm{Aut}(D_4)$ et au corps de base $k = \mathbf{C}$. Soit $G/k(X)$ un groupe superversel dans ce contexte. On sait qu'il existe un corps E/k et un groupe E/F simplement connexe de type ${}^2D_4$ qui n'est pas rétracte E-rationnel ([8], exemple 6.10). La proposition 9.0.1.(2) montre alors que $G^{\mathrm{sc}}/k(X)$ n'est pas rétracte $k(X)$-rationnel.

Nous montrons auparavant l'énoncé analogue pour les groupes de type ${}^3D_4$ (remarque 6.2.4).

Remarques 9.0.3. (a) Dans la proposition 9.0.2, l'algèbre d'Allen du groupe construit G/F est celle du groupe superversel. Elle est donc d'indice de Schur 8 [19, th. 14.1] alors que le théorème 1.1.(i) produit un exemple dont l'algèbre d'Allen est d'indice 2.

(b) Dans le cas adjoint, on sait qu'il existe un corps F/k et un groupe adjoint H_{ad}/E de type ${}^1D_4$ qui n'est pas rétracte E-rationnel [22]. La proposition 9.0.1.(1) montre alors que le groupe superversel $G/k(X)$ pour D_4 et S_3 n'est pas rétracte $k(X)$-rationnel.

RÉFÉRENCES

1. Borel, A., *Linear Algebraic Groups 2ed.*, Grad. Texts Math. 126, Springer, Berlin 1991.
2. Bosch, S., Lütkebohmert, W., et Raynaud, M., *Néron models*, Ergeb. Math. Grenzgeb. 21, Springer, Berlin 1990.
3. Bourbaki, N., *Algèbre commutative V-VI-VII*, Springer, Berlin 2006.
4. Bruhat, F., et Tits, J., *Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 41 (1972), 5–251.
5. Bruhat, F., et Tits, J., *Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 60 (1984), 197–376.
6. Bruhat, F., et Tits, J., *Groupes réductifs sur un corps local. III. Compléments et applications à la cohomologie galoisienne*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA Math. 34 (1987), 671–698.
7. Bruhat, F., et Tits, J., *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local*, Bull. Soc. Math. France 112 (1984), 259–301.

8. Chernousov, V. I., et Merkurjev, A. A., *R-equivalence in spinor groups*, J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), 509–534.
9. Chernousov, V. I., et Platonov, V. P., *The rationality problem for semisimple group varieties*, J. reine angew. math. 504 (1998), 1–28.
10. Chernousov, V. I., Gille, P., et Pianzola, A., *Conjugacy theorems for loop reductive group schemes and Lie algebras over Laurent polynomial rings*, Bull. Math. Sci. 4 (2014), 281–324.
11. Colliot-Thélène, J.-L., et Ojanguren, M., *Espaces homogènes localement triviaux*, Pub. Math. de l'IHÉS 75 (1992), 97–122.
12. Colliot-Thélène, J.-L., et Sansuc, J.-J., *La R-équivalence sur les tores*, Ann. Scient. ENS, vol. 10 (1977), 175–230.
13. Colliot-Thélène, J.-L., et Sansuc, J.-J., *Principal Homogeneous Spaces under Flasque Tori: Applications*, Journal of algebra 106 (1987), 148–205.
14. Colliot-Thélène, J.-L., et Sansuc, J.-J., *The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups* (*with special regards to the Brauer group*), pp. 113–186 in: Algebraic groups and homogeneous spaces, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., Tata Inst. Fund. Res., Mumbai 2007.
15. Colliot-Thélène, J.-L., Gille, P., et Parimala, R., *Arithmetic of linear algebraic groups over two-dimensional geometric fields*, Duke Math. J. 121 (2004), 285–341.
16. Colliot-Thélène, J.-L., R. Parimala, R., et Sridharan, R., *Un théorème de pureté locale*, C.R. Acad. Sci. Paris 309 (1989), 857–862.
17. Demazure, M., et Gabriel, P., *Groupes algébriques*, North-Holland, Amsterdam 1970.
18. Endo, S., et Miyata, T., *On the classification of the function fields of algebraic tori*, Nagoya Math. J. 56 (1975), 85–104.
19. Garibaldi, S., et Gille, P., *Algebraic groups with few subgroups*, J. Lond. Math. Soc. 80 (2009), 405–430.
20. Garibaldi, R. S., Serre, J.-P., et Merkurjev, A. A., *Cohomological invariants in Galois cohomology*, Univ. Lect. Ser. 28, Amer. Math. Soc., Providence 2003.
21. Gille, P., *La* R-*équivalence sur les groupes algébriques réductifs définis sur un corps global*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 86 (1997), 199–235.
22. Gille, P., *Examples of Non-rational Varieties of Adjoint Groups*, Journal of Algebra 193 (1997), 728–747.
23. Gille, P., *Spécialisation de la* R-*équivalence pour les groupes réductifs*, Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2004), 4465–4474.
24. Gille, P., *Le problème de Kneser-Tits*, séminaire Bourbaki n° 983, Astérisque 326 (2009), 39–81.
25. Gille, P., et Pianzola, A., *Torsors, Reductive group Schemes and Extended Affine Lie Algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. 226 (2013), no. 1063.
26. Gille, P., et Szamuely, T., *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambr. Stud. Adv. Math. 101, Cambr. Univ. Press, Cambridge 2006.
27. Giraud, J., *Cohomologie non-abélienne*, Grundl. Math. Wiss. 179, Springer, Berlin 1971.
28. Green, B. W., Pop, F., et Roquette, P., *On Rumely's local global principle*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 97 (1995), 43–74.
29. Harder, G., *Eine Bermerkung zum schwachen Approximationsatz*, Arch. Math. (Basel) 19 (1968), 465–471.
30. Hoffmann, D., et Tignol, J.-P., *On 14 dimensional forms in I^3, and the common value property*, Doc. Math. 3 (1998), 189–214.
31. Knus, M.-A., Merkurjev, A., Rost, M., et Tignol, J.-P., *The book of involutions*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 44, Amer. Math. Soc., Providence 1998.
32. Kollár, J., *Specialization of zero-cycles*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 40 (2004), 689–708.

