MATH. SCAND. 118 (2016), 33–42

HOMOLOGIE DE HOCHSCHILD ET ESPACES ALGÉBRIQUES

ABHISHEK BANERJEE

Résumé

Le but de cet article est de définir les homologies de Hochschild et les homologies cycliques d'un espace algébrique X. Nous considérons deux définitions de l'homologie de Hochschild et nous montrons que ces définitions sont les mêmes en cas d'un espace algébrique séparé. De plus, nous construisons un produit shuffle sur les homologies de Hochschild de X. Enfin, nous montrons qu'on a un appariement entre les homologies et les cohomologies de Hochschild de X.

Abstract

The purpose of this article is to define the Hochschild and cyclic homologies of an algebraic space X. We consider two definitions of Hochschild homology of X and show that these definitions coincide in the case of a separated algebraic space. Moreover, we construct a shuffle product on the Hochschild homologies of X. Finally, we show that one has a pairing between the Hochschild homologies and cohomologies of X.

1. Introduction

Soit k un corps et Y un schéma sur k. Alors, l'homologie $HH_n(Y)$, $n \in \mathsf{Z}$ de Hochschild de Y est définie comme dans [4, §4]. De même, l'homologie cyclique d'une algèbre sur k introduite par Connes [2], [3], a été étendue aux schémas (Loday [7, 3.4], voir aussi [4]). Pour la cohomologie de Hochschild d'un schéma, voir les définitions de Gerstenhaber et Schack [5] et Swan [10, §1, 2]. Quand Y est un schéma quasi-projectif, les cohomologies de Hochschild définies par Gerstenhaber et Schack [5] sont les mêmes que les cohomologies de Hochschild définies par Swan [10].

Dans cet article, nous définissons les homologies de Hochschild $HH_n(X_{\mathrm{esp}})$, $n \in \mathsf{Z}$ et les homologies cycliques $HC_n(X_{\mathrm{esp}})$, $n \in \mathsf{Z}$ d'un espace algébrique X sur k. Ces définitions sont motivées par Weibel [13] et les groupes $HH_n(X_{\mathrm{esp}})$, $HC_n(X_{\mathrm{esp}})$ sont définis en termes d'hypercohomologie (voir Définition 2.1). En particulier, si X est un schéma, nous montrons que $HH_n(X_{\mathrm{esp}}) \cong HH_n(X)$. Quand X est un schéma noethérien de dimension finie et k est un corps de caracteristique nulle, on a $HC_n(X_{\mathrm{esp}}) \cong HC_n(X)$, où $HC_n(X)$ est l'homologie cyclique de X définie comme dans [7]. De plus, nous montrons que les groupes $HH_*(X_{\mathrm{esp}})$ sont munis d'un produit shuffle (voir Proposition 2.5).

Received 6 June 2013.

Quand X est un espace algébrique séparé, nous considérons une autre définition des homologies de Hochschild de X (voir (3.2)). Elle est motivée par la définition de Buchweitz et Flenner [1] dans la contexte des espaces complexes. Pour les espaces algébriques séparés, nous montrons que ces groupes d'homologie coïncident avec les groupes $HH_*(X_{\text{esp}})$. La cohomologie de Hochschild $HH^*(X_{\text{esp}})$ (voir Définition 3.3) d'un espace algébrique est définie de manière analogue à Swan [10, §1]. Enfin, nous montrons qu'on a un appariement $HH_q(X_{\text{esp}}) \otimes HH^r(X_{\text{esp}}) \to HH_{q-r}(X_{\text{esp}})$, $\forall\, q, r \in \mathsf{Z}$.

2. Homologie de Hochschild pour les espaces algébriques

Dans toute la suite, si T est un site de Grothendieck, nous notons par $\mathrm{Fsc}(T)$ la catégorie des faisceaux des groupes abéliens sur T. Soit k un corps de caractéristique nulle et soit X un espace algébrique sur k au sens de [6, Chapter 2]. Soit X_{et} (resp. X_{esp}) le site dont les objets sont les morphismes étales $U \to X$, où U est un schéma (resp. un espace algébrique). On dispose d'un morphisme continu des sites $X_{\text{et}} \to X_{\text{esp}}$ qui induit un foncteur $\mathrm{Fsc}(X_{\text{esp}}) \to \mathrm{Fsc}(X_{\text{et}})$. Si F est un faisceau sur X_{et}, on peut l'étendre uniquement à un faisceau sur X_{esp} (voir [6, II.2.5]). Il résulte que le foncteur $\mathrm{Fsc}(X_{\text{esp}}) \to \mathrm{Fsc}(X_{\text{et}})$ est une équivalence des catégories.

Si T est un site, il est bien connu que la catégorie $\mathrm{Fsc}(T)$ possède suffisamment d'objets injectifs (voir, par exemple, [11, I.3]). Si K^* est un complexe des faisceaux sur X_{esp}, on dispose d'une résolution injective I^{**} ainsi qu'une augmentation $K^* \to I^{*0}$ vérifiant certaines conditions détaillées dans [12, 5.7.9]. Alors, les groupes d'hypercohomologie (de Cartan-Eilenberg) de K^* sont définis comme $\mathsf{H}^i(X_{\text{esp}}, K^*) := H^i(\Gamma(X, \mathrm{Tot}\, I^{**}))$, $\forall\, i \in \mathsf{Z}$.

