MATH. SCAND. 119 (2016), 5–13

SUR LE PRODUIT TENSORIEL D'ALGÈBRES

MOHAMED TABAÂ

Abstract

Let $\sigma\colon A \to B$ and $\rho\colon A \to C$ be two homomorphisms of noetherian rings such that $B \otimes_A C$ is a noetherian ring. We show that if σ is a regular (resp. complete intersection, resp. Gorenstein, resp. Cohen-Macaulay, resp. (S_n), resp. almost Cohen-Macaulay) homomorphism, so is $\sigma \otimes I_C$ and the converse is true if ρ is faithfully flat. We deduce the transfer of the previous properties of B and C to $B \otimes_A C$, and then to the completed tensor product $B \hat{\otimes}_A C$. If $B \otimes_A B$ is noetherian and σ is flat, we give a necessary and sufficient condition for $B \otimes_A B$ to be a regular ring.

1. Introduction

Tous les anneaux considérés sont supposés commutatifs et unitaires. Les notations sont celles de [8].

Rappelons ([8], 7.3.1) que si $\sigma\colon A \to B$ un homomorphisme d'anneaux noethériens, on dit que σ est régulier s'il est plat et si pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A la $k(\mathfrak{p})$-algèbre $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ est géométriquement régulière, et que σ est d'intersection complète (resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay, resp. (S_n), resp. presque de Cohen-Macaulay) s'il est plat et si pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A l'anneau $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ est d'intersection complète (resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay, resp. vérifie (S_n), resp. presque de Cohen-Macaulay).

Dans ce qui suit nous montrons que, si $\sigma\colon A \to B$ et $\rho\colon A \to C$ sont deux homomorphismes d'anneaux noethériens tels que $B \otimes_A C$ soit un anneau noethérien, alors $\sigma \otimes I_C$ est régulier (resp. d'intersection complète, resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay, resp. (S_n), resp. presque de Cohen-Macaulay) si σ l'est; et que la réciproque est vraie si ρ est fidèlement plat. On en déduit, en particulier, que si σ est plat, alors $B \otimes_A C$ est un anneau d'intersection complète (resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay) si B et C le sont, et il est presque de Cohen-Macaulay si l'un des anneaux, B ou C, est de Cohen-Macaulay et l'autre est presque de Cohen-Macaulay.

Si A est un corps, on retrouve le Théorème 2 de [15] si B et C sont des anneaux de Gorenstein, le Théorème 2.1 de [6] si B et C sont des anneaux

Received 16 September 2013.

de Cohen-Macaulay et le Théorème 6 de [14] si B et C sont des anneaux d'intersection complète (resp. vérifient (S_n)).

Comme application, nous montrons que si σ et ρ sont deux homomorphismes locaux d'anneaux locaux noethériens et si le corps résiduel de C est de rang fini sur celui de A, alors le produit tensoriel complété $B \hat{\otimes}_A C$ est régulier si l'homomorphisme σ est formellement lisse et C est régulier, et il est d'intersection complète (resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay) si σ est plat et B et C le sont, et il est presque de Cohen-Macaulay si σ est plat et si l'un des anneaux, B ou C, est de Cohen-Macaulay et l'autre est presque de Cohen-Macaulay.

Si σ est plat et $B \otimes_A B$ est un anneau noethérien, nous montrons que $B \otimes_A B$ est régulier si et seulement si B est régulier et σ est régulier.

Dans toute la suite nous utilisons librement les résultats de [13] et de [2], et l'homologie d'André-Quillen telle qu'elle est définie dans [1].

2. Résultats

PROPOSITION 2.1. *Soit $\sigma: A \to B$ un homomorphisme d'anneaux noethériens. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) *L'homomorphisme σ est régulier (resp. d'intersection complète).*

ii) *L'homomorphisme σ est plat et $H_1(A, B, k(\mathfrak{q})) = 0$ (resp. $H_2(A, B, k(\mathfrak{q})) = 0$) pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ de B.*

DÉMONSTRATION. Cas régulier: cf. [1] Supplément Théorème 30.