33. Kunyavskiĭ, B., et Skorobogatov, A., *Weak approximation in algebraic groups and homogeneous spaces*, pp. 447–451 in: Proc. of the Intern. Conf. on Algebra, Comtemp. Math. 131, Amer. Math. Soc., Providence 1992.
34. Lang, S., *Algebra 3ed.*, Grad. Text Math. 211, Springer, Berlin 2002.
35. Madore, D., *Hypersurfaces cubiques : équivalence rationnelle, R-équivalence et approximation faible*, Thèse 2005, HAL tel-00009887.
36. Manin, Y., *Cubic forms. Algebra, geometry, arithmetic 2ed.*, North-Holland, Amsterdam 1986.
37. Merkurjev, A. S., *Certain K-cohomology groups of Severi-Brauer varieties*, pp. 319–331 in: K-theory and algebraic geometry: connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara 1992), Proc. Symp. Pure Math. 58 Part 2, Amer. Math. Soc., Providence 1995.
38. Merkurjev, A. S., *R-equivalence and rationality problem for semisimple adjoint classical algebraic groups*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 84 (1996), 189–213.
39. Merkurjev, A. S., *K-theory and algebraic groups*, pp. 43–72 in: European Congress of Mathematics II (Budapest 1996), Progr. Math. 169, Birkhäuser, Basel 1998.
40. Monastyrnyĭ, A. P., et Yanchevskiĭ, V. I., *Whitehead groups of spinor groups* (en russe) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 54 (1990), 60–96, 221; tranduction anglaise Math. USSR-Izv. 36 (1991), 61–100.
41. Milne, J. S., *Étale Cohomology*, Princeton Math. Ser. 33, Princeton Univ. Press, Princeton 1980.
42. Moret-Bailly, L., *Un théorème de l'application ouverte pour les corps valués algébriquement clos*, Math. Scand. 111 (2012), 161–168.
43. Neukirch, J., Schmidt, A., et Wingberg, K., *Cohomology of number fields 2ed.*, Grundl. Math. Wiss. 323, Springer, Berlin 2000.
44. Platonov, V., *The Tannaka-Artin problem, and groups of projective conorms*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 222 (1975), 1299–1302.
45. Prasad, G., *Elementary proof of a theorem of Bruhat-Tits-Rousseau and of a theorem of Tits*, Bull. Soc. Math. France 110 (1982), 197–202.
46. Raghunathan, M. S., *Principal bundles admitting a rational section*, Invent. Math. 116 (1994), 409–423.
47. Rousseau, G., *Immeubles des groupes réductifs sur les corps locaux*, Thèse de doctorat, Publications Mathématiques d'Orsay, No. 221-77.68. U.E.R. Mathématique, Université Paris XI, Orsay 1977.
48. Saltman, D., *Retract rational fields and cyclic Galois extensions*, Israel J. Math. 47 (1984), 165–215.
49. Sansuc, J.-J., *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. Reine Angew. Math. 327 (1981), 12–80.
50. Serre, J.-P., *Cohomologie galoisienne 5ed.*, Lect. Notes Math. 5, Springer, Berlin 1994.
51. Serre, J.-P., *Lie algebras and Lie groups*, 1964 lectures given at Harvard University, Lect. Notes Math. 1500, Springer, Berlin 2006.
52. *Séminaire de Géométrie algébrique de l'I.H.E.S., 1963–1964, Schémas en groupes, dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck*, Lect. Notes Math. 151–153, Springer, Berlin 1970.
53. Shapiro, D., Tignol, J.-P., et Wadsworth, A., *Witt rings and Brauer groups under multiquadratic extensions. II*, J. Algebra 78 (1982), 58–90.
54. Suslin, A. A., *SK_1 of division algebras and Galois cohomology*, pp. 75–99 in: Algebraic K-theory, Adv. Soviet Math. 4, Amer. Math. Soc., Providence 1991.
55. Tits, J., *Strongly inner anisotropic forms of simple algebraic groups*, J. Algebra 131 (1990), 648–677.
56. Voskresenskiĭ, V. E., *The reduced Whitehead group of a simple algebra*, Uspehi Mat. Nauk 32 (1977), 247–248.

57. Voskresenskiĭ, V. E., *Algebraic groups and their birational invariants*, Transl. Math. Monogr. 179, Amer. Math. Soc., Providence 1998.

58. Wadsworth, A., *Valuation theory on finite dimensional division algebras*, pp. 385–449 in: Valuation theory and its applications, Vol. I (Saskatoon 1999), Fields Inst. Commun. 32, Amer. Math. Soc., Providence 2002.

UMR 5208 DU CNRS
INSTITUT CAMILLE JORDAN
UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1
43 BOULEVARD DU 11 NOVEMBRE 1918
69622 VILLEURBANNE CEDEX
FRANCE