Dans [4, §4], Geller et Weibel ont définit l'homologie de Hochschild d'un schéma comme l'hypercohomologie du complexe des faisceaux associé au préfaisceau des complexes de Hochschild. D'une manière analogue, nous définissons l'homologie de Hochschild d'un espace algébrique.

Si X est un espace algébrique, nous notons par $\mathcal{O}_X$ le faisceau sur X_{et} qui associe un objet $U \to X$ au $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$, où $\mathcal{O}_U$ est le faisceau structural de U. Pour $n \geq 0$, posons $C_n(X)(U) := \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^{\otimes_k n+1}$. En utilisant les différentielles de Hochschild $b(U) : C_n(X)(U) \to C_{n-1}(X)(U)$ (voir [8, §1.1.1]), on a un complexe cohomologique $(C_h^*(X)(U), b(U))$ où $C_h^n(X)(U) := C_{-n}(X)(U)$ pour chaque $n \leq 0$. De plus, pour chaque $n \geq 0$, on a l'opérateur $B(U) : C_n(X)(U) \to C_{n+1}(X)(U)$ de Connes (voir [8, §2.1.7]). Le bicomplexe mixte $(BC^{**}(X)(U), B(U), b(U))$ est défini comme suit (pour $p, q \leq 0$):

$$
\begin{aligned}
BC^{p,q}(X)(U) &:= C_{p-q}(X)(U)\\
B(U) : BC^{p,q}(X)(U) &\longrightarrow BC^{p+1,q}(X)(U)\\
b(U) : BC^{p,q}(X)(U) &\longrightarrow BC^{p,q+1}(X)(U)
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

On définit ainsi un complexe $(C_h^*(X), b)$ (resp. un bicomplexe $(BC^{**}(X), B, b)$) des préfaisceaux sur X_{et} en posant $U \mapsto (C_h^*(X)(U), b(U))$ (resp. $U \mapsto (BC^{**}(X)(U), B(U), b(U))$) pour chaque $U \to X$ dans X_{et}.

DÉFINITION 2.1. Soit X un espace algébrique. Nous notons par $(C_h^*(X_{\text{esp}}), b)$ (resp. $BC^{**}(X_{\text{esp}}), B, b)$ le complexe (resp. bicomplexe) des faisceaux sur X_{esp} associé à $(C_h^*(X), b)$ (resp. $(BC^{**}(X), B, b)$). Pour chaque $n \in \mathsf{Z}$, l'homologie de Hochschild (resp. l'homologie cyclique) de X est définie comme le groupe d'hypercohomologie:

$$
\begin{aligned}
&HH_n(X_{\text{esp}}) := \mathsf{H}^{-n}(X_{\text{esp}}, C_h^*(X_{\text{esp}}))\\
\text{(resp.}\quad &HC_n(X_{\text{esp}}) := \mathsf{H}^{-n}(X_{\text{esp}}, \mathrm{Tot}(BC^{**}(X_{\text{esp}}))))
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Si X est un schéma, soit $(C_h^*(X_{\text{Zar}}), b)$ le complexe des faisceaux sur le site (petit) de Zariski X_{Zar} associé à $(C_h^*(X), b)$. D'après [4, §4], [13, §1], l'homologie de Hochschild $HH_n(X_{\text{Zar}})$ de X est définie comme $HH_n(X_{\text{Zar}}) := \mathsf{H}^{-n}(X_{\text{Zar}}, C_h^*(X_{\text{Zar}})), \forall\, n \in \mathsf{Z}$. De même, l'homologie cyclique $HC_n(X_{\text{Zar}})$ de X est définie comme $HC_n(X_{\text{Zar}}) := \mathsf{H}^{-n}(X_{\text{Zar}}, \mathrm{Tot}(BC^{**}(X_{\text{Zar}})))$, où $BC^{**}(X_{\text{Zar}})$ est le bicomplexe des faisceaux sur X_{Zar} associè à $(BC^{**}(X), B, b)$.

PROPOSITION 2.2. *Soit X un schéma sur k. Pour chaque $n \in \mathsf{Z}$, on a un isomorphisme naturel $HH_n(X_{\text{esp}}) \cong HH_n(X_{\text{Zar}})$.*