Cas d'intersection complète: (cf. [12]) On utilise [1]. Soit $\mathfrak{q}$ idéal premier de B et $\mathfrak{p} = \sigma^{-1}(\mathfrak{q})$. D'après le Corollaire 5.27, la Propositon 4.54, la suite exacte associée aux homomorphismes $k(\mathfrak{p}) \to B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}} \to k(\mathfrak{q})$ et d'après la Proposition 7.4, on a $H_2(A, B, k(\mathfrak{q})) \cong H_3(B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}, k(\mathfrak{q}), k(\mathfrak{q}))$; l'équivalence résulte donc de la Proposition 6.27.

LEMME 2.2. *Soient $\sigma: A \to B$ et $\rho: A \to C$ deux homomorphismes d'anneaux, $\mathfrak{Q}$ un idéal premier de $B \otimes_A C$ et $\mathfrak{q} = (I_B \otimes \rho)^{-1}(\mathfrak{Q})$. Si σ est plat, alors on a l'isomorphisme*

$$H_n(A, B, k(\mathfrak{q})) \otimes_{k(\mathfrak{q})} k(\mathfrak{Q}) \cong H_n(C, B \otimes_A C, k(\mathfrak{Q})).$$

DÉMONSTRATION. En effet, d'après le Lemme 3.20 de [1] on a $H_n(A, B, k(\mathfrak{q})) \otimes_{k(\mathfrak{q})} k(\mathfrak{Q}) \cong H_n(A, B, k(\mathfrak{Q}))$ et d'après la Proposition 4.54 de [1] on a $H_n(A, B, k(\mathfrak{Q})) \cong H_n(C, B \otimes_A C, k(\mathfrak{Q}))$; d'où le Lemme.

THÉORÈME 2.3. *Soient $\sigma: A \to B$ et $\rho: A \to C$ deux homomorphismes d'anneaux noethériens. On suppose que $B \otimes_A C$ est un anneau noethérien. Alors:*

a) *Si σ est régulier, il en est de même de $\sigma \otimes I_C : C \to B \otimes_A C$; la réciproque est vraie si σ est plat et ${}^a\rho$ est surjective.*

b) *Si les fibres de σ sont des anneaux d'intersection complète* (*resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay, resp. vérifient* (S_n)), *il en est de même de celles de $\sigma \otimes I_C$; la réciproque est vraie si ${}^a\rho$ est surjective.*

DÉMONSTRATION. a) Supposons que σ est un homomorphisme régulier, alors il est plat et par suite $\sigma \otimes I_C$ est plat. L'implication résulte alors de la Proposition précédente en tenant compte du Lemme précédent.

Réciproquement, d'après la Proposition (I, 3.6.1) de [9], l'application ${}^a(\sigma \otimes I_C)$ est surjective. La réciproque résulte aussi de la Proposition précédente en tenant compte du Lemme précédent.

b) i) Supposons d'abord que σ est un homomorphisme d'intersection complète, le même raisonnement que dans le cas précédent montre que $\sigma \otimes I_C$ est un homomorphisme d'intersection complète.

ii) Supposons maintenant que les fibres de σ sont des anneaux d'intersection complète (resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay, resp. vérifient (S_n)). Posons $D = B \otimes_A C$ et soit $\mathfrak{r}$ un idéal premier de C. L'anneau $D \otimes_c k(\mathfrak{r}) = (B \otimes_A C) \otimes_C k(\mathfrak{r})$ est isomorphe à $B \otimes_A k(\mathfrak{r})$. Soit $\mathfrak{p} = \rho^{-1}(\mathfrak{r})$. Donc $D \otimes_C k(\mathfrak{r})$ est isomorphe à $(B \otimes_A k(\mathfrak{p})) \otimes_{k(\mathfrak{p})} k(\mathfrak{r})$. Comme l'homomorphisme $k(\mathfrak{p}) \to k(\mathfrak{r})$ est d'intersection complète, il résulte du cas précédent appliqué aux homomorphismes $k(\mathfrak{p}) \to k(\mathfrak{r})$ et $k(\mathfrak{p}) \to B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ que l'homomorphisme $B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \to (B \otimes_A k(\mathfrak{p})) \otimes_{k(\mathfrak{p})} k(\mathfrak{r})$ est d'intersection complète. On en déduit que l'homomorphisme $B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \to D \otimes_C k(\mathfrak{r})$ est d'intersection complète (resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay, resp. (S_n)) et que par suite $D \otimes_C k(\mathfrak{r})$ est un anneau d'intersection complète (resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay, resp. vérifie (S_n)).