DÉMONSTRATION. Soit $(C_h^*(X_{\text{et}}), b)$ le complexe des faisceaux sur le site X_{et} associé à $(C_h^*(X), b)$. Pour chaque $n \leq 0$, on peut uniquement étendre le faisceau $C_h^n(X_{\text{et}})$ à un faisceau sur X_{esp}. Il résulte que $C_h^n(X_{\text{esp}})|X_{\text{et}} = C_h^n(X_{\text{et}})$ pour chaque $n \leq 0$. Considérons une résolution injective $\mathscr{I}^{**}$ de $C_h^*(X_{\text{esp}})$ dans la catégorie $\mathrm{Fsc}(X_{\text{esp}})$ ainsi qu'une augmentation $C_h^*(X_{\text{esp}}) \to \mathscr{I}^{*0}$ vérifiant les conditions détaillées dans [12, 5.7.9]. En conséquence de l'équivalence $\mathrm{Fsc}(X_{\text{esp}}) \to \mathrm{Fsc}(X_{\text{et}})$ des catégories, les restrictions $\mathscr{I}^{**}|X_{\text{et}}$ sont des objets injectifs dans $\mathrm{Fsc}(X_{\text{et}})$. De plus, on sait que les restrictions $\mathscr{I}^{**}|X_{\text{Zar}} = (\mathscr{I}^{**}|X_{\text{et}})|X_{\text{Zar}}$ sont des objets injectifs dans $\mathrm{Fsc}(X_{\text{Zar}})$ (voir Milne[9, Remark 8.9]). En utilisant la résolution $\mathscr{I}^{**}|X_{\text{Zar}}$ pour calculer les groupes d'hypercohomologie de $C_h^*(X_{\text{et}})|X_{\text{Zar}}$, on voit que ($\forall\, n \in \mathsf{Z}$)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{H}^{-n}(X_{\text{Zar}}, C_h^*(X_{\text{et}})|X_{\text{Zar}}) &= H^{-n}(\Gamma(X, \operatorname{Tot}\mathscr{I}^{**}|X_{\text{Zar}})) \\
&= H^{-n}(\Gamma(X, \operatorname{Tot}\mathscr{I}^{**})) \\
&= \mathsf{H}^{-n}(X_{\text{esp}}, C_h^*(X_{\text{esp}})) \\
&= HH_n(X_{\text{esp}})
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Pour $n \geq 0$, soit $\mathscr{H}\mathscr{H}_n^{\text{Zar}}$ (resp. $\mathscr{H}\mathscr{H}_n^{\text{et}}$) le faisceau sur X_{Zar} (resp. X_{et}) associé au préfaisceau qui associe $U \mapsto HH_n(\Gamma(U, \mathscr{O}_U))$ pour chaque objet $U \to X$ dans X_{Zar} (resp. X_{et}). D'après [4, Corollary 0.4], on sait que $\mathscr{H}\mathscr{H}_n^{\text{et}}|X_{\text{Zar}} = \mathscr{H}\mathscr{H}_n^{\text{Zar}}$. De plus, pour chaque $n \leq 0$, la restriction $C_h^n(X_{\text{et}})|X_{\text{Zar}}$ est un faisceau sur X_{Zar}. Donc, on a un morphisme naturel $C_h^*(X_{\text{Zar}}) \to C_h^*(X_{\text{et}})|X_{\text{Zar}}$ des complexes des faisceaux sur X_{Zar} qui induit un morphisme des suites spectrales d'hypercohomologie ($\forall\, n \in \mathsf{Z}$):

$$
\begin{array}{ccc}
H^p(X_{\text{Zar}}, \mathscr{H}\mathscr{H}_{-n-p}^{\text{Zar}}) & \Longrightarrow & \mathsf{H}^{-n}(X_{\text{Zar}}, C_h^*(X_{\text{Zar}})) = HH_n(X_{\text{Zar}}) \\
{\scriptstyle =}\big\downarrow & & \big\downarrow \\
H^p(X_{\text{Zar}}, \mathscr{H}\mathscr{H}_{-n-p}^{\text{et}}|X_{\text{Zar}}) & \Rightarrow & \mathsf{H}^{-n}(X_{\text{Zar}}, C_h^*(X_{\text{et}})|X_{\text{Zar}}) = HH_n(X_{\text{esp}})
\end{array}
\tag{2.4}
$$

Il résulte de (2.4) qu'on obtient des isomorphismes $HH_n(X_{\text{esp}}) \cong HH_n(X_{\text{Zar}})$, $\forall\, n \in \mathsf{Z}$.

Proposition 2.3. *Soit X un schéma noethérien sur k. De plus, si X est de dimension finie, on a un isomorphisme naturel $HC_n(X_{\text{esp}}) \cong HC_n(X_{\text{Zar}})$, $\forall\, n \in \mathsf{Z}$.*

Démonstration. Soit $(BC^{**}(X_{\text{et}}), B, b)$ le bicomplexe des faisceaux sur X_{et} associé à $(BC^{**}(X), B, b)$. Pour chaque $p, q \leq 0$, on peut uniquement étendre le faisceau $BC^{pq}(X_{\text{et}})$ à un faisceau sur X_{esp}. Il résulte que $BC^{pq}(X_{\text{esp}})|X_{\text{et}} = BC^{pq}(X_{\text{et}})$. Nous considérons une résolution injective $\mathscr{J}^{**}$ de $\operatorname{Tot}(BC^{**}(X_{\text{esp}}))$ dans la catégorie $\operatorname{Fsc}(X_{\text{esp}})$ ainsi qu'une augmentation $\operatorname{Tot}(BC^{**}(X_{\text{esp}})) \to \mathscr{J}^{*0}$ vérifiant les conditions détaillées dans [12, 5.7.9]. Les restrictions $\mathscr{J}^{**}|X_{\text{et}}$ sont des objets injectifs dans $\operatorname{Fsc}(X_{\text{et}})$. Alors, on a ($\forall\, n \in \mathsf{Z}$)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{H}^{-n}(X_{\text{et}}, \operatorname{Tot}(BC^{**}(X_{\text{et}}))) &= H^{-n}(\Gamma(X, \operatorname{Tot}\mathscr{J}^{**}|X_{\text{et}})) \\
&= H^{-n}(\Gamma(X, \operatorname{Tot}\mathscr{J}^{**})) \\
&= \mathsf{H}^{-n}(X_{\text{esp}}, \operatorname{Tot}(BC^{**}(X_{\text{esp}}))) \\
&= HC_n(X_{\text{esp}})
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Il résulte de [4, Proposition 4.9] qu'on a un isomorphisme $HC_n(X_{\mathrm{Zar}}) \cong \mathsf{H}^{-n}(X_{\mathrm{et}}, \mathrm{Tot}(BC^{**}(X_{\mathrm{et}})))$. En combinant avec (2.5), on a $HC_n(X_{\mathrm{Zar}}) \cong HC_n(X_{\mathrm{esp}})$.

Proposition 2.4. *Soit X un espace algébrique sur k. Alors, on a une suite exacte longue*

$$\begin{aligned}(2.6)\quad \cdots \longrightarrow HH_n(X_{\mathrm{esp}}) \longrightarrow HC_n(X_{\mathrm{esp}})&\\ \longrightarrow HC_{n-2}(X_{\mathrm{esp}}) \longrightarrow HH_{n-1}(X_{\mathrm{esp}}) \longrightarrow \cdots&\end{aligned}$$

Démonstration. Par les définitions dans (2.1), on a une suite exacte:

$$\begin{aligned}(2.7)\quad 0 \longrightarrow C_h^*(X_{\mathrm{esp}}) \longrightarrow \mathrm{Tot}(BC^{**}(X_{\mathrm{esp}}))&\\ \longrightarrow \mathrm{Tot}(BC^{**}(X_{\mathrm{esp}}))[2] \longrightarrow 0&\end{aligned}$$

L'hypercohomologie étant un foncteur hyper-derivé (voir [13, Appendix]), la suite exacte longue associée à (2.7) est la suite exacte dans (2.6).

Si A est une k-algèbre, les groupes d'homologie de Hochschild $HH_*(A)$ de A sont munis d'un produit shuffle comme dans [8, §4.2]. Quand X est un espace algébrique, nous montrons qu'on dispose d'un produit shuffle sur les groupes $HH_*(X_{\mathrm{esp}})$.

Proposition 2.5.

(a) *Soient X, Y deux espaces algébriques. Alors, on a un produit shuffle* $HH_q(X_{\mathrm{esp}}) \otimes HH_r(Y_{\mathrm{esp}}) \to HH_{q+r}((X \times Y)_{\mathrm{esp}})\ \forall\, q, r \in \mathsf{Z}$.

(b) *Soit X un espace algébrique. Alors, on a un produit shuffle* $HH_q(X_{\mathrm{esp}}) \otimes HH_r(X_{\mathrm{esp}}) \to HH_{q+r}(X_{\mathrm{esp}})\ \forall\, q, r \in \mathsf{Z}$.

Démonstration. (a) Pour chaque $U \in X_{\mathrm{et}}$, $V \in Y_{\mathrm{et}}$ on dispose des morphismes shuffles comme dans [8, §4.2.1.2] ($\forall\, q, r \geq 0$)

$$\begin{aligned}(2.8)\quad \mathrm{sh}_{q,r}(U, V) : \Gamma(U, \mathcal{O}_U(U))^{\otimes q+1} \otimes \Gamma(V, \mathcal{O}_V(V))^{\otimes r+1}&\\ \longrightarrow \Gamma(U \times V, \mathcal{O}_{U\times V}(U \times V))^{\otimes q+r+1}&\end{aligned}$$

qui induisent un morphisme des complexes $\mathrm{sh}(U, V) : C_h^*(X)(U) \otimes C_h^*(Y)(V) \to C_h^*(X\times Y)(U\times V)$. Soient $p_X : X\times Y \to X$, $p_Y : X\times Y \to Y$ les projections naturelles. Puisque $\{U \times V\}_{U\in X_{\mathrm{et}}, V\in Y_{\mathrm{et}}}$ est un système projectif filtrant dans $(X \times Y)_{\mathrm{esp}}$, les morphismes $\mathrm{sh}(U, V)$ induisent un morphisme des complexes des faisceaux sur $(X \times Y)_{\mathrm{esp}}$:

$$(2.9)\qquad p_X^{-1}(C_h^*(X_{\mathrm{esp}})) \otimes p_Y^{-1}(C_h^*(Y_{\mathrm{esp}})) \longrightarrow C_h^*((X \times Y)_{\mathrm{esp}})$$

Alors, pour $q, r \in \mathsf{Z}$, on a une multiplication sur les groupes d'hypercohomologie:

$$\mathsf{H}^{-q}(p_X^{-1}(C_h^*(X_{\mathrm{esp}}))) \otimes \mathsf{H}^{-r}(p_Y^{-1}(C_h^*(Y_{\mathrm{esp}}))) \longrightarrow \mathsf{H}^{-q-r}(C_h^*((X \times Y)_{\mathrm{esp}})) \tag{2.10}$$

Il résulte des propriétés bien connues d'hypercohomologie qu'on dispose des morphismes naturels $\mathsf{H}^{-q}(C_h^*(X_{\mathrm{esp}})) \to \mathsf{H}^{-q}(p_X^{-1}(C_h^*(X_{\mathrm{esp}})))$ et $\mathsf{H}^{-r}(C_h^*(Y_{\mathrm{esp}})) \to \mathsf{H}^{-r}(p_Y^{-1}(C_h^*(Y_{\mathrm{esp}})))$. En combinant avec (2.10), on a un produit $\mathsf{H}^{-q}(C_h^*(X_{\mathrm{esp}})) \otimes \mathsf{H}^{-r}(C_h^*(Y_{\mathrm{esp}})) \to \mathsf{H}^{-q-r}(C_h^*((X \times Y)_{\mathrm{esp}}))$. Ceci montre le résultat.