Réciproquement, soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A et soit $\mathfrak{r}$ un idéal premier de C tel que $\mathfrak{p} = \rho^{-1}(\mathfrak{r})$. L'homomorphisme $k(\mathfrak{p}) \to k(\mathfrak{r})$ est fidèlement plat, il en est de même de l'homomorphisme $B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \to D \otimes_C k(\mathfrak{r})$. Donc $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ est un anneau d'intersection complète (resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay, resp. vérifie (S_n)).

REMARQUES 2.4. i) Si l'homomorphisme ρ est fidèlement plat alors l'application ${}^a\rho$ est surjective et si de plus $\sigma \otimes I_C$ est plat alors σ est plat.

ii) Dans [4], [5], [3], on trouve des résultats sur le changement de base pour les homomorphismes qu'ils ont défini.

PROPOSITION 2.5. *Soient $\sigma : A \to B$ et $\rho : A \to C$ deux homomorphismes d'anneaux noethériens. On suppose que $B \otimes_A C$ est un anneau noethérien et que σ est régulier* (*resp. d'intersection complète, resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay, resp.* (S_n)). *Si C est un anneau régulier* (*resp. d'intersection* *complète, resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay, resp. vérifie* (S_n)) *il en est de même de* $B \otimes_A C$*; la réciproque est vraie si* σ *est fidèlement plat.*

DÉMONSTRATION. D'après le Théorème précédent, l'homomorphisme $\sigma \otimes I_C$ est régulier (resp. d'intersection complète, resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay, resp. (S_n)); d'où l'implication. La réciproque résulte du fait que $\sigma \otimes I_C$ est fidèlement plat.

On en déduit que si k est un corps et si $B \otimes_k C$ est un anneau noethérien alors $B \otimes_k C$ vérifie (S_n) si B et C la vérifient.

COROLLAIRE 2.6. *Soit* k *un corps. On suppose que* $B \otimes_k C$ *est un anneau noethérien et que pour tout idéal maximal* $\mathfrak{n}$ *de* C, $k(\mathfrak{n})$ *est séparable sur* k*. Si* B *et* C *sont réguliers alors* $B \otimes_k C$ *est régulier.*

DÉMONSTRATION. Pout tout idéal maximal $\mathfrak{n}$ de C, $k(\mathfrak{n})$ est séparable sur k et $C_{\mathfrak{n}}$ est régulier, donc $C_{\mathfrak{n}}$ est géométriquement régulière sur k. Le résultat découle donc de la Proposition précédente puisque l' homomorphisme $k \to C$ est régulier.

Si C est régulier, il peut se faire que $k(\mathfrak{n})$ soit séparable sur k pour tout idéal maximal $\mathfrak{n}$ de C sans que $k(\mathfrak{r})$ soit séparable sur k pour tout idéal premier $\mathfrak{r}$ de C [7, Theorem 2.11]. En effet, soient k un corps non parfait de caractéristique $p > 0$, a un élément de $k - k^p$, A l'anneau de polynômes $k[X, Y]$ et C l'anneau local de A en l'idéal maximal engendré par X et Y. L'anneau C est régulier et son corps résiduel est séparable sur k. Soit f le polynôme $Y^p - aX^p$. Comme $a \notin k$, f est irréductible dans A. Notons $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de A engendré par f et $\mathfrak{r}$ l'idéal premier $\mathfrak{p}C$ de C. Montrons que $k(\mathfrak{r})$ n'est pas séparable sur k. Le corps $k(\mathfrak{r})$ s'identifie canoniquement à $k(\mathfrak{p})$ donc il suffit de montrer que $k(\mathfrak{p})$ n'est pas séparable sur k. Si x et y sont les images respectives de X et Y dans $A/\mathfrak{p}$, on a bien $\left(\frac{y}{x}\right)^p \in k$ et $\frac{y}{x} \notin k$. Donc $k(\mathfrak{p})$ n'est pas séparable sur k.