(b) En particulier, si X est un espace algébrique, il résulte qu'on a un produit shuffle $HH_q(X_{\mathrm{esp}}) \otimes HH_r(X_{\mathrm{esp}}) \to HH_{q+r}((X \times X)_{\mathrm{esp}})$, $\forall\, q, r \in \mathsf{Z}$. En composant avec le morphisme $\Delta_X^* : HH_{q+r}((X \times X)_{\mathrm{esp}}) \to HH_{q+r}(X_{\mathrm{esp}})$ induit par le morphisme diagonal $\Delta_X : X \to X \times X$, on a un produit shuffle $HH_q(X_{\mathrm{esp}}) \otimes HH_r(X_{\mathrm{esp}}) \to HH_{q+r}(X_{\mathrm{esp}})$.

3. Cohomologie de Hochschild et les appariements

Soit X un espace algébrique séparé. Dans cette section, nous considérons la deuxième définition d'homologie de Hochschild, qui est motivée par Buchweitz et Flenner [1]. Le but est de montrer que $HH_*(X_{\mathrm{esp}})$ est un $HH^*(X_{\mathrm{esp}})$-module, où la cohomologie de Hochschild $HH^*(X_{\mathrm{esp}})$ de l'espace algébrique X est définie de manière analogue à Swan [10, §1]. Nous notons par $\mathrm{Mod}_{\mathscr{O}_X}(X_{\mathrm{et}})$ la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules sur X_{et}. Alors, $\mathrm{Mod}_{\mathscr{O}_X}(X_{\mathrm{et}})$ est une catégorie abélienne et notons par $D(\mathrm{Mod}_{\mathscr{O}_X}(X_{\mathrm{et}}))$ sa catégorie dérivée. Le faisceau structural $\mathscr{O}_X$ s'étend uniquement à un faisceau $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{esp}}}$ sur X_{esp} et notons par $\mathrm{Mod}_{\mathscr{O}_X}(X_{\mathrm{esp}})$ la catégorie des modules sur le site annelé $(X_{\mathrm{esp}}, \mathscr{O}_{X_{\mathrm{esp}}})$. Enfin, soit X_{aff} le site de Grothendieck dont les objets sont les morphismes étales $U \to X$ tels que U est un schéma affine. On a une équivalence des catégories:

$$\mathrm{Mod}_{\mathscr{O}_X}(X_{\mathrm{esp}}) \cong \mathrm{Mod}_{\mathscr{O}_X}(X_{\mathrm{et}}) \cong \mathrm{Mod}_{\mathscr{O}_X}(X_{\mathrm{aff}}) \tag{3.1}$$

Soit $\Delta_X : X \to X \times X$ le morphisme diagonal. Puisque X est séparé, Δ_X est une immersion fermée. Alors, on a un foncteur d'image directe $\Delta_{X*} : \mathrm{Mod}_{\mathscr{O}_X}(X_{\mathrm{aff}}) \to \mathrm{Mod}_{\mathscr{O}_{X\times X}}((X \times X)_{\mathrm{aff}})$. Soit $\Delta_X^* : \mathrm{Mod}_{\mathscr{O}_{X\times X}}((X \times X)_{\mathrm{aff}}) \to \mathrm{Mod}_{\mathscr{O}_X}(X_{\mathrm{aff}})$ le foncteur d'image inverse et $L\Delta_X^* : D(\mathrm{Mod}_{\mathscr{O}_{X\times X}}((X\times X)_{\mathrm{aff}})) \to D(\mathrm{Mod}_{\mathscr{O}_X}(X_{\mathrm{aff}}))$ son foncteur dérivé. Dans cette section, l'homologie de Hochschild de X est définie comme le groupe d'hypercohomologie:

$$HH_n(X_{\mathrm{esp}}) := \mathsf{H}^{-n}(X_{\mathrm{esp}}, L\Delta_X^*\Delta_{X*}\mathscr{O}_X) \qquad \forall\, n \in \mathsf{Z} \tag{3.2}$$

où $L\Delta_X^*\Delta_{X*}\mathscr{O}_X$ est considéré comme un objet de $\mathrm{Mod}_{\mathscr{O}_X}(X_{\mathrm{esp}})$. Cette définition est motivée par la définition de Buchweitz et Flenner [1, §2.3] en cas de espaces complexes. Nous montrons que les groupes $HH_n(X_{\mathrm{esp}})$ définis comme dans (3.2) sont les mêmes que les homologies de Hochschild définies dans Section 2.