PROPOSITION 2.7. *Soient* $\sigma\colon A \to B$ *et* $\rho\colon A \to C$ *deux homomorphismes d'anneaux noethériens. On suppose que* $B \otimes_A C$ *est un anneau noethérien. Si* σ *est plat alors* $B \otimes_A C$ *est un anneau d'intersection complète* (*resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay*) *si* B *et* C *le sont.*

DÉMONSTRATION. Si B est un anneau d'intersection complète (resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay) alors σ est un homomorphisme d'intersection complète (resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay). Le résultat découle donc de la Proposition 2.5.

PROPOSITION 2.8. *Soient* $\sigma\colon A \to B$ *et* $\rho\colon A \to C$ *deux homomorphismes locaux d'anneaux locaux noethériens. On suppose que le corps résiduel* $C/\mathfrak{n}$ *de* C *est de rang fini sur le corps résiduel* $A/\mathfrak{m}$ *de* A.

a) *Si l'homomorphisme σ est formellement lisse et C est régulier alors l'anneau semi-local $B \hat{\otimes}_A C$ est régulier.*

a) *Si σ est plat alors $B \hat{\otimes}_A C$ est un anneau d'intersection complète* (r*esp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay*) *si B et C le sont.*

DÉMONSTRATION. Cas où B est complet. On utilise la Proposition (0, 7.7.10) de [9]: Posons $E = B \hat{\otimes}_A C$. D'après i) E est semi-local noethérien. Montrons que c'est un anneau régulier (resp. d'intersection complète, resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay). Soit $\mathfrak{Q}$ un idéal maximal de E. D'après ii) $\mathfrak{Q}$ est au dessus de $\mathfrak{n}$. Pour montrer que $E_{\mathfrak{Q}}$ est régulier (resp. d'intersection complète, resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay) il suffit de montrer que $(E/\mathfrak{n}E)_{\mathfrak{Q}}$ est régulier (resp. d'intersection complète, resp. de Gorenstein, resp. de Cohen-Macaulay) puisque C l'est et d'après iii) E est un C-module plat. D'après ii) $E/\mathfrak{n}E$ est isomorphe à $B \otimes_A (C/\mathfrak{n})$. Donc b) résulte de la Proposition 2.7. D'autre part $B \otimes_A (C/\mathfrak{n})$ est isomorphe à $(B/\mathfrak{m}B) \otimes_{A/\mathfrak{m}} (C/\mathfrak{n})$ donc a) résulte de la Proposition 2.5 puisque l'homomorphisme $A/\mathfrak{m} \longrightarrow B/\mathfrak{m}B$ est régulier.

Cas général. L'anneau $B \hat{\otimes}_A C$ s'identifie à $\hat{B} \hat{\otimes}_A C$. Il suffit d'appliquer le cas précédent aux homomorphismes $A \xrightarrow{\sigma} B \longrightarrow \hat{B}$ et ρ. Dans a) l'homomorphisme $A \xrightarrow{\sigma} B \longrightarrow \hat{B}$ est formellement lisse et dans b) $\hat{B}$ vérifie la même propriété que B.

EXAMPLES 2.9. Les deux exemples suivants montrent que les résultats précédents tombent en défaut si les homomorphismes ne sont pas plats.

On prend pour A un anneau de valuation discrète complet, π une uniformisante de A et k son corps résiduel.

i) Si $B = k$ et $C = A[[X]]/(X^2 - \pi)$ où X est indéterminée sur A, alors B et C sont des anneaux locaux réguliers et la k-algèbre $B \otimes_A k$ est géométriquement régulière, mais les anneaux $B \otimes_A C$ et $B \hat{\otimes}_A C$ qui sont isomorphes, d'après la Proposition (0, 7.7.9) de [9], ne sont pas réguliers car $B \otimes_A C$ est isomorphe à $k[[X]]/(X^2)$.

ii) Si $B = A[[X, Y]]/(X^2 - \pi, XY)$ où X et Y sont deux indéterminées sur A et $C = k$, les anneaux B et C sont des anneaux locaux d'intersection complète, mais les anneaux $B \otimes_A C$ et $B \hat{\otimes}_A C$ ne sont pas des anneaux de Cohen-Macaulay car ils sont isomorphes à $k[[X, Y]]/(X^2, XY)$.

PROPOSITION 2.10. *Soit $\sigma: A \to B$ un homomorphisme d'anneaux noethériens. On suppose que $B \otimes_A B$ est un anneau noethérien et que σ plat. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) *L'anneau B est régulier et l'homomorphisme σ est régulier.*

ii) *L'anneau $B \otimes_A B$ est régulier.*

DÉMONSTRATION. i) $\Rightarrow$ ii) Cela résulte de la Proposition 2.5.

ii) $\Rightarrow$ i) Supposons $B \otimes_A B$ régulier. L'homomorphisme σ est plat donc $\sigma \otimes I_B$ est fidèlememt plat et par suite B est régulier. Montrons que σ est régulier. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de B. Comme $H_1(A, B, k(\mathfrak{q})) \cong H_1(B, B \otimes_A B, k(\mathfrak{q}))$ il suffit de montrer que $H_1(B, B \otimes_A B, k(\mathfrak{q})) = 0$. On a la suite exacte

$$H_2(B \otimes_A B, B, k(\mathfrak{q})) \to H_1(B, B \otimes_A B, k(\mathfrak{q})) \to H_1(B, B, k(\mathfrak{q}))$$

associée à la factorisation $p \circ (\sigma \otimes I_B) = I_B$, où $p\colon B \otimes_A B \to B$ est l'homomorphisme canonique défini par $p(b \otimes b') = bb'$. D'après [1, Supplément, Proposition 32] on a $H_2(B \otimes_A B, B, k(\mathfrak{q})) = 0$. Donc $H_1(B, B \otimes_A B, k(\mathfrak{q})) = 0$ car on a $H_1(B, B, k(\mathfrak{q})) = 0$.

COROLLAIRE 2.11. *Soient K un corps et L une extension de K. On suppose que l'anneau $L \otimes_K L$ est noethérien. Alors $L \otimes_K L$ est un anneau régulier si et seulement si L est séparable sur K.*

DÉMONSTRATION. En effet, l'homomorphisme $K \to L$ est régulier si et seulement si L est une extension séparable de K.

3. Cas Presque Cohen-Macaulay

Suivant ([11], 1.5) on dira qu'un anneau noethérien A est presque de Cohen-Macaulay si $\dim(A_\mathfrak{p}) \leq \operatorname{prof}(A_\mathfrak{p}) + 1$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A.

Il est clair que si A est presque de Cohen-Macaulay alors, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, $A_\mathfrak{p}$ est presque de Cohen-Macaulay; et d'après ([11], 2.6), A est presque de Cohen-Macaulay, si et seulement si, $\dim(A_\mathfrak{m}) \leq \operatorname{prof}(A_\mathfrak{m}) + 1$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A.

Le résultat suivant est une variante de la Proposition 2.2 de [10] qui distingue les anneaux presque de Cohen-Macaulay des anneaux considérés dans le paragraphe précédent.

LEMME 3.1. *Soient $\sigma\colon A \to B$ un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens et $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A. On suppose que $\sigma\colon A \to B$ est plat. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

a) *L'anneau B est presque de Cohen-Macaulay.*

b) *L'un des anneaux, A ou $B/\mathfrak{m}B$, est de Cohen-Macaulay et l'autre est presque de Cohen-Macaulay.*

DÉMONSTRATION. b) $\Rightarrow$ a) Il suffit d'appliquer les deux égalités

$$\dim B = \dim A + \dim B/\mathfrak{m}B,$$
$$\operatorname{prof} B = \operatorname{prof} A + \operatorname{prof} B/\mathfrak{m}B.$$

a) $\Rightarrow$ b) Par hypothèse, on a $\dim B \leq \operatorname{prof} B + 1$; d'où

$$\dim A + \dim B/\mathfrak{m}B \leq \operatorname{prof} A + \operatorname{prof} B/\mathfrak{m}B + 1,$$

et comme $\operatorname{prof} A \leq \dim A$ et $\operatorname{prof} B/\mathfrak{m}B \leq \dim B/\mathfrak{m}B$ donc, $\dim A = \operatorname{prof} A$ et $\dim B/\mathfrak{m}B \leq \operatorname{prof} B/\mathfrak{m}B + 1$, ou, $\dim B/\mathfrak{m}B = \operatorname{prof} B/\mathfrak{m}B$ et $\dim A \leq \operatorname{prof} A + 1$.