LEMME 3.1. *Soit X un espace algébrique séparé. Soient $U \to X$, $V \to X$ deux objets dans X_{esp} tel que U, V sont schémas affines. Alors, $U \times_X V$ est un schéma affine.*

DÉMONSTRATION. Nous considérons le carre cartésien suivant:

$$\begin{array}{ccc} U \times_X V = X \times_{X \times X} (U \times V) & \longrightarrow & U \times V \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\Delta X} & X \times X \end{array} \tag{3.3}$$

Puisque le morphisme Δ_X est représentable et une immersion fermée, le morphisme $U \times_X V \to U \times V$ est une immersion fermée des schémas. De plus, $U \times V$ est affine. Les immersions fermées des schémas étant affines, on voit que $U \times_X V$ est un schéma affine.

PROPOSITION 3.2. *Soit X un espace algébrique séparé. Dans la catégorie $D(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}(X_{\mathrm{esp}}))$, on a un isomorphisme $C_h^*(X_{\mathrm{esp}}) \cong L\Delta_X^* \Delta_{X*}\mathcal{O}_X$.*

DÉMONSTRATION. Soient $U \to X$, $V \to X$ deux objets dans X_{aff}. Il résulte de Lemme 3.1 que $U \times_X V = X \times_{X \times X} (U \times V)$ est un schéma affine et donc $U \times_X V$ est un objet dans X_{aff}.

Pour $n \geq 2$, soit $b'(U \times_X V) : \mathcal{O}_X(U \times_X V)^{\otimes n+1} \to \mathcal{O}_X(U \times_X V)^{\otimes n}$ comme dans [8, §1.1.11]. Alors, le complexe suivant:

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{O}_X(U \times_X V)^{\otimes 4} \xrightarrow{b'(U \times_X V)} \mathcal{O}_X(U \times_X V)^{\otimes 3} \xrightarrow{b'(U \times_X V)} \mathcal{O}_X(U \times_X V)^{\otimes 2} \tag{3.4}$$

est une résolution de $\mathcal{O}_X(U \times_X V)$ comme un $\mathcal{O}_X(U \times_X V) \otimes \mathcal{O}_X(U \times_X V)$-module (voir [8, §1.1.11.1]) et donc comme un $\mathcal{O}_X(U) \otimes \mathcal{O}_X(V)$-module (utilisant le morphisme naturel $\mathcal{O}_X(U) \otimes \mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_X(U \times_X V) \otimes \mathcal{O}_X(U \times V)$ des anneaux).

Alors, $\mathcal{O}_X(U \times_X V)$ étant un espace vectoriel sur C, pour $n \geq 0$, $\mathcal{O}_X(U \times_X V)^{\otimes n+2} = (\mathcal{O}_X(U \times_X V) \otimes \mathcal{O}_X(U \times_X V)) \otimes \mathcal{O}_X(U \times_X V)^{\otimes n}$ est un $\mathcal{O}_X(U \times_X V) \otimes \mathcal{O}_X(U \times_X V)$-module plat. De plus, puisque $(\mathcal{O}_X(U \times_X V) \otimes \mathcal{O}_X(U \times_X V))$ est étale sur $\mathcal{O}_X(U) \otimes \mathcal{O}_X(V)$, $\mathcal{O}_X(U \times_X V)^{\otimes n+2}$ est un $\mathcal{O}_X(U) \otimes \mathcal{O}_X(V)$-module plat.

Puisque $\mathcal{O}_X(U \times_X V) \cong \Delta_{X*}(\mathcal{O}_X)(U \times V)$ et $\mathcal{O}_X(U) \otimes \mathcal{O}_X(V) \cong \mathcal{O}_{X \times X}(U \times V)$, il résulte de (3.4) que

$$\cdots \xrightarrow{b'} (\Delta_{X*}(\mathcal{O}_X))^{\otimes 4} \xrightarrow{b'} (\Delta_{X*}(\mathcal{O}_X))^{\otimes 3} \xrightarrow{b'} (\Delta_{X*}(\mathcal{O}_X))^{\otimes 2} \tag{3.5}$$

est une résolution plat de $\Delta_*\mathcal{O}_X$ dans la catégorie des $\mathcal{O}_{X\times X}$-modules. Alors, dans la catégorie $D(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}(X_{\mathrm{aff}}))$, on peut calculer $L\Delta_X^*\Delta_{X*}\mathcal{O}_X$ comme

$$\begin{aligned}(3.6)\qquad \cdots \xrightarrow{\Delta_X^*(b')} \Delta_X^*(\Delta_{X*}(\mathcal{O}_X))^{\otimes 4} \\ \xrightarrow{\Delta_X^*(b')} \Delta_X^*(\Delta_{X*}(\mathcal{O}_X))^{\otimes 3} \xrightarrow{\Delta_X^*(b')} \Delta_X^*(\Delta_{X*}(\mathcal{O}_X))^{\otimes 2}\end{aligned}$$

Pour chaque $W \to X$ dans X_{aff}, on a, pour $n \geq 0$:

$$\begin{aligned}\Delta_X^{-1}(\mathcal{O}_{X\times X})(W) &= \mathcal{O}_{X\times X}(W\times W)\\ &\cong \mathcal{O}_X(W)\otimes\mathcal{O}_X(W) \qquad (3.7)\\ \Delta_X^{-1}(\Delta_{X*}(\mathcal{O}_X))^{\otimes n+2}(W) &= (\Delta_{X*}(\mathcal{O}_X))^{\otimes n+2}(W\times W)\cong\mathcal{O}_X(W)^{\otimes n+2}\end{aligned}$$