L'exemple suivant donne une réponse à la question 2.3 posée par Ionescu dans [10].

Exemple 3.2. Soient k un corps, R l'anneau $k[X, Y]/(X^2, XY)$ et S l'anneau $k[X, Y, U, V]/(X^2, XY, U^2, UV)$. L'homomorphisme canonique $R \to S$ est plat car l'homomorphisme $R \to R \otimes_k R$ est plat et S s'identifie à $R \otimes_k R$. Soient A l'anneau local de R en l'idéal maximal (x, y) et B celui de S en l'idéal maximal (x, y, u, v). L'homomorphisme induit $A \to B$ est local et plat. On vérifie que xu annule l'idéal (x, y, u, v) et que $xu \neq 0$. Donc $\operatorname{prof} B = 0$ et par suite $\operatorname{prof} A = \operatorname{prof} B/\mathfrak{m}B = 0$. D'autre part on a $\dim A = \dim B/\mathfrak{m}B = 1$ et $\dim B = 2$. Donc les anneaux A et $B/\mathfrak{m}B$ sont des anneaux presque de Cohen-Macaulay mais B ne l'est pas.

Pour les homomorphismes presque de Cohen-Macaulay on a

Proposition 3.3. *Soient $\sigma\colon A \to B$ et $\rho\colon A \to C$ deux homomorphismes d'anneaux noethériens. On suppose que $B \otimes_A C$ est un anneau noethérien. Si les fibres de σ sont presque de Cohen-Macaulay il en est de même de celles de $\sigma \otimes I_C$; la réciproque est vraie si ${}^a\rho$ est surjective.*

Démonstration. Soient $\mathfrak{r}$ un idéal premier de C et $\mathfrak{p} = \rho^{-1}(\mathfrak{r})$. L'homomorphisme $k(\mathfrak{p}) \to k(\mathfrak{r})$ est de Cohen-Macaulay donc, d'après le Théorème précédent, l'homomorphisme $B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \to (B \otimes_A C) \otimes_C k(\mathfrak{r})$ l'est aussi; l'implication résulte alors du Lemme précédent. La réciproque en résulte aussi puisque l'homomorphisme est fidèlement plat.

Proposition 3.4. *Soient $\sigma\colon A \to B$ et $\rho\colon A \to C$ deux homomorphismes d'anneaux noethériens. On suppose que $B \otimes_A C$ est un anneau noethérien et que σ est plat. Si pour tout idéal maximal $\mathfrak{N}$ de $B \otimes_A C$ l'un des anneaux, $B_\mathfrak{q}$ ou $C_\mathfrak{r}$, où $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{r}$ sont les images réciproques respectives dans B et C, est de Cohen-Macaulay et l'autre est presque de Cohen-Macaulay alors l'anneau $B \otimes_A C$ est presque de Cohen-Macaulay.*

Démonstration. L'anneau $(B \otimes_A C)_\mathfrak{N}$ s'identifie à un anneau de fractions de $B_\mathfrak{q} \otimes_{A_\mathfrak{p}} C_\mathfrak{r}$, où $\mathfrak{p}$ est l'image réciproque de $\mathfrak{N}$ dans A. Donc on se ramène au cas où l'un des anneaux, B ou C, est de Cohen-Macaulay et l'autre est presque de Cohen-Macaulay.

Supposons que B est un anneau de Cohen-Macaulay (resp. presque de Cohen-Macaulay); alors dans ce cas, la conclusion découle du Lemme précédent puisque σ est un homomorphisme de Cohen-Macaulay (resp. presque de Cohen-Macaulay) et par suite, d'après le Théorème précédent (resp. la Proposition précédente), $\sigma \otimes I_C$ l'est.

PROPOSITION 3.5. *Soient $\sigma\colon A \to B$ et $\rho\colon A \to C$ deux homomorphismes locaux d'anneaux locaux noethériens. On suppose que le corps résiduel de C est de rang fini sur celui de A. Si σ est plat alors l'anneau $B \hat{\otimes}_A C$ est presque de Cohen-Macaulay si l'un des anneaux, B ou C, est de Cohen-Macaulay et l'autre est presque de Cohen-Macaulay.*

DÉMONSTRATION. On raisonne comme dans la Proposition 2.8: Si B est un anneau de Cohen-Macaulay (resp. presque de Cohen-Macaulay) on utilise la Proposition 2.7 (resp. 3.4) puis le Lemme précédent.