Puisque $\Delta_X^*(\Delta_{X*}(\mathcal{O}_X))^{\otimes n+2}$ est le faisceau associé au préfaisceau suivant sur X_{aff},

$$\begin{aligned}(3.8)\qquad W \mapsto\ & \mathcal{O}_X(W)\otimes_{\Delta_X^{-1}\mathcal{O}_{X\times X}(W)}\Delta_X^{-1}(\Delta_{X*}(\mathcal{O}_X))^{\otimes n+2}(W)\\ &\cong \mathcal{O}_X(W)\otimes_{\mathcal{O}_X(W)\otimes\mathcal{O}_X(W)}\mathcal{O}_X(W)^{\otimes n+2}\cong\mathcal{O}_X(W)^{\otimes n+1}\end{aligned}$$

et $1_{\mathcal{O}_X(W)}\otimes_{\mathcal{O}_X(W)\otimes\mathcal{O}_X(W)} b'(W)$ est la même que la différentielle de Hochschild sur $\mathcal{O}_X(W)^{\otimes n}$ (voir [8, §1.1.13]), on a un isomorphisme $L\Delta_X^*\Delta_{X*}\mathcal{O}_X \cong C_h^*(X_{\mathrm{esp}})|X_{\mathrm{aff}}$ dans $D(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}(X_{\mathrm{aff}}))$ et donc un isomorphisme $L\Delta_X^*\Delta_{X*}\mathcal{O}_X \cong C_h^*(X_{\mathrm{esp}})$ dans $D(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}(X_{\mathrm{esp}}))$.

La définition suivante de la cohomologie de Hochschild d'un espace algébrique est un analogue de la définition de Swan [10, §1] pour les schémas quasi-projectifs.

DÉFINITION 3.3. Soit X un espace algébrique et $\Delta_X : X \to X\times X$ le morphisme diagonal. Pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, la cohomologie de Hochschild $HH^n(X_{\mathrm{esp}})$ de X est définie comme

$$\begin{aligned}(3.9)\qquad HH^n(X_{\mathrm{esp}}) &:= \operatorname*{Ext}^n_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{X\times X}}((X\times X)_{\mathrm{et}})}(\Delta_{X*}\mathcal{O}_X,\Delta_{X*}\mathcal{O}_X)\\ &\cong H^n(\mathrm{RHom}_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{X\times X}}((X\times X)_{\mathrm{et}})}(\Delta_{X*}\mathcal{O}_X,\Delta_{X*}\mathcal{O}_X))\end{aligned}$$

PROPOSITION 3.4. *Soit X un espace algébrique séparé.*

(a) *Alors, la cohomologie de Hochschild de X est munie d'un produit:*

$$(3.10)\qquad HH^q(X_{\mathrm{esp}})\otimes HH^r(X_{\mathrm{esp}}) \longrightarrow HH^{q+r}(X_{\mathrm{esp}}) \qquad \forall\, q,r\in\mathbb{Z}$$

(b) *La cohomologie de Hochschild agit sur l'homologie de Hochschild comme:*

$$(3.11)\qquad HH_q(X_{\mathrm{esp}})\otimes HH^r(X_{\mathrm{esp}}) \longrightarrow HH_{q-r}(X_{\mathrm{esp}}) \qquad \forall\, q,r\in\mathbb{Z}$$

DÉMONSTRATION. (a) Pour $q, r \in \mathsf{Z}$, on a un produit de Yoneda:

$$\begin{array}{c}\mathrm{Ext}^q_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{X\times X}}((X\times X)_{\mathrm{et}})}(\Delta_{X*}\mathcal{O}_X, \Delta_{X*}\mathcal{O}_X) \otimes \mathrm{Ext}^r_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{X\times X}}((X\times X)_{\mathrm{et}})}(\Delta_{X*}\mathcal{O}_X, \Delta_{X*}\mathcal{O}_X) \\ \Big\downarrow \\ \mathrm{Ext}^{q+r}_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{X\times X}}((X\times X)_{\mathrm{et}})}(\Delta_{X*}\mathcal{O}_X, \Delta_{X*}\mathcal{O}_X)\end{array}$$

Appliquant (3.9), on a un produit $HH^q(X_{\mathrm{esp}}) \otimes HH^r(X_{\mathrm{esp}}) \to HH^{q+r}(X_{\mathrm{esp}})$ sur la cohomologie de Hochschild.

(b) Par définition, on a:

$$\begin{aligned} HH_q(X_{\mathrm{esp}}) &:= \mathsf{H}^{-q}(X_{\mathrm{esp}}, L\Delta_X^*\Delta_{X*}\mathcal{O}_X) \\ &= H^{-q}(\mathrm{RHom}_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}(X_{\mathrm{esp}})}(\mathcal{O}_{X_{\mathrm{esp}}}, L\Delta_X^*\Delta_{X*}\mathcal{O}_X)) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Appliquant l'équivalence $\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}(X_{\mathrm{esp}}) \cong \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}(X_{\mathrm{et}})$ dans (3.1), on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{RHom}_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}(X_{\mathrm{esp}})}(\mathcal{O}_{X_{\mathrm{esp}}}, L\Delta_X^*\Delta_{X*}\mathcal{O}_X) \\ &\qquad\qquad \cong \mathrm{RHom}_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}(X_{\mathrm{et}})}(\mathcal{O}_{X_{\mathrm{et}}}, L\Delta_X^*\Delta_{X*}\mathcal{O}_X) \end{aligned} \tag{3.13}$$