L'exemple suivant montre que les deux Propositions précédentes tombent en défaut si les deux anneaux (locaux) sont presque de Cohen-Macaulay.

EXEMPLE 3.6. Soient k un corps, B l'anneau local de $k[X, Y]/(X^2, XY)$ en l'idéal maximal (x, y), C celui de $k[U, V]/(U^2, UV)$ en l'idéal maximal (u, v). Les anneaux B et C sont presque de Cohen-Macaulay et $B \otimes_k C$ est noethérien. Notons D l'anneau $B \otimes_k C$, $\mathfrak{r}$ l'idéal maximal $(x, y) \otimes_k C + B \otimes_k (u, v)$ de D, E l'anneau $B \hat{\otimes}_k C$ et T l'anneau local de $k[X, Y, U, V]/(X^2, XY, U^2, UV)$ en l'idéal maximal (x, y, u, v).

i) L'anneau $D_{\mathfrak{r}}$ est isomorphe à T donc D n'est pas un anneau presque de Cohen-Macaulay.

ii) L'anneau E est complet donc $\mathfrak{r}E$ est contenu dans son radical, et $\mathfrak{r}E$ est un idéal maximal de E car $E/\mathfrak{r}E$ est isomorphe à $D/\mathfrak{r}$. Donc E est un anneau local et $\mathfrak{r}E$ est son idéal maximal. L'homomorphisme $D \to E$ est plat. Donc l'homomorphisme induit $D_{\mathfrak{r}} \to E$ est local et plat. D'après le Lemme précédent, E n'est pas un anneau presque de Cohen-Macaulay car $D_{\mathfrak{r}}$ ne l'est pas.

REMERCIEMENT. L'auteur tient à remercier le rapporteur pour ses remarques.

RÉFÉRENCES

1. André, M., *Homologie des algèbres commutatives*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 206.
2. Avramov, L. L., *Flat morphisms of complete intersections*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 225 (1975), no. 1, 11–14.

3. Avramov, L. L., *Locally complete intersection homomorphisms and a conjecture of Quillen on the vanishing of cotangent homology*, Ann. of Math. (2) 150 (1999), no. 2, 455–487.
4. Avramov, L. L., and Foxby, H.-B., *Locally Gorenstein homomorphisms*, Amer. J. Math. 114 (1992), no. 5, 1007–1047.
5. Avramov, L. L., and Foxby, H.-B., *Cohen-Macaulay properties of ring homomorphisms*, Adv. Math. 133 (1998), no. 1, 54–95.
6. Bouchiba, S., and Kabbaj, S., *Tensor products of Cohen-Macaulay rings: solution to a problem of Grothendieck*, J. Algebra 252 (2002), no. 1, 65–73.
7. Bouchiba, S. and Kabbaj, S., *Regularity of tensor products of k-algebras*, Math. Scand. 115 (2014), no. 1, 5–19.
8. Grothendieck, A., *Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1965), no. 24, 231.
9. Grothendieck, A., and Dieudonné, J. A., *Eléments de géométrie algébrique. I*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 166, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
10. Ionescu, C., *More properties of almost Cohen-Macaulay rings*, J. Commut. Algebra 7 (2015), no. 3, 363–372.
11. Kang, M.-C., *Almost Cohen-Macaulay modules*, Comm. Algebra 29 (2001), no. 2, 781–787.
12. Marot, J., *P-rings and P-homomorphisms*, J. Algebra 87 (1984), no. 1, 136–149.
13. Matsumura, H., *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1986, Translated from the Japanese by M. Reid.
14. Tousi, M., and Yassemi, S., *Tensor products of some special rings*, J. Algebra 268 (2003), no. 2, 672–676.
15. Watanabe, K.-I., Ishikawa, T., Tachibana, S., and Otsuka, K., *On tensor products of Gorenstein rings*, J. Math. Kyoto Univ. 9 (1969), 413–423.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCES
MOHAMMED V UNIVERSITY IN RABAT
RABAT
MOROCCO
E-mail: mohamedtabaa11@gmail.com