De plus, le foncteur $L\Delta_X^* : D(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{X\times X}}((X\times X)_{\mathrm{et}}) \to D(\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}(X_{\mathrm{et}}))$ induit un morphisme

$$\begin{aligned} &\mathrm{RHom}_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{X\times X}}((X\times X)_{\mathrm{et}})}(\Delta_{X*}\mathcal{O}_X, \Delta_{X*}\mathcal{O}_X) \\ &\qquad\qquad \longrightarrow \mathrm{RHom}_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X(X_{\mathrm{et}})}}(L\Delta_X^*\Delta_{X*}\mathcal{O}_X, L\Delta_X^*\Delta_{X*}\mathcal{O}_X) \end{aligned}$$

Composant avec le produit de Yoneda, on a un morphisme

$$\begin{array}{c} \mathrm{RHom}_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}(X_{\mathrm{et}})}(\mathcal{O}_{X_{\mathrm{et}}}, L\Delta_X^*\Delta_{X*}\mathcal{O}_X) \\ \otimes\, \mathrm{RHom}_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{X\times X}}((X\times X)_{\mathrm{et}})}(\Delta_{X*}\mathcal{O}_X, \Delta_{X*}\mathcal{O}_X) \\ \Big\downarrow \\ \mathrm{RHom}_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}(X_{\mathrm{et}})}(\mathcal{O}_{X_{\mathrm{et}}}, L\Delta_X^*\Delta_{X*}\mathcal{O}_X) \\ \otimes\, \mathrm{RHom}_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X(X_{\mathrm{et}})}}(L\Delta_X^*\Delta_{X*}\mathcal{O}_X, L\Delta_X^*\Delta_{X*}\mathcal{O}_X) \\ \Big\downarrow \\ \mathrm{RHom}_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}(X_{\mathrm{et}})}(\mathcal{O}_{X_{\mathrm{et}}}, L\Delta_X^*\Delta_{X*}\mathcal{O}_X) \end{array} \tag{3.14}$$

et donc un morphisme

$$\begin{aligned} &H^{-q}(\mathrm{RHom}_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}(X_{\mathrm{et}})}(\mathcal{O}_{X_{\mathrm{et}}}, L\Delta_X^*\Delta_{X*}\mathcal{O}_X)) \\ &\qquad\qquad \otimes H^r(\mathrm{RHom}_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_{X\times X}}((X\times X)_{\mathrm{et}})}(\Delta_{X*}\mathcal{O}_X, \Delta_{X*}\mathcal{O}_X)) \end{aligned}$$

$$\Big\downarrow$$

$$H^{-q+r}(\mathrm{RHom}_{\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}_X}(X_{\mathrm{et}})}(\mathcal{O}_{X_{\mathrm{et}}}, L\Delta_X^*\Delta_{X*}\mathcal{O}_X))$$

Appliquant (3.9), (3.12) et (3.13), on a un produit

$$HH_q(X_{\mathrm{esp}}) \otimes HH^r(X_{\mathrm{esp}}) \longrightarrow HH_{q-r}(X_{\mathrm{esp}}) \tag{3.15}$$

REFERENCES

1. Buchweitz, R., and Flenner, H., *Global Hochschild (co-)homology of singular spaces*, Adv. Math. 217 (2008), 205–242.
2. Connes, A., *Cohomologie cyclique et foncteurs* Ext^n, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 296 (1983), no. 23, 953–958.
3. Connes, A., *Noncommutative differential geometry*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 62 (1985), 257–360.
4. Geller, S., and Weibel, C. A., *Étale descent for Hochschild and cyclic homology*, Comment. Math. Helv. 66 (1991), no. 3, 368–388.
5. Gerstenhaber, M., and Schack, S. D., *Algebraic cohomology and deformation theory. Deformation theory of algebras and structures and applications*, (Il Ciocco, 1986), 11–264, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. 247, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988.
6. Knutson, D., *Algebraic spaces*, Lecture Notes in Math. Vol. 203, Springer-Verlag, Berlin-New York, (1971).
7. Loday, J. L., *Cyclic homology, a survey*, Geometric and algebraic topology, 281–303, (Banach Center Publ., 18 PWN, Warsaw, 1986)
8. Loday, J. L., *Cyclic Homology*, Grundlehren Math. Wiss. 301, Springer, Berlin, 1998.
9. Milne, J. S., *Lectures on Étale cohomology*, preprint available at http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/lec.html, 1998.
10. Swan, R. G., *Hochschild cohomology of quasiprojective schemes*, J. Pure Appl. Algebra. 110 (1996), 57–80.
11. Tamme, G., *Introduction to étale cohomology*, (Translated from the German by Manfred Kolster), Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
12. Weibel, C. A., *An introduction to homological algebra*, Cambridge Stud. Adv. Math. 38. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
13. Weibel, C. A., *Cyclic homology for schemes*, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), no. 6, 1655–1662.

COLLÉGE DE FRANCE
3 RUE D'ULM
F-75005 PARIS
FRANCE
E-mail: abhishekbanerjee1313@gmail.com